Estimation de densités conditionnelles par sélection de modèles et application à la segmentation d'images hyperspectrales

E. Le Pennec
(SELECT - INRIA Saclay / Université Paris Sud)
et
S. Cohen (IPANEMA - Soleil)

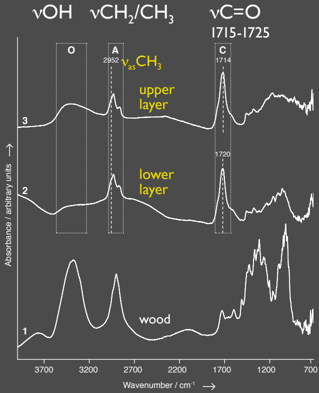
Séminaire Parisien de Statistique
29 novembre 2010

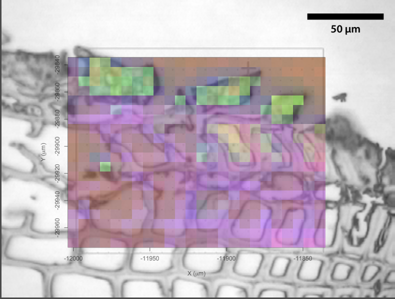
INRIA

A. Stradivari (1644 - 1737)

Provigny (1716)

A. Giordan © Cité de la Musique





SOLEIL SYNCHROTRON

4 / 8 cm^{-1} resolution

64 / 128 scans

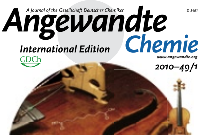
typ. 1 min/sp, 400sp

very simple process

no protein (amide I, amide II)

no gums, nor waxes

@SOLEIL: SMIS



J.-P. Echard, L. Bertrand, A. von Bohlen, A.-S. Le Hô, C. Paris, L. Bellot-Gurlet, B. Soulier, A. Lattuati-Derieux, S. Thao, L. Robinet, B. Lavédrine, and S. Vaiedelich. *Angew. Chem. Int. Ed.*, 49(1), 197-201, 2010.

Segmentation d'images hyperspectrales

- Données :
  - image de taille n comprise entre ~ 1000 et ~ 100000 pixels,
  - spectres $\mathcal{S}$ de ~ 1024 points,
  - résolution $\sim 4/8$ cm^{-1} (10 fois meilleure dans le visible),
  - possibilité de mesurer de très nombreux spectres par minute...
- Objectifs immédiats :
  - segmentation automatique de ces images,
  - sans intervention humaine,
  - aide à l'analyse des résultats.
- Objectifs lointains :
  - classification automatique,
  - interprétation...

Modélisation par un mélange de gaussiennes

- Modélisation stochastique des spectres $\mathcal{S}$:
  - existence de K classes de spectres,
  - proportion π_k pour chacune des classes ($\sum_{k=1}^{K} \pi_k = 1$),
  - loi gaussienne $\mathcal{N}(\mu_k, \Sigma_k)$ sur chacune des classes (restriction forte !)
- Densité s_0 de $\mathcal{S}$ proche de

$$s(\mathcal{S}) = \sum_{k=1}^{K} \pi_k \mathcal{N}(\mu_k, \Sigma_k)(\mathcal{S}).$$

- Objectif : estimer les paramètres K, π_k, μ_k, Σ_k à partir des données.
- Pourquoi ? : possibilité d'assigner ensuite une classe à une observation par maximum de vraisemblance

$$\widehat{k}(\mathcal{S}) = \mathrm{argmax}\, \pi_k \mathcal{N}(\mu_k, \Sigma_k)(\mathcal{S})$$

- Résultat en terme d'estimation de densité...

Modèle de mélange de gaussiennes

- Densité s_0 de $\mathcal{S}$ proche de $s_m(\mathcal{S}) = \sum_{k=1}^{K} \pi_k \mathcal{N}(\mu_k, \Sigma_k)(\mathcal{S})$.
- Modèle $S_m = \{s_m\}$:
  - choix d'un nombre de classe K,
  - choix d'une structure pour les moyennes μ_k et les covariances $\Sigma_k = L_k D_k A_k D_k'$
- Modèles $[\mu\, L\, D\, A]^K$: contraintes (valeurs connues, communes ou libres...) sur les moyennes μ_k, les volumes L_k, les bases de diagonalisation D_k et les valeur propres A_k.
- Modèle S_m : modèle paramétrique de dimension $(K-1) + \dim([\mu\, L\, D\, A]^K)$ dans un espace de dimension p.
- Estimation par maximum de vraisemblance des paramètres :
  - pour chaque classe, la moyenne μ_k et la covariance $\Sigma_k = L_k D_k A_k D_k'$
  - les proportions π_k du mélange.
- Technique classique avec algorithme (EM) efficace disponible.

Sélection de modèles

- Comment choisir le "modèle" S_m :
  - le nombre de classe K,
  - le modèle $[\mu\, L\, D\, A]^K$?
- Thème central du projet SELECT.
- Principe de sélection de modèles par pénalisation :
  - choix d'une collection de modèles $S_m = \{s_m\}$ avec $m \in \mathcal{M}$,
  - estimation par maximum de vraisemblance d'une densité $\hat{s}_m$ pour chaque modèle S_m,
  - sélection d'un modèle $\widehat{m}$ par

