

Estimation d'Image, Géométries et Bandelettes

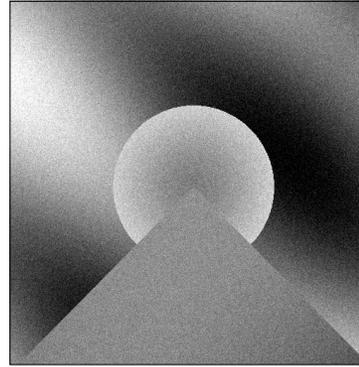
E. Le Pennec / LPMA / Université Denis Diderot - Paris VII
S. Mallat, Ch. Dossal et G. Peyré / CMAP / École Polytechnique

31 Août 2006

Estimation, Géométries et Bandelettes

Estimation, Géométries et Bandelettes

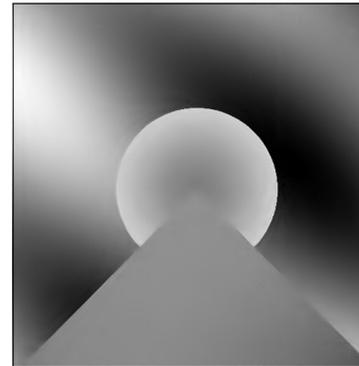
Bruitée



Estimation

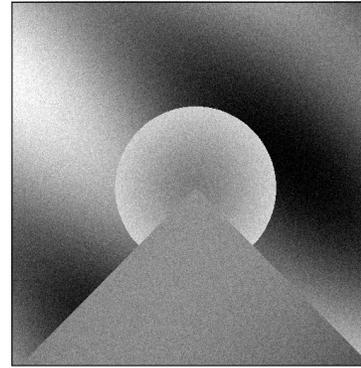
Sans géométrie

Avec géométrie



Estimation, Géométries et Bandelettes

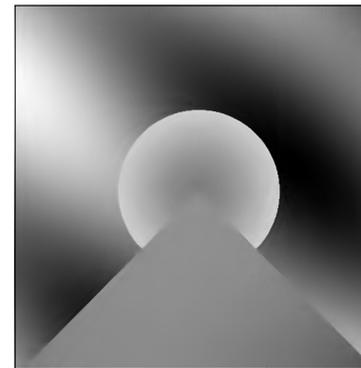
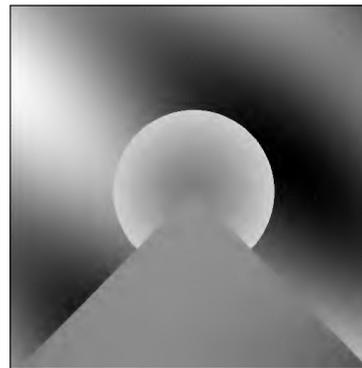
Bruitée



Estimation

Sans géométrie

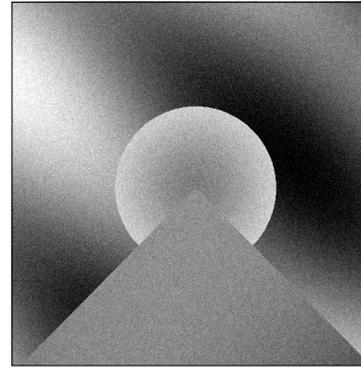
Avec géométrie



- Estimation dans un modèle de bruit blanc gaussien : $Y = f + W$.

Estimation, Géométries et Bandelettes

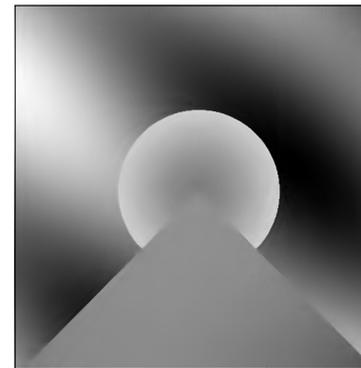
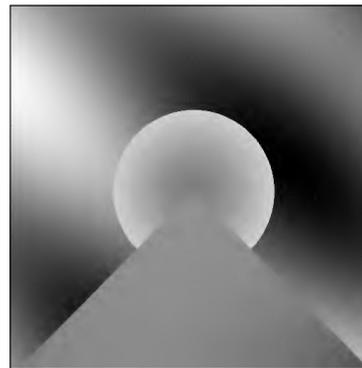
Bruitée



Estimation

Sans géométrie

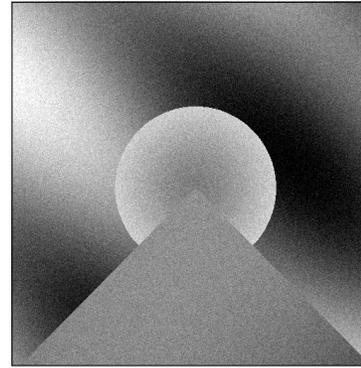
Avec géométrie



- Estimation dans un modèle de bruit blanc gaussien : $Y = f + W$.
- Estimation de f dans des bases : seuillage et sélection de modèles.

Estimation, Géométries et Bandelettes

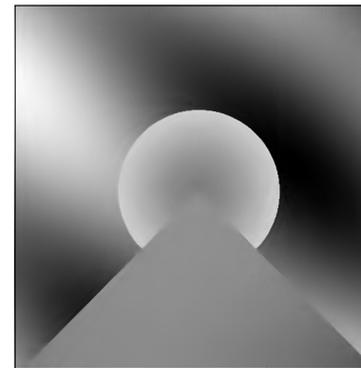
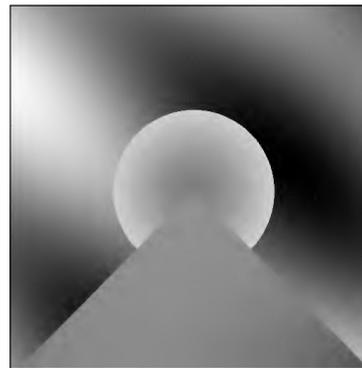
Bruitée



Estimation

Sans géométrie

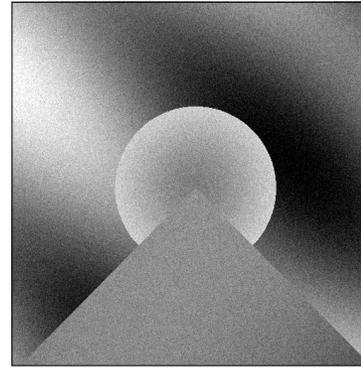
Avec géométrie



- Estimation dans un modèle de bruit blanc gaussien : $Y = f + W$.
- Estimation de f dans des bases : seuillage et sélection de modèles.
- Nécessité d'avoir une représentation creuse (approximation).

Estimation, Géométries et Bandelettes

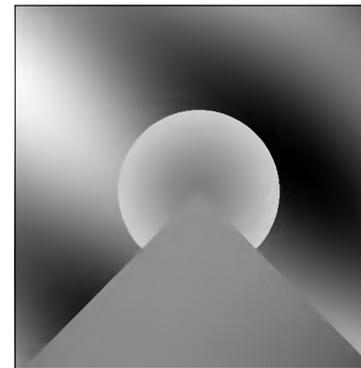
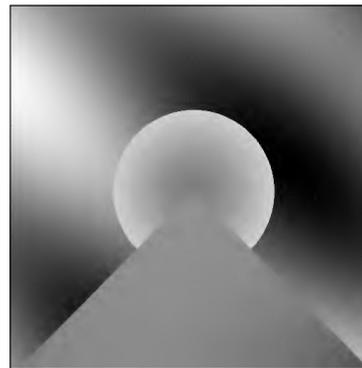
Bruitée



Estimation

Sans géométrie

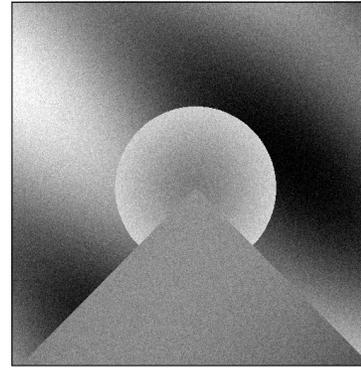
Avec géométrie



- Estimation dans un modèle de bruit blanc gaussien : $Y = f + W$.
- Estimation de f dans des bases : seuillage et sélection de modèles.
- Nécessité d'avoir une représentation creuse (approximation).
- Efficacité provient d'une forme de régularité.

Estimation, Géométries et Bandelettes

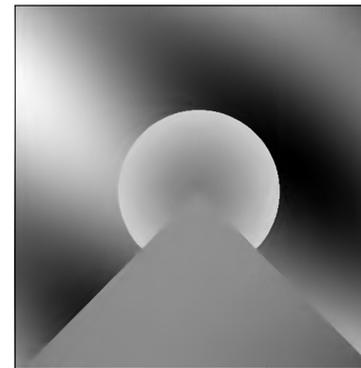
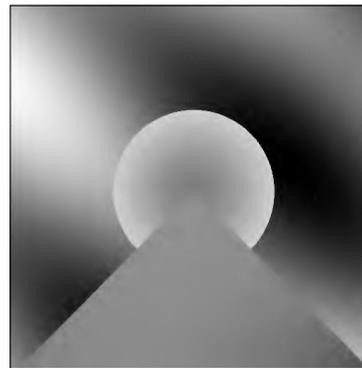
Bruitée



Estimation

Sans géométrie

Avec géométrie



- Estimation dans un modèle de bruit blanc gaussien : $Y = f + W$.
- Estimation de f dans des bases : seuillage et sélection de modèles.
- Nécessité d'avoir une représentation creuse (approximation).
- Efficacité provient d'une forme de régularité.
- Représentation géométrique des images en bandelettes.

Plan

Plan

- Estimation dans une base et approximation.

Plan

- Estimation dans une base et approximation.
- Ondelettes 1D et signaux.

Plan

- Estimation dans une base et approximation.
- Ondelettes 1D et signaux.
- Ondelettes 2D et images.

Plan

- Estimation dans une base et approximation.
- Ondelettes 1D et signaux.
- Ondelettes 2D et images.
- Représentation des images géométriques.

Plan

- Estimation dans une base et approximation.
- Ondelettes 1D et signaux.
- Ondelettes 2D et images.
- Représentation des images géométriques.
- Bandelettes pour les images géométriques.

Plan

- Estimation dans une base et approximation.
- Ondelettes 1D et signaux.
- Ondelettes 2D et images.
- Représentation des images géométriques.
- Bandelettes pour les images géométriques.
- Sélection de modèles et optimalité.

Plan

- Estimation dans une base et approximation.
- Ondelettes 1D et signaux.
- Ondelettes 2D et images.
- Représentation des images géométriques.
- Bandelettes pour les images géométriques.
- Sélection de modèles et optimalité.
- Extension des bandelettes pour les images naturelles.

Estimation oracle dans une base

Estimation oracle dans une base

- Décomposition de $Y = f + W$ dans une base orthonormée

$$Y = \sum_{b_n} \langle Y, b_n \rangle b_n = \sum_{b_n} (\langle f, b_n \rangle + \langle W, b_n \rangle) b_n \quad .$$

Estimation oracle dans une base

- Décomposition de $Y = f + W$ dans une base orthonormée

$$Y = \sum_{b_n} \langle Y, b_n \rangle b_n = \sum_{b_n} (\langle f, b_n \rangle + \langle W, b_n \rangle) b_n \quad .$$

- Estimateur F par sélection de coordonnées :

$$F = Y_\Gamma = \sum_{n \in \Gamma} \langle Y, b_n \rangle b_n \quad .$$

Estimation oracle dans une base

- Décomposition de $Y = f + W$ dans une base orthonormée

$$Y = \sum_{b_n} \langle Y, b_n \rangle b_n = \sum_{b_n} (\langle f, b_n \rangle + \langle W, b_n \rangle) b_n \quad .$$

- Estimateur F par sélection de coordonnées :

$$F = Y_\Gamma = \sum_{n \in \Gamma} \langle Y, b_n \rangle b_n \quad .$$

- Minimisation du risque quadratique :

$$E(\|f - F\|) = \sum_{n \notin \Gamma} |\langle f, b_n \rangle|^2 + \sum_{n \in \Gamma} \epsilon^2 \quad .$$

Estimation oracle dans une base

- Décomposition de $Y = f + W$ dans une base orthonormée

$$Y = \sum_{b_n} \langle Y, b_n \rangle b_n = \sum_{b_n} (\langle f, b_n \rangle + \langle W, b_n \rangle) b_n \quad .$$

- Estimateur F par sélection de coordonnées :

$$F = Y_\Gamma = \sum_{n \in \Gamma} \langle Y, b_n \rangle b_n \quad .$$

- Minimisation du risque quadratique :

$$E(\|f - F\|) = \sum_{n \notin \Gamma} |\langle f, b_n \rangle|^2 + \sum_{n \in \Gamma} \epsilon^2 \quad .$$

- Solution : $\Gamma_O = \{n, |\langle f, b_n \rangle| \geq \epsilon\}$ et $F_O = Y_{\Gamma_O}$.

Estimation oracle dans une base

- Décomposition de $Y = f + W$ dans une base orthonormée

$$Y = \sum_{b_n} \langle Y, b_n \rangle b_n = \sum_{b_n} (\langle f, b_n \rangle + \langle W, b_n \rangle) b_n \quad .$$

- Estimateur F par sélection de coordonnées :

$$F = Y_\Gamma = \sum_{n \in \Gamma} \langle Y, b_n \rangle b_n \quad .$$

- Minimisation du risque quadratique :

$$E(\|f - F\|) = \sum_{n \notin \Gamma} |\langle f, b_n \rangle|^2 + \sum_{n \in \Gamma} \epsilon^2 \quad .$$

- Solution : $\Gamma_O = \{n, |\langle f, b_n \rangle| \geq \epsilon\}$ et $F_O = Y_{\Gamma_O}$.

- Problème : demande la connaissance de f ! (Oracle)

Oracle, risque et approximation

Oracle, risque et approximation

- Risque quadratique de l'estimateur oracle F_O :

$$E(\|f - F_O\|^2) = \sum_{n \notin \Gamma_O} |\langle f, b_n \rangle|^2 + \sum_{n \in \Gamma_O} \epsilon^2$$

$$E(\|f - F_O\|^2) = \|f - f_{\Gamma_O}\|^2 + \epsilon^2 |\Gamma_O| \quad .$$

Oracle, risque et approximation

- Risque quadratique de l'estimateur oracle F_O :

$$E(\|f - F_O\|^2) = \sum_{n \notin \Gamma_O} |\langle f, b_n \rangle|^2 + \sum_{n \in \Gamma_O} \epsilon^2$$

$$E(\|f - F_O\|^2) = \|f - f_{\Gamma_O}\|^2 + \epsilon^2 |\Gamma_O| \quad .$$

- Compromis entre erreur d'approximation et nombre de termes.