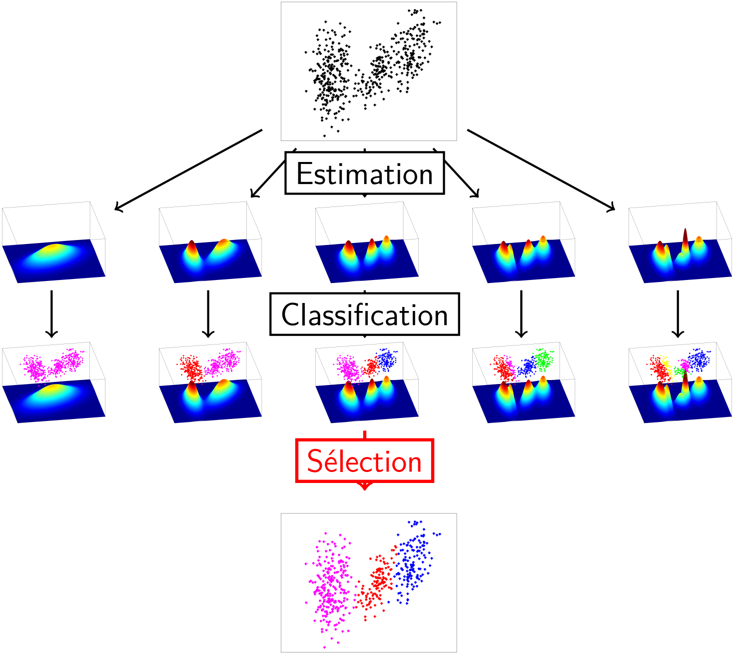
$$\widehat{m} = \operatorname{argmin} - \ln(\widehat{s}_m) + \operatorname{pen}(m).$$

    avec $\operatorname{pen}(m) = \kappa(\ln(n)) \dim(S_m)$ (dimension intrinsèque de S_m),
- Résultats (Birgé, Massart, Celeux, Maugis, Michel...) :
  - théorique d'estimation du mélange : pour κ assez grand,

$$\mathbb{E}\left[d^2(s_0, \widehat{s}_{\widehat{m}})\right] \leq C \inf_{m \in \mathcal{M}} \left(\inf_{s_m \in S_m} KL(s_0, s_m) + \frac{\operatorname{pen}(m)}{n} \right) + \frac{C'}{n}.$$

  - pratique de classification non supervisée ($\neq$ segmentation),
  - consistance de la classification si $\ln \ln(n)$ dans la pénalité...

Méthodologie



Segmentation et mélange de gaussiennes

- Objectif initial : segmentation $\neq$ classification non supervisée.
- Prise en compte de la position spatiale x du spectre à travers les proportions du mélange (Kolaczyk et al) : modèle de densités conditionnelles

$$s(\mathcal{S}|x) = \sum_{k=1}^{K} \pi_k(x) \mathcal{N}(\mu_k, \Sigma_k)(\mathcal{S}).$$

- Modèle mélangeant paramétrique et "non-paramétrique"...
- Estimation à partir des données :
  - pour chaque classe, la moyenne μ_k et la covariance $\Sigma_k = L_k D_k A_k D_k'$,
  - de la fonction de mélange $\pi_k(x)$.
- $\pi_k(x)$ fonction : régularisation nécessaire.
- Principe de sélection de modèles...

Mélange de gaussiennes et partition hiérarchique

- Comment choisir le "modèle" S_m ? :
  - le nombre de classe K,
  - le modèle $[\mu\, L\, D\, A]^K$,
  - la structure des paramètres de mélange $\pi_k(x)$.
- Structure simple pour $\pi_k(x)$:
  - constant par morceau sur une partition "hiérarchique",
  - optimisation efficace possible,
  - performance d'approximation raisonnable.
- $\dim(S_m) = |\mathcal{P}|(K-1) + \dim([\mu\, L\, D\, A]^K)$.
- Pénalité $\mathrm{pen}(m) = \kappa \ln(n) \dim(S_m)$ suffisante pour
  - l'optimisation numérique (EM + programmation dynamique),
  - le contrôle théorique : pour κ assez grand,

$$\mathbb{E}\left[d^2(s_0, \widehat{s}_{\widehat{m}})\right] \leq C \inf_{m \in \mathcal{M}} \left(\inf_{s_m \in S_m} KL(s_0, s_m) + \frac{\mathrm{pen}(m)}{n} \right) + \frac{C'}{n}.$$

Densités conditionnelles

- Cadre plus général : observation de (X_i, Y_i) avec X_i indépendants et Y_i indépendants de loi de densité $s_0(y|X_i)$.
- Objectif : estimation de $s_0(y|x)$.
- Principe de sélection de modèles par pénalisation :
  - choix d'une collection de modèles $S_m = \{s_m(y|x)\}$ avec $m \in \mathcal{M}$,
  - estim. par max. de vraisemblance d'une dens. $\hat{s}_m$ pour chaque modèle S_m :
$$\hat{s}_m = \operatorname*{argmin}_{s_m \in S_m} - \sum_{i=1}^{n} \ln s_m(Y_i|X_i)$$
  - avec $\mathrm{pen}(m)$ à bien choisir, sélection d'un modèle $\widehat{m}$ par
$$\widehat{m} = \operatorname*{argmin}_{m \in \mathcal{M}} - \sum_{i=1}^{n} \ln \widehat{s}_m(Y_i|X_i) + \mathrm{pen}(m).$$
- Résultat d'estimation de densité du type
$$\mathbb{E}\left[d^2(s_0, \widehat{s}_{\widehat{m}})\right] \leq C \inf_{m \in \mathcal{M}} \left(\inf_{s_m \in S_m} KL(s_0, s_m) + \frac{\mathrm{pen}(m)}{n} \right) + \frac{C'}{n}.$$
- Biblio succinte : Rosenblatt, Fan et al., de Gooijer and Zerom, Efromovitch, Brunel, Comte, Lacour... / Plugin, estimation directe, perte L^2, minimax, censure...