Oracle, risque et approximation

- Risque quadratique de l'estimateur oracle F_O :

$$E(\|f - F_O\|^2) = \sum_{n \notin \Gamma_O} |\langle f, b_n \rangle|^2 + \sum_{n \in \Gamma_O} \epsilon^2$$

$$E(\|f - F_O\|^2) = \|f - f_{\Gamma_O}\|^2 + \epsilon^2 |\Gamma_O| \quad .$$

- Compromis entre erreur d'approximation et nombre de termes.
- Théorie de l'approximation :

$$\|f - f_M\|^2 \leq CM^{-\beta} \Leftrightarrow E(\|f - F_O\|^2) = \|f - f_{\Gamma_O}\|^2 + \epsilon^2 |\Gamma_O| \leq C\epsilon^{\frac{2\beta}{\beta+1}} \quad .$$

Oracle, risque et approximation

- Risque quadratique de l'estimateur oracle F_O :

$$E(\|f - F_O\|^2) = \sum_{n \notin \Gamma_O} |\langle f, b_n \rangle|^2 + \sum_{n \in \Gamma_O} \epsilon^2$$

$$E(\|f - F_O\|^2) = \|f - f_{\Gamma_O}\|^2 + \epsilon^2 |\Gamma_O| \quad .$$

- Compromis entre erreur d'approximation et nombre de termes.
- Théorie de l'approximation :

$$\|f - f_M\|^2 \leq CM^{-\beta} \Leftrightarrow E(\|f - F_O\|^2) = \|f - f_{\Gamma_O}\|^2 + \epsilon^2 |\Gamma_O| \leq C\epsilon^{\frac{2\beta}{\beta+1}} \quad .$$

- Optimisation de β pour f dans une classe Θ à travers le choix de la base utilisée.

Estimateur empirique

Estimateur empirique

- Risque oracle :

$$\|f - f_{\Gamma_O}\|^2 + \epsilon^2 |\Gamma_O| \quad .$$

Estimateur empirique

- Risque oracle :

$$\|f - f_{\Gamma_O}\|^2 + \epsilon^2 |\Gamma_O| \quad .$$

- Risque empirique :

$$\|Y - Y_{\Gamma}\|^2 + T(\epsilon)^2 |\Gamma| \quad .$$

Estimateur empirique

- Risque oracle :

$$\|f - f_{\Gamma_O}\|^2 + \epsilon^2 |\Gamma_O| \quad .$$

- Risque empirique :

$$\|Y - Y_{\Gamma}\|^2 + T(\epsilon)^2 |\Gamma| \quad .$$

- Minimisation : $\Gamma_E = \{n, |\langle Y, b_n \rangle| \geq T(\epsilon)\}$ (seuillage) et $F_E = Y_{\Gamma_E}$.

Estimateur empirique

- Risque oracle :

$$\|f - f_{\Gamma_O}\|^2 + \epsilon^2 |\Gamma_O| \quad .$$

- Risque empirique :

$$\|Y - Y_{\Gamma}\|^2 + T(\epsilon)^2 |\Gamma| \quad .$$

- Minimisation : $\Gamma_E = \{n, |\langle Y, b_n \rangle| \geq T(\epsilon)\}$ (seuillage) et $F_E = Y_{\Gamma_E}$.

- **Théorème** : Si $T(\epsilon) = \lambda \sqrt{\log N} \epsilon$, alors

$$\begin{aligned} E(\|f - F_E\|^2) &\leq C \log N E(\|f - F_O\|^2) \\ &\leq \min_{\gamma} \|f - f_{\Gamma}\|^2 + T(\epsilon)^2 |\Gamma| \quad \text{plus fin.} \end{aligned}$$

Estimateur empirique

- Risque oracle :

$$\|f - f_{\Gamma_O}\|^2 + \epsilon^2 |\Gamma_O| \quad .$$

- Risque empirique :

$$\|Y - Y_{\Gamma}\|^2 + T(\epsilon)^2 |\Gamma| \quad .$$

- Minimisation : $\Gamma_E = \{n, |\langle Y, b_n \rangle| \geq T(\epsilon)\}$ (seuillage) et $F_E = Y_{\Gamma_E}$.

- **Théorème** : Si $T(\epsilon) = \lambda \sqrt{\log N} \epsilon$, alors

$$\begin{aligned} E(\|f - F_E\|^2) &\leq C \log N E(\|f - F_O\|^2) \\ &\leq \min_{\gamma} \|f - f_{\Gamma}\| + T(\epsilon)^2 |\Gamma| \quad \text{plus fin.} \end{aligned}$$

- **Théorème (maxiset)** :

$$\min_{\gamma} \|f - f_{\Gamma}\| + T(\epsilon)^2 |\Gamma| \leq C (T(\epsilon))^{\frac{2\beta}{\beta+1}} \Leftrightarrow E(\|f - F_E\|^2) \leq C (T(\epsilon))^{\frac{2\beta}{\beta+1}} \quad .$$

Estimateur empirique

- Risque oracle :

$$\|f - f_{\Gamma_O}\|^2 + \epsilon^2 |\Gamma_O| \quad .$$

- Risque empirique :

$$\|Y - Y_{\Gamma}\|^2 + T(\epsilon)^2 |\Gamma| \quad .$$

- Minimisation : $\Gamma_E = \{n, |\langle Y, b_n \rangle| \geq T(\epsilon)\}$ (seuillage) et $F_E = Y_{\Gamma_E}$.

- **Théorème** : Si $T(\epsilon) = \lambda \sqrt{\log N} \epsilon$, alors

$$\begin{aligned} E(\|f - F_E\|^2) &\leq C \log N E(\|f - F_O\|^2) \\ &\leq \min_{\gamma} \|f - f_{\Gamma}\| + T(\epsilon)^2 |\Gamma| \quad \text{plus fin.} \end{aligned}$$

- **Théorème (maxiset)** :

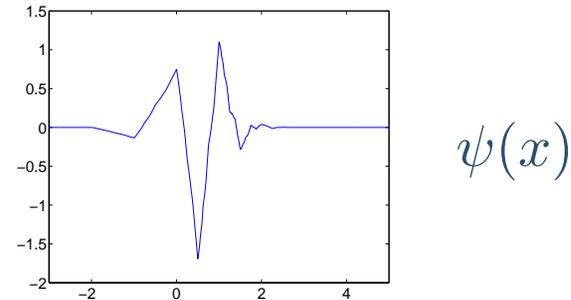
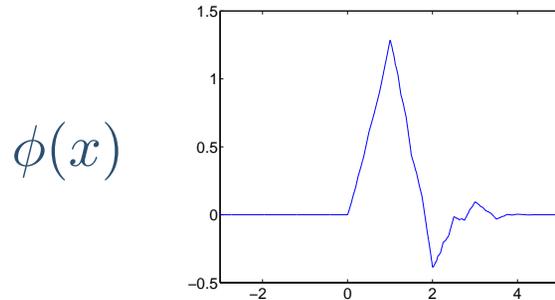
$$\min_{\gamma} \|f - f_{\Gamma}\| + T(\epsilon)^2 |\Gamma| \leq C (T(\epsilon))^{\frac{2\beta}{\beta+1}} \Leftrightarrow E(\|f - F_E\|^2) \leq C (T(\epsilon))^{\frac{2\beta}{\beta+1}} \quad .$$

- Théorie de l'approximation...