Theorem

Under Assumption (H_{β_ϕ}) : the existence, for a given $\beta_\phi \geq 1$, of a non-decreasing function $\phi_m(\delta, \beta_\phi)$ such that $\delta \mapsto \frac{1}{\beta_\phi \delta} \phi_m(\delta, \beta_\phi)$ is non-increasing on $(0, +\infty)$ and for every $\sigma \in \mathbb{R}^+$ and every $s_m \in S_m$

$$\int_0^{\beta_\phi \sigma} \sqrt{H_{[\cdot], d^{\otimes n}}(\epsilon, S_m(s_m, \sigma))}\, d\epsilon \leq \phi_m(\sigma, \beta_\phi).$$

This assumption implies the following theorem (up to a technical measurability condition) :

Theorem

Assume we observe (X_i, Y_i) with unknown conditional s_0. Let $(S_m)_{m\in\mathcal{M}}$ a at most countable model collection.

Assume that there is a family $(x_m)_{m\in\mathcal{M}}$ of non-negative number such that $\displaystyle\sum_{m\in\mathcal{M}} e^{-x_m} \leq \Sigma < +\infty \qquad (K)$

and, under assumption (H), let σ_m be the unique root of $\displaystyle\frac{1}{\sigma}\phi_m(\sigma, \beta_\phi) = \frac{1}{\beta_\sigma}\sqrt{n}\sigma. \qquad (H_\sigma)$

and let $\widehat{s_m}$ be a ρ maximum likelihood minimizer in S_m : $\displaystyle\sum_{i=1}^n -\ln(\widehat{s_m}(Y_i|X_i)) \leq \inf_{s_m\in S_m}\left(\sum_{i=1}^n -\ln(s_m(Y_i|X_i))\right) + \rho$

For any $\rho \in (0,1)$, any $\beta_x > 0$ and any $C_1 > 1$, there are two absolute constants κ_0 and C_2 such as soon as for every model $m \in \mathcal{M}$

$$\mathrm{pen}(m) \geq \kappa\left(n\sigma_m^2 + \beta_x^2 x_m\right) \quad \textit{with } \kappa > \kappa_0, \qquad (P)$$

the penalized likelihood estimate $\widehat{s_{\widehat{m}}}$ with $\widehat{m}$ defined by $\displaystyle\widehat{m} = \operatorname*{argmin}_{m\in\mathcal{M}} \sum_{i=1}^n -\ln(\widehat{s_m}(Y_i|X_i)) + \mathrm{pen}(m)$

satisfies $\displaystyle\mathbb{E}\left[JKL_\rho^{\otimes n}(s_0, \widehat{s_{\widehat{m}}})\right] \leq C_1 \inf_{S\in\mathcal{M}}\left(\inf_{s_m\in S_m} KL^{\otimes n}(s_0, s_m) + \frac{\mathrm{pen}(m)}{n}\right) + C_2\frac{\Sigma}{n} + \frac{\rho}{n}.$

Théorème

- Inégalité oracle

$$\mathbb{E}\left[JKL_{\rho}^{\otimes_n}(s_0,\widehat{s}_{\widehat{m}})\right] \leq C_1 \inf_{S\in\mathcal{M}}\left(\inf_{s_m\in S_m} KL^{\otimes_n}(s_0,s_m)+\frac{\mathrm{pen}(m)}{n}\right)+C_2\frac{\Sigma}{n}+\frac{\rho}{n}$$

dès que

$$\mathrm{pen}(m)\geq\kappa\left(n\sigma_m^2+x_m\right)\quad \text{with } \kappa>\kappa_0,$$

où $n\sigma_m^2$ mesure la complexité du modèle S_m (entropie) et x_m le coût de codage dans la collection.

- « Distances » utilisées $KL^{\otimes_n}$ et $JKL_{\rho}^{\otimes_n}$: divergence de Kullback et divergence de Jensen-Küllback « tensorisées ».
- $n\sigma_m^2$ lié à l'entropie à crochet de S_m mesurée par rapport à la distance de Hellinger tensorisée $d^{2\otimes_n}$.

Kullback, Hellinger et extensions

- Inégalité oracle en sélection de modèles de la forme

$$\mathbb{E}\left[d^2(s_0, \widehat{s}_{\widehat{m}})\right] \leq C\left(\inf_{m\in\mathcal{M}} \inf_{s_m\in S_m} KL(s_0, s_m) + \frac{\mathrm{pen}(m)}{n}\right) + \frac{C'}{n}.$$

- Densité : Hellinger $d^2(s, s')$ (ou affinité) (Kolaczyk, Barron, Bigot).
- Raff. avec $JKL(s, s') = 2KL(s, (s' + s)/2)$ (Massart, van de Geer).
- Jensen-Küllback : généralisation à $JKL_\rho(s, s') = \frac{1}{\rho} KL(s, \rho s' + (1-\rho)s)$.
- **Prop. :** Pour toutes mesures de proba $sd\lambda$ et $td\lambda$ et tout $\rho \in (0, 1)$

$$C_\rho\, d^2_\lambda(s, t) \leq JKL_{\rho,\lambda}(s, t) \leq KL_\lambda(s, t)$$

avec $C_\rho = \frac{1}{\rho}\min(\frac{1-\rho}{\rho}, 1)\left(\ln\left(1 + \frac{\rho}{1-\rho}\right) - \rho\right)$.
De plus, si $\forall \omega \in \Omega, s(\omega) = 0 \implies t(\omega) = 0$

$$d^2_\lambda(s, t) \leq KL_\lambda(s, t) \leq \left(2 + \ln\left\|\frac{s}{t}\right\|_\infty\right) d^2_\lambda(s, t).$$

Densités conditionnelles

- Nécessité de s'adapter pour les densités conditionnelles :
  - Divergence sur la densité produit conditionnée au design (Kolaczyk, Bigot).
  - Principe de tensorisation et de passage à l'espérance sur le design :

$$KL \to KL^{\otimes_n}(s, s') = \mathbb{E}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} KL\left(s(\cdot|X_i), s'(\cdot|X_i)\right)\right],$$

$$JKL_\rho \to JKL_\rho^{\otimes_n} \quad \text{and} \quad d^2 \to d^{2\otimes_n}.$$