Base d'ondelettes 1D de $L^2[0, 1]$

Base d'ondelettes 1D de $L^2[0, 1]$

- Construite à partir d'une fonction d'échelle $\phi(x)$ et d'une ondelette mère $\psi(x)$



qui sont dilatées par 2^j et translatées de $2^j n$

$$\phi_{j,n}(x) = \frac{1}{\sqrt{2^j}} \phi\left(\frac{x - 2^j n}{2^j}\right) \quad , \quad \psi_{j,n}(x) = \frac{1}{\sqrt{2^j}} \psi\left(\frac{x - 2^j n}{2^j}\right) \quad .$$

Base d'ondelettes 1D de $L^2[0, 1]$

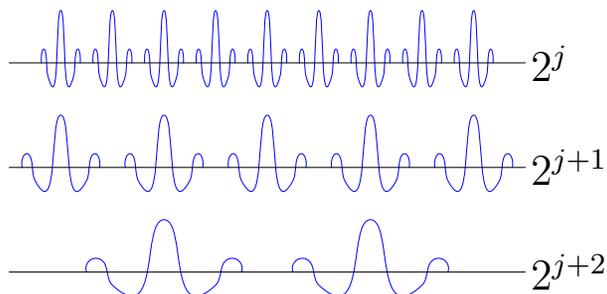
- Construite à partir d'une fonction d'échelle $\phi(x)$ et d'une ondelette mère $\psi(x)$



qui sont dilatées par 2^j et translatées de $2^j n$

$$\phi_{j,n}(x) = \frac{1}{\sqrt{2^j}} \phi\left(\frac{x - 2^j n}{2^j}\right) \quad , \quad \psi_{j,n}(x) = \frac{1}{\sqrt{2^j}} \psi\left(\frac{x - 2^j n}{2^j}\right) \quad .$$

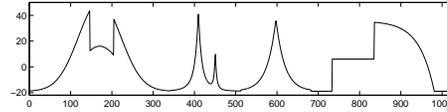
- $\mathbf{B} = \left\{ \psi_{j,n} \right\}_{j \in \mathbb{N}, 2^j n \in [0,1]}$ est une base orthonormale de $L^2[0, 1]$.



Approximation non linéaire en ondelettes

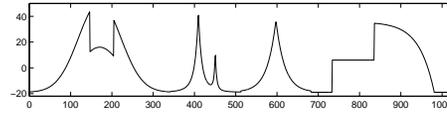
Approximation non linéaire en ondelettes

f

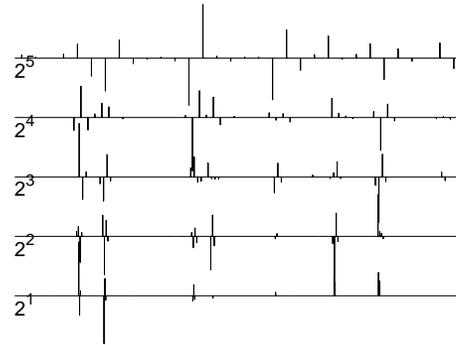


Approximation non linéaire en ondelettes

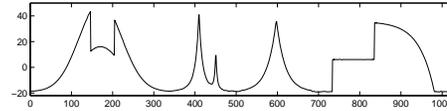
f



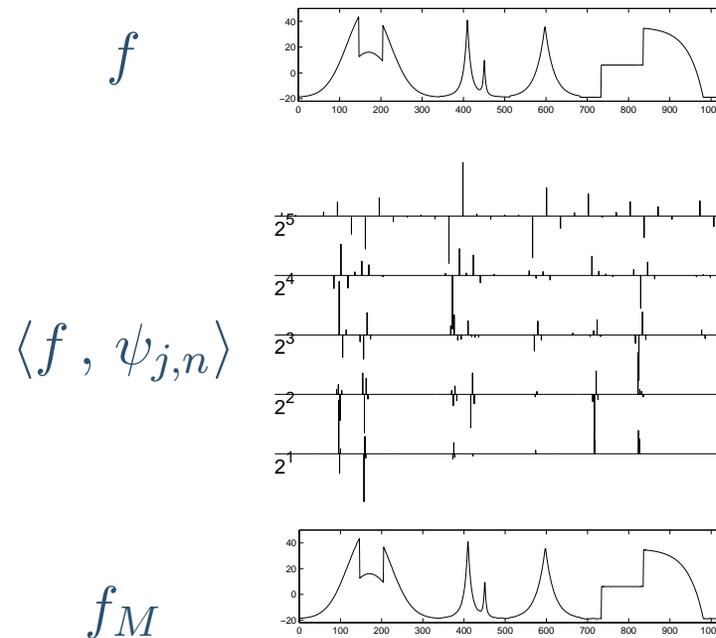
$\langle f, \psi_{j,n} \rangle$



f_M



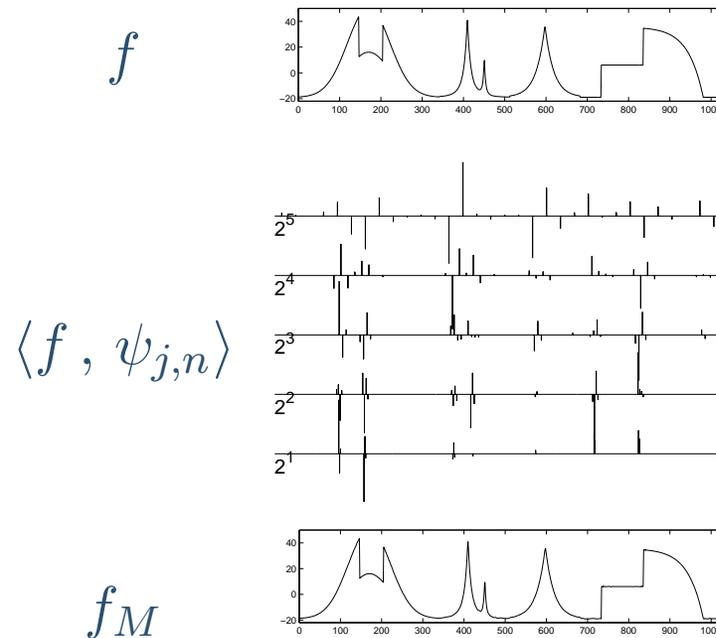
Approximation non linéaire en ondelettes



- Si f est C^α par morceaux et ψ a $p > \alpha$ moments nuls alors

$$\|f - f_M\|^2 \leq C M^{-2\alpha} .$$

Approximation non linéaire en ondelettes

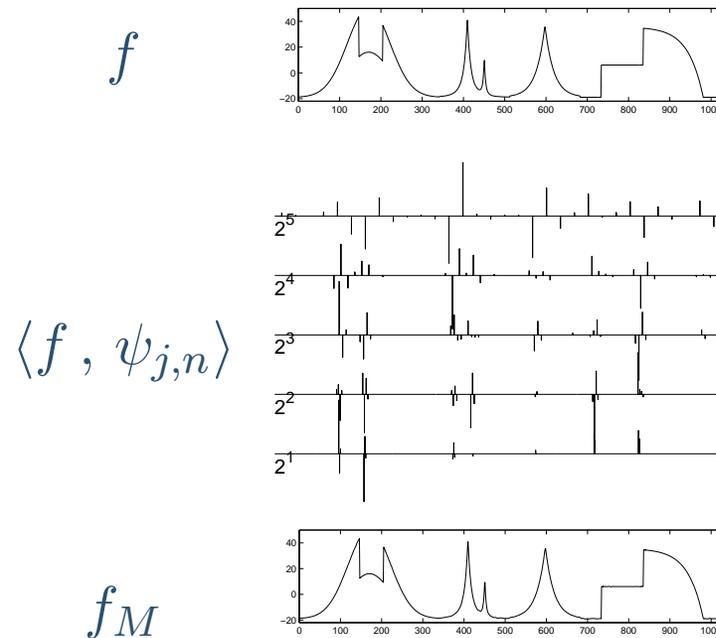


- Si f est C^α par morceaux et ψ a $p > \alpha$ moments nuls alors

$$\|f - f_M\|^2 \leq C M^{-2\alpha} .$$

- Risque de l'estimateur par seuillage : $E(\|f - F_E\|^2) \leq (\log N) \epsilon^{\frac{2\alpha}{\alpha+1/2}}$
(quasi optimal).

Approximation non linéaire en ondelettes



- Si f est C^α par morceaux et ψ a $p > \alpha$ moments nuls alors

$$\|f - f_M\|^2 \leq C M^{-2\alpha} .$$

- Risque de l'estimateur par seuillage : $E(\|f - F_E\|^2) \leq (\log N) \epsilon^{\frac{2\alpha}{\alpha+1/2}}$ (quasi optimal).
- Espace (maxiset) associé à la vitesse $T^{\frac{2\alpha}{\alpha+1}}$: version faible de $B_{2,\infty}^\alpha$.

Base d'ondelettes 2D séparables

Base d'ondelettes 2D séparables

- La famille

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi_{j,n_1}(x_1) \psi_{j,n_2}(x_2) \quad , \quad \psi_{j,n_1}(x_1) \phi_{j,n_2}(x_2) \\ \psi_{j,n_1}(x_1) \psi_{j,n_2}(x_2) \end{array} \right\}_{(j,n_1,n_2) \in \mathbb{Z}^3}$$

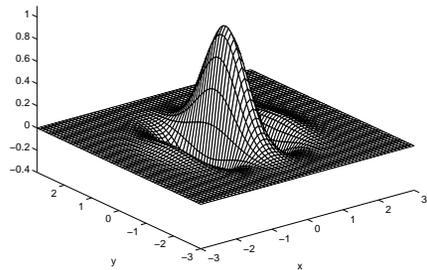
est une base orthonormée de $L^2[0, 1]^2$.

Base d'ondelettes 2D séparables

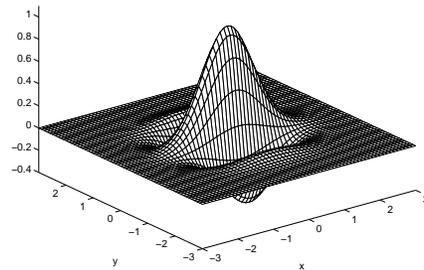
● La famille

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi_{j,n_1}(x_1) \psi_{j,n_2}(x_2) \quad , \quad \psi_{j,n_1}(x_1) \phi_{j,n_2}(x_2) \\ \psi_{j,n_1}(x_1) \psi_{j,n_2}(x_2) \end{array} \right\}_{(j,n_1,n_2) \in \mathbb{Z}^3}$$

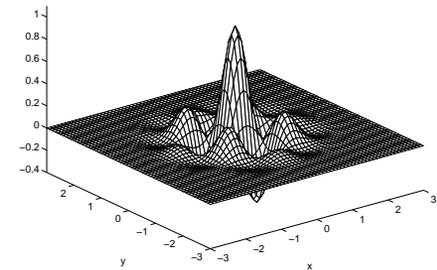
est une base orthonormée de $L^2[0, 1]^2$.



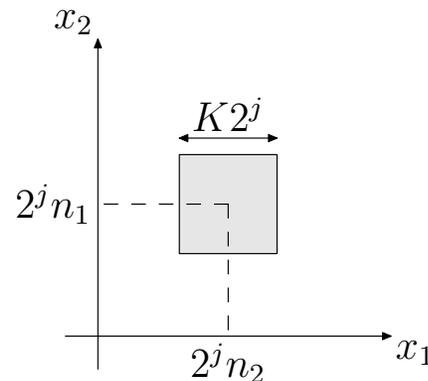
$$\phi_{j,n_1}(x_1) \psi_{j,n_2}(x_2)$$



$$\psi_{j,n_1}(x_1) \phi_{j,n_2}(x_2)$$



$$\psi_{j,n_1}(x_1) \psi_{j,n_2}(x_2)$$



Support
des ondelettes
isotropes

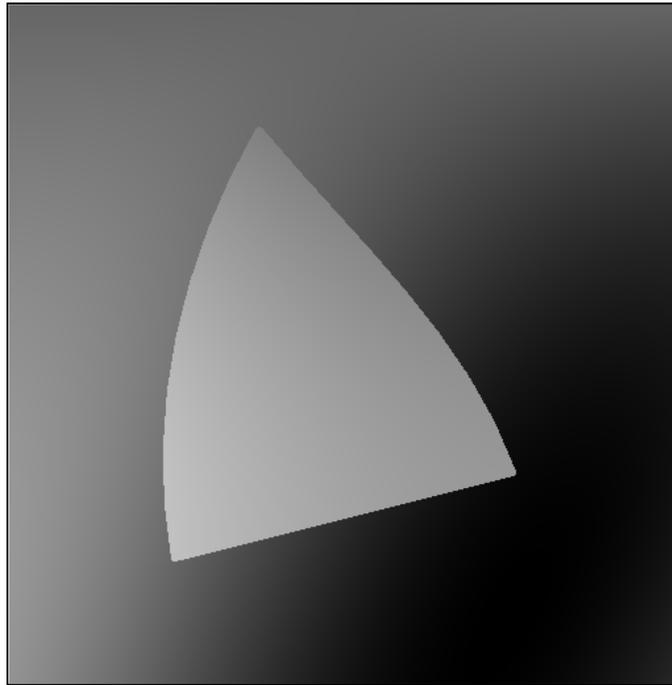
Seuillage en ondelettes 2D

Seuillage en ondelettes 2D

- Espace (maxiset) associé à la vitesse $T^{\frac{2\beta}{\beta+1}}$: version faible de $B_{2,\infty}^\beta$.

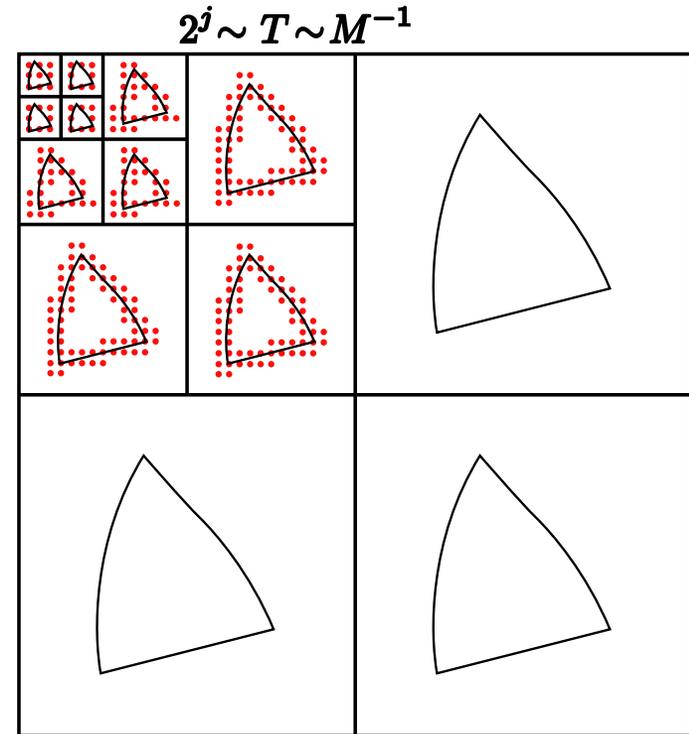
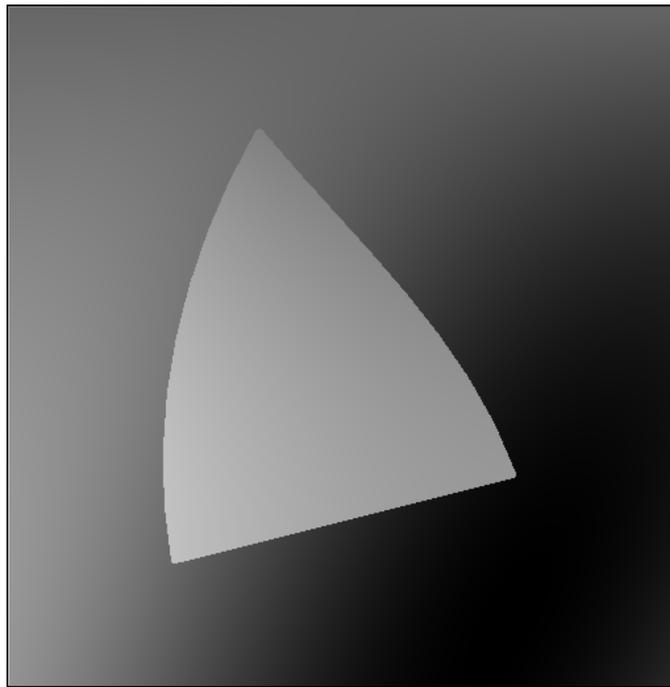
Seuillage en ondelettes 2D

- Espace (maxiset) associé à la vitesse $T^{\frac{2\beta}{\beta+1}}$: version faible de $B_{2,\infty}^\beta$.
- Pour $f \in C^\alpha$ en dehors de contours C^α : $\beta = 1$ au lieu de $\beta = \alpha$!