- Approche similaire sauf pour Hellinger et la possibilité du passage à l'espérance sur le design dans l'inégalité oracle.
- Inégalité oracle de la forme

$$\mathbb{E}\left[JKL^{\otimes_n}(s_0, \widehat{s}_{\widehat{m}})\right] \leq C \inf_{m \in \mathcal{M}} \left(\inf_{s_m \in S_m} KL^{\otimes_n}(s_0, s_m) + \frac{\mathrm{pen}(m)}{n} \right) + \frac{C'}{n}.$$

- On retrouve exactement le théorème classique si $s(\cdot|X_i) = s(\cdot)$.
- Bon "scaling" de $JKL_\rho^{\otimes_n}(s_{,0}\, \widehat{s}_{\widehat{m}})$ et $KL^{\otimes_n}(s_0, s_m)$ avec n.
- Pb dans Bigot et al avec Hellinger : $\frac{1}{n} d^2(s_0, \widehat{s}_{\widehat{m}}) \leq \frac{2}{n}$!
- Pas ce soucis avec Bhattacharyya-Renyi de Kolaczyk et Barron mais pas de divergence "intégrée"...

Pénalité et complexité

- Pénalité liée à la complexité du modèle et de la collection.
- Complexité du modèle S_m (entropie) :
  - $H_{[\cdot],d^{\otimes_n}}(\epsilon, S_m)$ entropie à crochet liée à la distance de Hellinger tensorisée $\left(d^{\otimes_n} = \sqrt{d^{2\otimes_n}} = \sqrt{\mathbb{E}\left[\frac{1}{n}\sum d^2(s(\cdot|X_i), s'(\cdot|X_i))\right]}\right)$.
  - Hypothèse (H) : pour tout modèle S_m, il existe une fonction croissante $\phi_m(\delta)$ telle que $\delta \mapsto \frac{1}{\delta}\phi_m(\delta)$ soit décroissante sur $(0, +\infty)$ et telle que pour tout $\sigma \in \mathbb{R}^+$ et tout $s_m \in S_m$

$$\int_0^\sigma \sqrt{H_{[\cdot],d^{\otimes_n}}\left(\epsilon, S_m(s_m, \sigma)\right)}\, d\epsilon \leq \phi_m(\sigma),$$

  - Complexité mesurée par $n\sigma_m^2$ avec σ_m l'unique racine de $\dfrac{1}{\sigma}\phi_m(\sigma) = \sqrt{n}\sigma$.
- Complexité de la collection (codage) :
  - complexité donnée par x_m satisfaisant Kraft $\displaystyle\sum_{m\in\mathcal{M}} e^{-x_m} \leq \Sigma < +\infty$
- Contrainte (classique) sur la pénalité

$$\mathrm{pen}(m) \geq \kappa\left(n\sigma_m^2 + x_m\right) \quad \text{avec } \kappa > \kappa_0.$$

Esquisse de preuve

- Preuve très proche de celle du théorème 7.11 du livre « Concentration Inequalities and Model Selection » de P. Massart.
- Pour toute fonction $g(x, y)$, on note $P_n^{\otimes_n}(g)$ son processus empirique

$$P_n^{\otimes_n}(g) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g(X_i, Y_i)$$

  et $P^{\otimes_n}(g)$ l'espérance de ce processus

$$P^{\otimes_n}(g) = \mathbb{E}\left[P_n^{\otimes_n}(g)\right] = \mathbb{E}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g(X_i, Y_i)\right].$$

  et $\nu_n^{\otimes_n}(g) = P_n^{\otimes_n}(g) - \nu_n^{\otimes_n}(g)$ le processus recentré.
- On note
  - $\widehat{s}_m = \mathrm{argmin}_{s_m \in S_m} P_n^{\otimes_n}(-\ln s_m) = \mathrm{argmin}_{s_m \in S_m} P_n^{\otimes_n}\left(-\ln \frac{s_m}{s_0}\right)$
  - $\overline{s}_m = \mathrm{argmin}_{s_m \in S_m} P^{\otimes_n}\left(-\ln \frac{s_m}{s_0}\right) = \mathrm{argmin}_{s_m \in S_m} KL^{\otimes_n}(s_0, s_m)$.
- On pose

$$\widehat{g}_m = -\ln\left(\frac{\widehat{s}_m}{s_0}\right) \quad \overline{g}_m = -\ln\left(\frac{\overline{s}_m}{s_0}\right) \quad \widehat{f}_m = -\frac{1}{\rho}\ln\frac{\rho\widehat{s}_m + (1-\rho)s_0}{s_0}$$

Majoration des « log-vraisemblances »

- Par convexité, $\widehat{f}_m = -\frac{1}{\rho} \ln \frac{\rho \widehat{s}_m + (1-\rho) s_0}{s_0} \leq - \ln \frac{\widehat{s}_m}{s_0} = \widehat{g}_m$
- Soit $m \in \mathcal{M}$, pour tout m' tel que

$$P_n^{\otimes n}(\widehat{g}_{m'}) + \frac{\mathrm{pen}(m')}{n} \leq P_n^{\otimes n}(\widehat{g}_m) + \frac{\mathrm{pen}(m)}{n} :$$

$$\begin{aligned} P_n^{\otimes n}(\widehat{f}_{m'}) + \frac{\mathrm{pen}(m')}{n} &\leq P_n^{\otimes n}(\widehat{g}_{m'}) + \frac{\mathrm{pen}(m')}{n} \\ &\leq P_n^{\otimes n}(\widehat{g}_m) + \frac{\mathrm{pen}(m)}{n} \\ &\leq P_n^{\otimes n}(\overline{g}_m) + \frac{\mathrm{pen}(m)}{n} \end{aligned}$$