Seuillage en ondelettes 2D

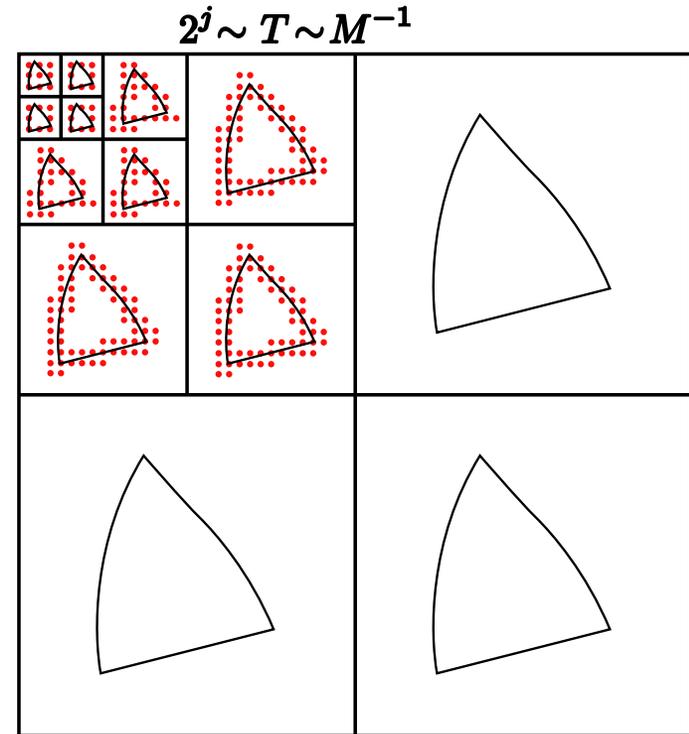
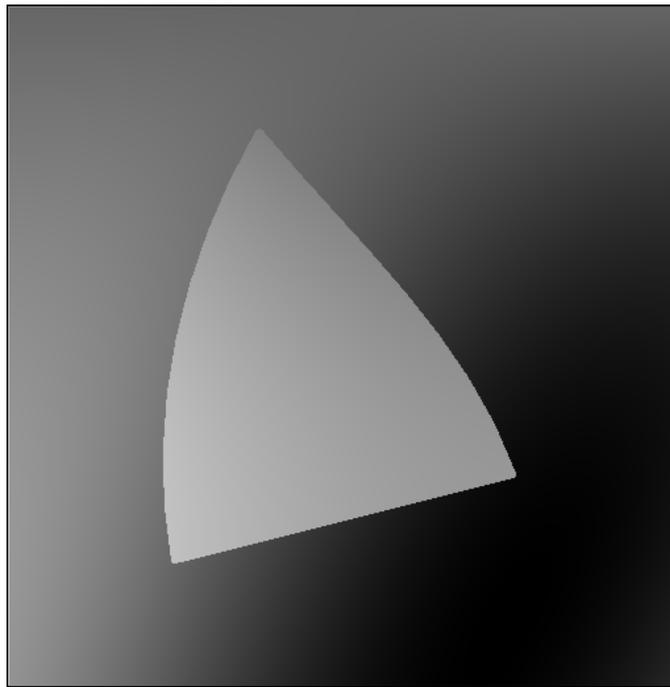
- Espace (maxiset) associé à la vitesse $T^{\frac{2\beta}{\beta+1}}$: version faible de $B_{2,\infty}^\beta$.
- Pour $f \in C^\alpha$ en dehors de contours C^α : $\beta = 1$ au lieu de $\beta = \alpha$!



- Avec M ondelettes : $\|f - f_M\|^2 \leq C M^{-1}$.

Seuillage en ondelettes 2D

- Espace (maxiset) associé à la vitesse $T^{\frac{2\beta}{\beta+1}}$: version faible de $B_{2,\infty}^\beta$.
- Pour $f \in C^\alpha$ en dehors de contours C^α : $\beta = 1$ au lieu de $\beta = \alpha$!

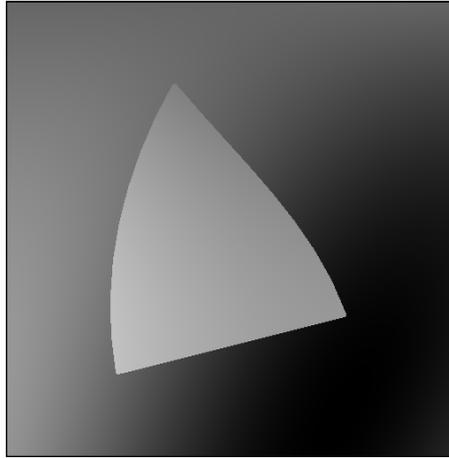


- Avec M ondelettes : $\|f - f_M\|^2 \leq C M^{-1}$.
- Besoin de $\|f - f_M\|^2 \leq C M^{-\alpha}$ pour le risque théorique optimal (minimax).

Éléments géométriques pour les contours

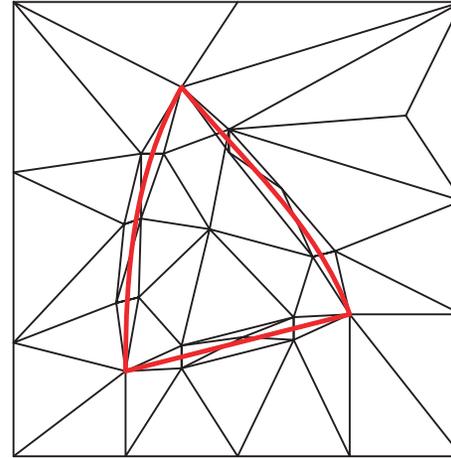
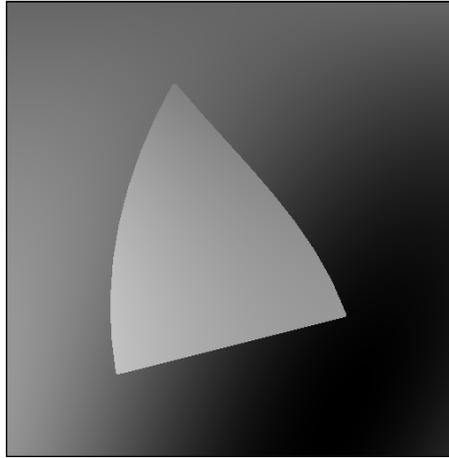
Éléments géométriques pour les contours

- Approximation de f qui est C^α en dehors de contours C^α :

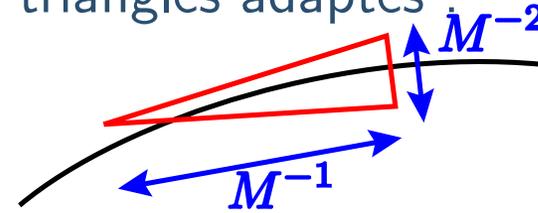


Éléments géométriques pour les contours

- Approximation de f qui est C^α en dehors de contours C^α :