- Soit

$$\begin{aligned} &P^{\otimes n}(\widehat{f}_{m'}) - \nu_n^{\otimes n}(\overline{g}_m) \\ &\qquad \leq P^{\otimes n}(\overline{g}_m) + \frac{\mathrm{pen}(m)}{n} - \nu_n^{\otimes n}(\widehat{f}_{m'}) - \frac{\mathrm{pen}(m')}{n} \end{aligned}$$

Inégalité oracle à déviation près

- L'inégalité précédente s'écrit

$$\begin{aligned} JKL_\rho^{\otimes_n}(s_0,\hat{s}_{m'}) - \nu_n^{\otimes_n}(\overline{g}_m) & \\ \leq KL^{\otimes_n}(s_0,\overline{s}_m) + \frac{\mathrm{pen}(m)}{n} & \\ - \nu_n^{\otimes_n}(\widehat{f}_{m'}) - \frac{\mathrm{pen}(m')}{n} & \end{aligned}$$

- On a fait apparaître
  - l'erreur intégré de l'estimateur dans le modèle m' : $JKL_\rho^{\otimes_n}(s_0,\hat{s}_{m'})$
  - un processus centré et simple : $-\nu_n^{\otimes_n}(\overline{g}_m)$,
  - l'oracle $KL^{\otimes_n}(s_0,\overline{s}_m) + \frac{\mathrm{pen}(m)}{n}$
  - un « reste » aléatoire $-\nu_n^{\otimes_n}(\widehat{f}_{m'}) - \frac{\mathrm{pen}(m')}{n}$
- On peut alors « contrôler les déviations » de $-\nu_n^{\otimes_n}(\widehat{f}_{m'})$ par $\epsilon JKL_\rho^{\otimes_n}(s_0,\hat{s}_{m'}) + \frac{\mathrm{pen}(m')}{n}$ dès que $\mathrm{pen}(m') \geq \kappa(n\sigma^2_{m'} + x_m)$...

Déviation de $\nu_n^{\otimes n}(\widehat{f}_{m'})$

- Prélude : contrôle de $\nu_n^{\otimes n}(\widetilde{f}_{m'})$ avec $\widetilde{f}_{m'} = \frac{1}{\rho} \ln \frac{s_0}{\rho \widetilde{s}_{m'} + (1-\rho) s_0}$ et $\widetilde{s}_{m'} \in S_{m'}$ non aléatoire.
- $\nu_n^{\otimes n}(\widetilde{f}_{m'}) = \nu_n^{\otimes n} \left(\frac{1}{\rho} \ln \frac{s_0}{\rho \widetilde{s}_{m'} + (1-\rho) s_0} \right)$ facile à contrôler avec Bernstein ?
- Hypothèse typique pour Bernstein pour $\nu_n^{\otimes n}(\widetilde{f}_{m'})$: $\exists \sigma$ et b tels que

  pour tout entier $k \geq 2$, $\quad P^{\otimes n}(|\widetilde{f}_{m'}|^k) \leq \dfrac{k!}{2} \sigma^2 b^{k-2}.$

- Cas $\rho = 1$, $\widetilde{f}_{m'} = \ln \frac{s_0}{\widetilde{s}_{m'}}$: impossible à contrôler sans hypothèse sur le rapport des densités...

Jensen-Shannon et Hellinger

- **Lemme de van de Geer :** Pour toutes fonctions positives t, u et tout entier $k \geq 2$

$$P\left(\left|\ln\left(\frac{s_0+t}{s_0+u}\right)\right|^k\right) \leq \frac{k!}{2}\left(\frac{9\|\sqrt{t}-\sqrt{u}\|_{\lambda,2}^2}{8}\right)2^{k-2}.$$

- Apparition de Jensen-Shannon :

$$P^{\otimes_n}\left(\left|\frac{1}{\rho}\ln\left(\frac{(1-\rho)s_0+\rho t}{(1-\rho)s_0+\rho u}\right)\right|^k\right) \leq \frac{k!}{2}\left(\frac{9d^{2\otimes_n}(t,u)}{8\rho(1-\rho)}\right)\left(\frac{2}{\rho}\right)^{k-2}$$

- Soit pour $t = s_0$ et $u = \widetilde{s}_{m'}$, comme $\widetilde{f}_{m'} = \frac{1}{\rho}\ln\left(\frac{s_0}{(1-\rho)s_0+\rho\widetilde{s}_{m'}}\right)$,

$$P^{\otimes_n}\left(\left|\widetilde{f}_{m'}\right|^k\right) \leq \frac{k!}{2}\left(\frac{9d^{2\otimes_n}(s_0,\widetilde{s}_{m'})}{8\rho(1-\rho)}\right)\left(\frac{2}{\rho}\right)^{k-2}.$$

- Bernstein possible avec $\sigma = \sqrt{\frac{9d^{2\otimes_n}(s_0,\widetilde{s}_{m'})}{8\rho(1-\rho)}}$ et $b = \frac{2}{\rho}$.

Déviation et « log-vraisemblance »

- On pose $\widetilde{s}_{m'} = \mathrm{argmin}_{s \in S_{m'}} d^{2\otimes_n}(s_0, s_{m'})$.
- $-\nu_n^{\otimes_n}(\widehat{f}_{m'}) = \left(-\nu_n^{\otimes_n}(\widehat{f}_{m'}) + \nu_n^{\otimes_n}(\widetilde{f}_{m'})\right) - \nu_n^{\otimes_n}(\widetilde{f}_{m'})$
- Reste à contrôler

$$-\nu_n^{\otimes_n}(\widehat{f}_{m'}) + \nu_n^{\otimes_n}(\widetilde{f}_{m'}) = Z(\widehat{s}_{m'}) - Z(\widetilde{d}_{m'})$$

  où $Z(s) = \nu_n^{\otimes_n}\left(\frac{1}{\rho} \ln \frac{s_0}{\rho s + (1-\rho)s_0}\right)$.
- Première idée :

$$Z(\widehat{s}_{m'}) - Z(\widetilde{d}_{m'}) \leq \sup_{s_{m'} \in S_{m'}} Z(s_{m'}) - Z(\widetilde{s}_{m'}).$$

- Beaucoup trop grossier !
- Localisation pour mettre un peu de $JKL_\rho^{\otimes_n}(s_0, s_{m'})$.

Épluchage et déviations locales

- En posant $S_{m'}(\widetilde{s}_{m'},\sigma) = \{s_{m'} \in S_{m'} | d^{2\otimes n}(\widetilde{s}_{m'}, s_{m'}) \leq \sigma^2\}$, si

$$\mathbb{E}\left[\sup_{s_{m'} \in S_{m'}(\widetilde{s}_{m'},\sigma)} Z(s_{m'}) - Z(\widetilde{s}_{m'})\right] \leq \psi(\sigma), \quad \text{pour tout } \sigma \geq \sigma_\star \geq 0,$$

  avec $\psi(x)/x$ décroissante sur $\mathbb{R}^+$ alors $\forall x \geq \sigma_\star$

$$\mathbb{E}\left[\sup_{s_{m'} \in S_{m'}} \frac{Z(s_{m'}) - Z(\widetilde{s}_{m'})}{x^2 + d^{2\otimes n}(\widetilde{s}_{m'}, s_{m'})}\right] \leq 4x^{-2}\psi(x).$$

- Contrôle de

$$\mathbb{E}\left[\sup_{s_{m'} \in S_{m'}(\widetilde{s}_{indm'},\sigma)} Z(s_{m'}) - Z(\widetilde{s}_{m'})\right] = \mathbb{E}\left[\sup_{s_{m'} \in S_{m'}(\widetilde{s}_{indm'},\sigma)} W(s_{m'})\right]$$

  avec

$$W(s_{m'}) = \nu_n^{\otimes n}\left(\frac{1}{\rho}\ln\frac{\rho\widetilde{s}_{m'} + (1-\rho)s_0}{\rho s_{m'} + (1-\rho)s_0}\right).$$

- Outil : Théorème 6.8 du livre de P. Massart...

Déviations et entropie

- **Théorème :** Soit $\mathcal{F}$ une famille dénombrable de fonctions à valeur réelles. Si ils existent des nombres positifs σ et b tels que pour tout $f \in \mathcal{F}$ et tout entier $k \geq 2$

$$P^{\otimes_n}(|f|^k) \leq \frac{k!}{2}\sigma^2 b^{k-2}$$

et que de plus pour tout nombre positif δ il existe un ensemble $B(\delta)$ de crochets recouvrant $\mathcal{F}$ tel que pour tout crochet $[g^-, g^+] \in B(\delta)$ et tout entier $k \geq 2$

$$P^{\otimes_n}(|g^+ - g^-|^k) \leq \frac{k!}{2}\sigma^2 b^{k-2}$$

Soit $e^{H(\delta)}$ le cardinal de ce recouvrement, il existe un constante absolue κ telle pour tout $\epsilon \in (0,1]$ et tout ensemble mesurable A avec $P[A] > 0$, on a

$$\mathbb{E}^A\left[\sup_{f\in\mathcal{F}} \nu_n^{\otimes_n}(f)\right] \leq E + \frac{(1+6\epsilon)\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{2\ln\left(\frac{1}{\mathbb{P}\{A\}}\right)} + \frac{2b}{n}\ln\left(\frac{1}{\mathbb{P}\{A\}}\right)$$

où

$$E = \frac{\kappa}{\epsilon}\frac{1}{\sqrt{n}}\int_0^{\epsilon\sigma}\sqrt{H(u)\wedge n}\mathrm{d}u + \frac{2(b+\sigma)}{n}H(\sigma)$$

avec $\kappa \leq 27$.

Jensen-KL et entropie à crochet

- Contrôle de sup $P_n^{\otimes_n}(f)$ pour $f \in \mathcal{F}$ sous deux conditions
  - Hypothèse nécessaire (c.f. Bernstein) : $\exists \sigma$ et b tels que pour tout $f \in \mathcal{F}$ et tout entier $k \geq 2$, $$P^{\otimes_n}(|f|^k) \leq \frac{k!}{2}\sigma^2 b^{k-2}.$$
  - Hypthèse d'entopie à crochet sur $\mathcal{F}$: pour tout σ, existence d'un recouvrement par des crochets $[g^-, g^+]$ de cardinal $H(\sigma)$ tel que pour tout entier $k \geq 2$, $$P^{\otimes_n}(|g^+ - g^-|^k) \leq \frac{k!}{2}\sigma^2 b^{k-2}.$$
- **Lemme de van de Geer :**
$$P^{\otimes_n}\left(\left|\frac{1}{\rho}\ln\left(\frac{(1-\rho)s_0+\rho t}{(1-\rho)s_0+\rho u}\right)\right|^k\right) \leq \frac{k!}{2}\left(\frac{9d^{2\otimes_n}(t,u)}{8\rho(1-\rho)}\right)\left(\frac{2}{\rho}\right)^{k-2}$$
- Importance d'utiliser la distance de Jensen-KL $JKL^{\otimes_n}$.
- Condition d'entropie à crochet sur $S_{m'}(\widetilde{s}_{m'}, \sigma)$ par rapport à la distance de Hellinger tensorisée $d^{\otimes_n}$!