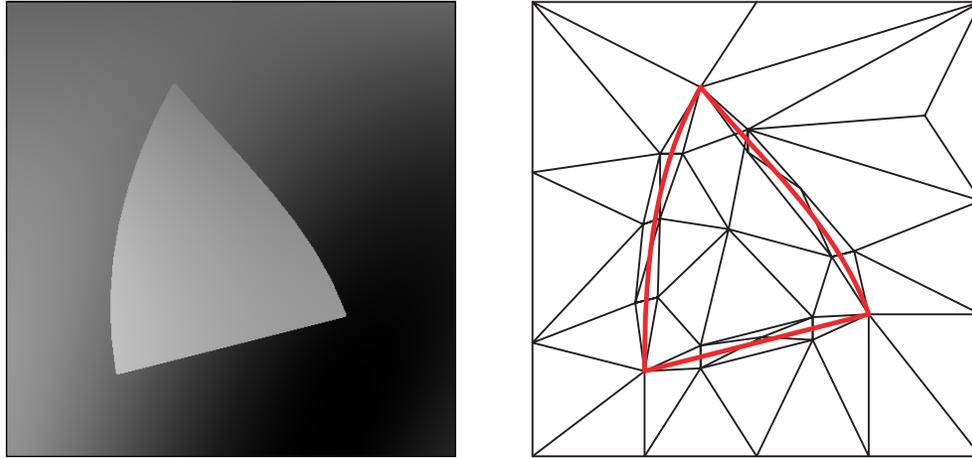


- Approximation linéaire par morceau sur M triangles adaptés :
si $\alpha \geq 2$ alors $\|f - f_M\|^2 \leq C M^{-2}$.

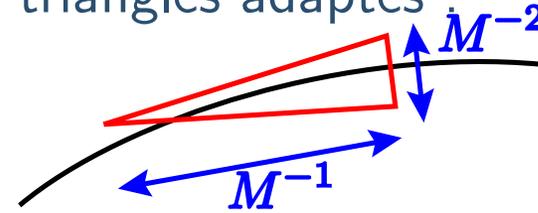


Éléments géométriques pour les contours

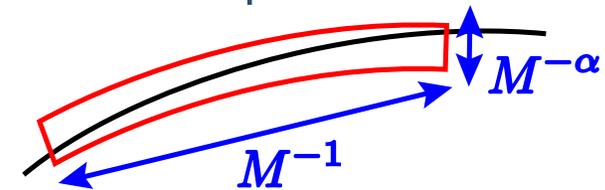
- Approximation de f qui est C^α en dehors de contours C^α :



- Approximation linéaire par morceau sur M triangles adaptés :
si $\alpha \geq 2$ alors $\|f - f_M\|^2 \leq C M^{-2}$.

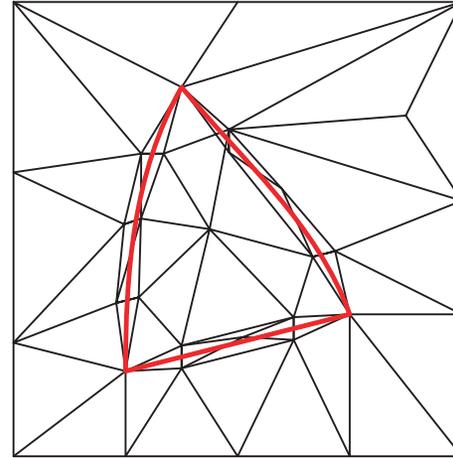
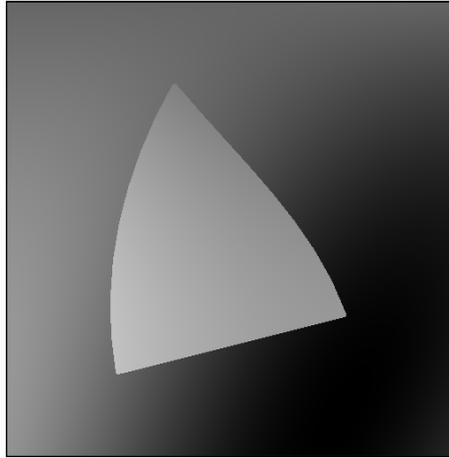


- Approximation d'ordre élevé avec M "éléments" adaptés :
 $\|f - f_M\|^2 \leq C M^{-\alpha}$.

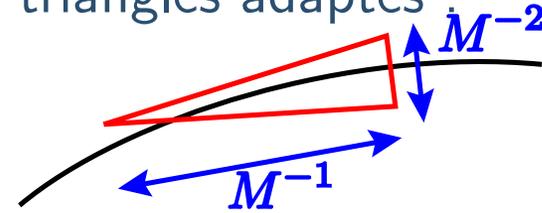


Éléments géométriques pour les contours

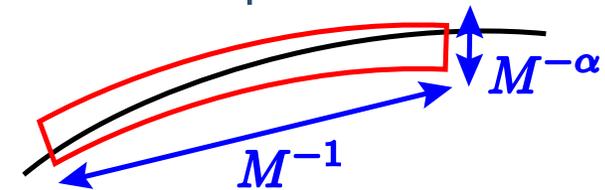
- Approximation de f qui est C^α en dehors de contours C^α :



- Approximation linéaire par morceau sur M triangles adaptés :
si $\alpha \geq 2$ alors $\|f - f_M\|^2 \leq C M^{-2}$.



- Approximation d'ordre élevé avec M "éléments" adaptés :
 $\|f - f_M\|^2 \leq C M^{-\alpha}$.



- Pas de bases et optimisation difficile.

Curvelets

Curvelets

- Les curvelets définissent un “tight frame” de $L^2[0, 1]^2$ avec des éléments allongés et orientés (*Candes, Donoho*) : $\{c_j(R_\theta x - \eta)\}_{j,\theta,\eta}$



Curvelets

- Les curvelets définissent un “tight frame” de $L^2[0, 1]^2$ avec des éléments allongés et orientés (*Candes, Donoho*) : $\{c_j(R_\theta x - \eta)\}_{j,\theta,\eta}$



- Si f est $C^\alpha - C^\alpha$ alors avec M curvelets :

$$\|f - f_M\|^2 \leq C (\log M)^3 M^{-2} \quad \text{si } \alpha \geq 2.$$

Curvelets

- Les curvelets définissent un “tight frame” de $L^2[0, 1]^2$ avec des éléments allongés et orientés (*Candes, Donoho*) : $\{c_j(R_\theta x - \eta)\}_{j,\theta,\eta}$



- Si f est $C^\alpha - C^\alpha$ alors avec M curvelets :

$$\|f - f_M\|^2 \leq C (\log M)^3 M^{-2} \quad \text{si } \alpha \geq 2.$$

- Quasi optimal pour $\alpha = 2$.

Curvelets

- Les curvelets définissent un “tight frame” de $L^2[0, 1]^2$ avec des éléments allongés et orientés (Candes, Donoho) : $\{c_j(R_\theta x - \eta)\}_{j,\theta,\eta}$



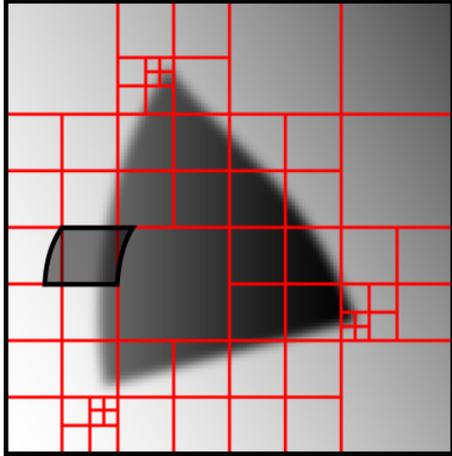
- Si f est $C^\alpha - C^\alpha$ alors avec M curvelets :

$$\|f - f_M\|^2 \leq C (\log M)^3 M^{-2} \quad \text{si } \alpha \geq 2.$$

- Quasi optimal pour $\alpha = 2$.
- Discrétisation complexe et difficultés pour obtenir des bases orthogonales ou des bases de Riesz.