Fin de la preuve

- Application du théorème :

$$\mathbb{E}^A\left[W_m(\sigma)\right] \leq E + \frac{(1+6\epsilon)3\sigma}{2\sqrt{2\rho(1-\rho)}\sqrt{n}}\sqrt{\ln\left(\frac{1}{\mathbb{P}\{A\}}\right)} + \frac{4}{\rho n}\ln\left(\frac{1}{\mathbb{P}\{A\}}\right)$$

avec

$$E = \frac{\kappa}{\epsilon}\frac{1}{\sqrt{n}}\int_0^{\epsilon\frac{3\sigma}{2\sqrt{2(\rho(1-\rho)}}}\sqrt{H_{[\cdot],d^{\otimes n}}\left(u, S_m(\widetilde{s}_m,\sigma)\right)\wedge n}\,\mathrm{d}u + \frac{2(\frac{2}{\rho}+\frac{3\sigma}{2\sqrt{2\rho(1-\rho)}})}{n}H_{[\cdot],d^{\otimes n}}\left(\sigma, S_m(\widetilde{s}_m,\sigma)\right)$$

- En utilisant les déf. de $\phi_{m'}$ et $\sigma_{m'}$, on obtient $\forall\sigma \geq \sigma_{m'}$

$$\mathbb{E}^A\left[W_m(\sigma)\right] \leq \kappa_1''\frac{\phi_m(\sigma)}{\sqrt{n}} + \frac{\kappa_2''\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\ln\left(\frac{1}{\mathbb{P}\{A\}}\right)} + \frac{4}{\rho n}\ln\left(\frac{1}{\mathbb{P}\{A\}}\right).$$

- Retour à un contrôle en proba à la Berstein possible :

$$\forall A, P(A)>0,\ \mathbb{E}^A\left[Z\right] \leq \Psi\left(\ln\left(\frac{1}{\mathbb{P}\{A\}}\right)\right) \implies \forall x>0, \mathbb{P}\left[Z \geq \Psi(x)\right] \leq e^{-x}.$$

- Preuve sans soucis ensuite en utilisant en plus
  - $C_\rho d^{2\otimes_n}(s_0,\widehat{s}_{m'}) \leq JKL_\rho^{\otimes_n}(s_0,\widehat{s}_{m'})$
  - une borne d'union sur tous les modèles exploitant l'inégalité de Kraft.

Retour vers les modèles de mélanges spatiaux

- Contrôle de $H_{[\cdot],d^{\otimes n}}(\epsilon, S_m(s_m,\sigma))$ pour les modèles de mélanges spatiaux (cf Maugis et Michel) :
  - contrôle d'un majorant de l'entropie : $H_{[\cdot],d^{\sup}}(\epsilon, S_m)$ où $d^{\sup} = \sqrt{d^{2\sup}} = \sqrt{\sup_x d^2(s(\cdot|x), s'(\cdot|x))}$,
  - résultat valide pour toutes les classes de mélanges $([\mu\, L\, D\, A]^K)$ et toutes les partitions :

$$H_{[\cdot],d^{\sup}}(\epsilon, S_m) \leq \dim(S_m)(C + \ln\frac{1}{\epsilon})$$

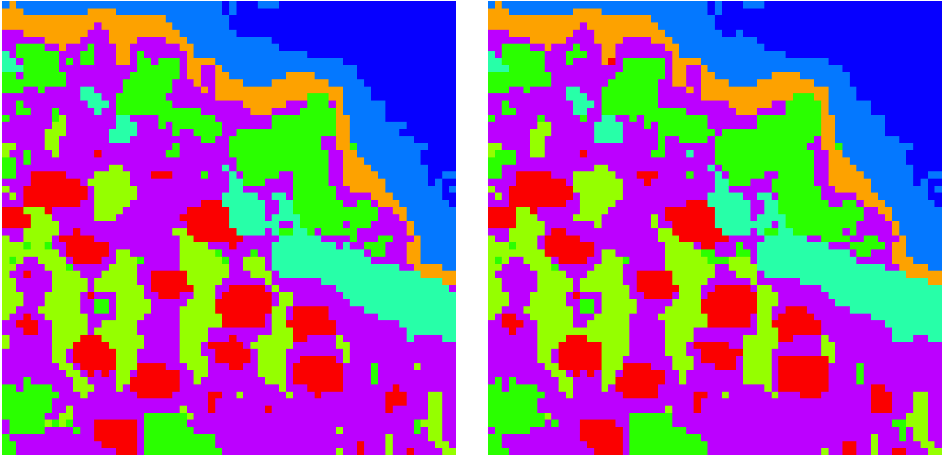
    avec C presque explicite (utilisation d'un lemme de Szarek sur l'entropie de $SO(n)$ sans constante explicite...) et $\dim(S_m) = |\mathcal{P}|(K-1) + \dim([\mu\, L\, D\, A]^K)$.
  - implication : $n\sigma_m^2 \leq \kappa' \ln(n) \dim(S_m)$.
- Codage de la collection avec $x_m \leq \kappa''|\mathcal{P}| \leq \frac{\kappa''}{K-1}\dim(S_m)$.
- Condition sur la pénalité :

$$\mathrm{pen}(m) \geq \left(\kappa' \ln(n) + \frac{\kappa''}{K-1}\right)\dim(S_m).$$

Segmentation automatique

- Résultat numérique selon la prise en compte du caractère spatial :

Sans | Avec

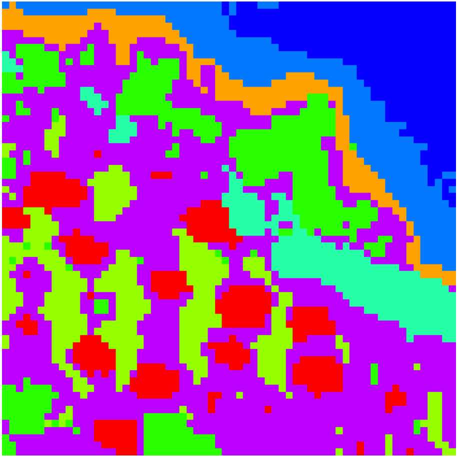


- $K = 8$, $[L_k\, D\, A_k]^K$ et partition optimale.
- Calibration de la pénalité par heuristique de pente.
- Réduction de dimension par simple ACP...

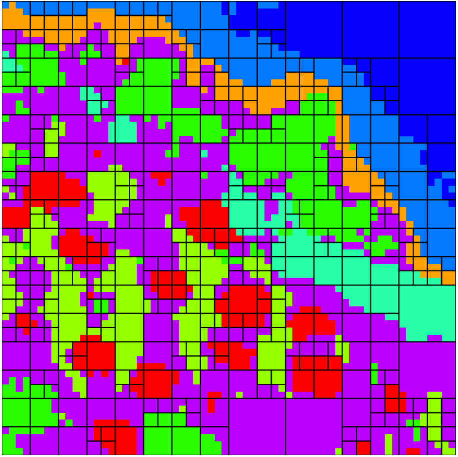
Segmentation automatique

- Résultat numérique selon la prise en compte du caractère spatial :

Sans

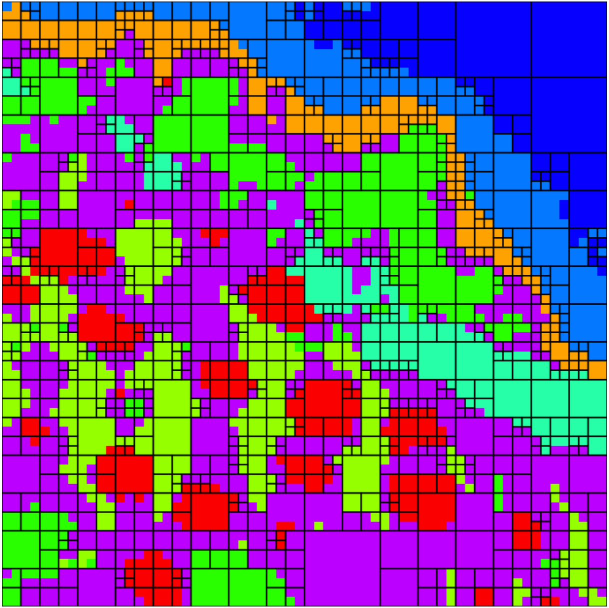


Avec

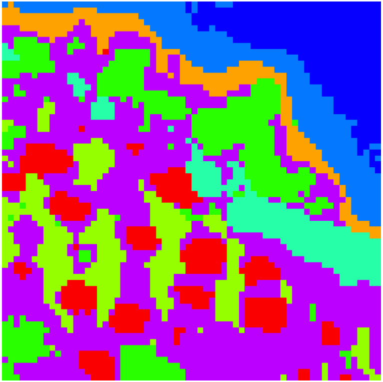


- $K = 8$, $[L_k \, D \, A_k]^K$ et partition optimale.
- Calibration de la pénalité par heuristique de pente.
- Réduction de dimension par simple ACP...

Segmentation et classification



Le secret de Stradivarius



- Deux couches fines de vernis :
  - une première couche d'huile simple, similaire à celle des peintres, pénétrant légèrement le bois,
  - une seconde d'un mélange huile, résine de pin, pigments donnant cette couleur rouge caractéristique.
- Technique classique pour l'époque.
- Le secret de Stradivarius n'est pas dans le vernis !

Conclusion

- Cadre :
  - Problème de segmentation non supervisée.
  - Estimateur de densités conditionnelles par maximum de vraisemblance et pénalisation.
- Résultats :
  - Garantie théorique pour l'estimation de densités avec des distances « tensorisées ».
  - Applicable au problème de segmentation.
  - Algorithme efficace de minimisation.
- Perspectives :
  - Applications à d'autres cas.
  - Lien entre l'estimation de densités conditionnelles et les performances de segmentation.
  - Calibration par heuristique de pente des deux problèmes.
  - Réduction de dimension adaptée à la segmentation/classification supervisée ou non.

Bibliographie

- Inspiration initiale présentant une solution complète :
  - A. Antoniadis, J. Bigot and R. von Sachs (2008). *A multiscale approach for statistical characterization of functional images.* Journal of Computational and Graphical Statistics, 18(1), 216–237
- Segmentation et sélection de modèles :
  - E.D. Kolaczyk, J. Ju and S. Gopal (2005). *Multiscale, multigranular statistical image segmentation.* Journal of the American Statistical Association, 100, 1358–1369.
  - E.D. Kolaczyk and R.D. Nowak (2004). *Multiscale likelihood analysis and complexity penalized estimation.* Annals of Statistics, 32, 500–527
- Sélection de modèles par MDL :
  - A.R. Barron, C. Huang, J. Q. Li and Xi Luo (2008). *MDL Principle, Penalized Likelihood, and Statistical Risk.* In Feschrift for Jorma Rissanen. Presented to Rissanen Nov. 2007.
- Sélection de modèles et entropie (à crochet) :
  - P. Massart (2003). *Concentration inequalities and model selection* : Ecole d'Eté de Probabilités de Saint-Flour XXXIII.
  - C. Maugis and B. Michel. (2009). *A non asymptotic penalized criterion for Gaussian mixture model selection.* Accepté à ESAIM : P&S (et l'erratum)
  - S. Cohen and E. Le Pennec (201 ?)
- Entropie de $SO(n)$:
  - J. Szarek (1998). *Metric entropy of homogeneous spaces.* Banach Center Pub., 43, 395–410
- Sélection de modèle et densité conditionnelle :
  - E. Brunel, C. Lacour et F. Comte (2007). *Adaptive estimation of the conditional density in presence of censoring.* Sankhya, 69(4), 734–763