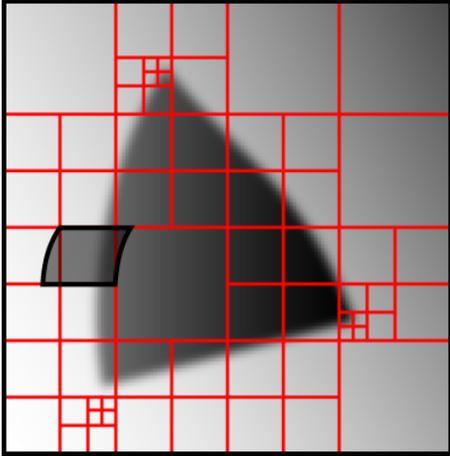
Bandelettes

Bandelettes



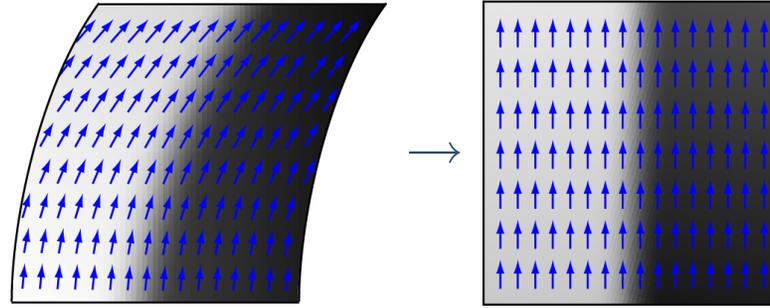
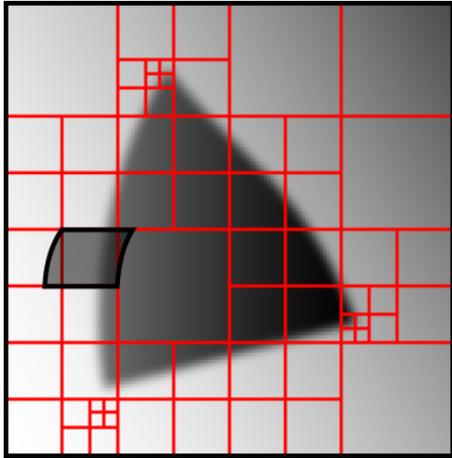
- Image $C^\alpha - C^\alpha$ simple

Bandelettes



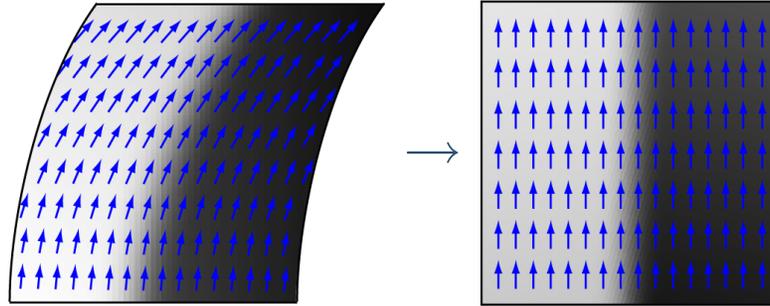
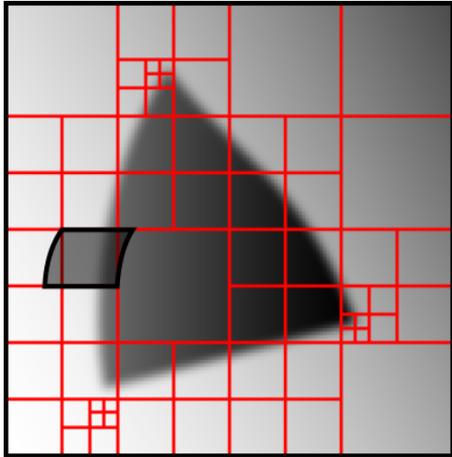
- Image $C^\alpha - C^\alpha$ simple par morceaux.

Bandelettes



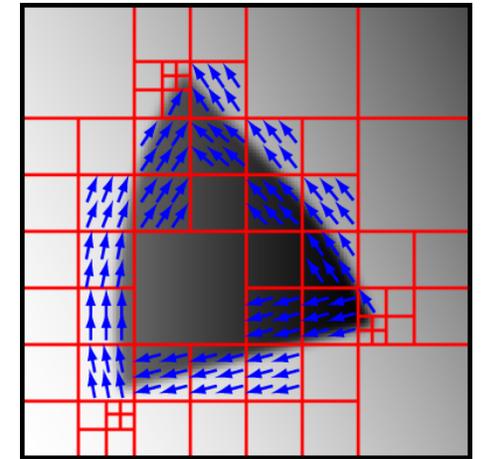
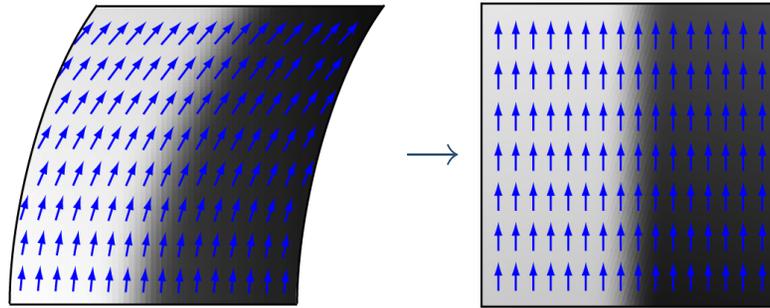
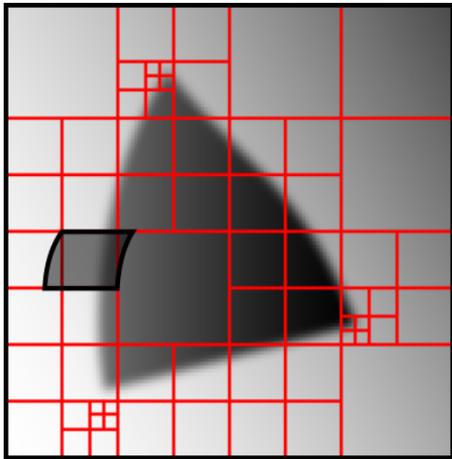
- Image $C^\alpha - C^\alpha$ simple par morceaux.
- Déformation locale \implies singularité verticale/horizontale .

Bandelettes



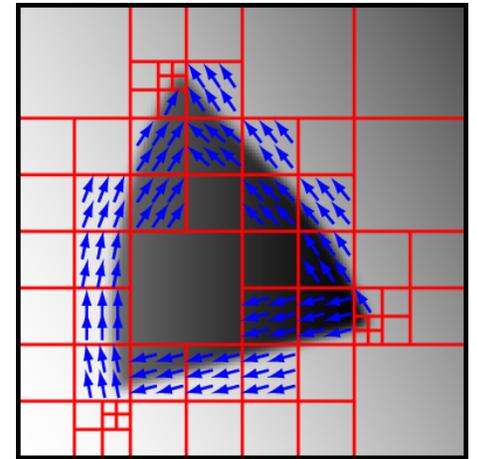
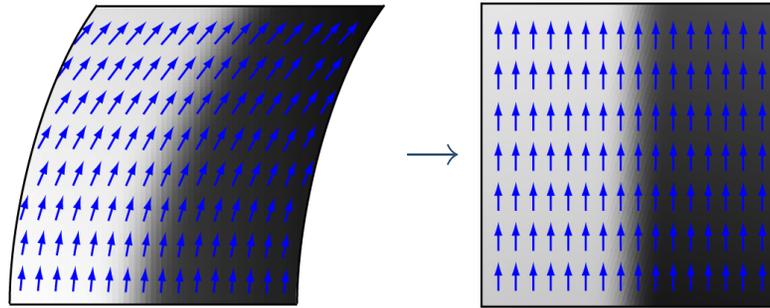
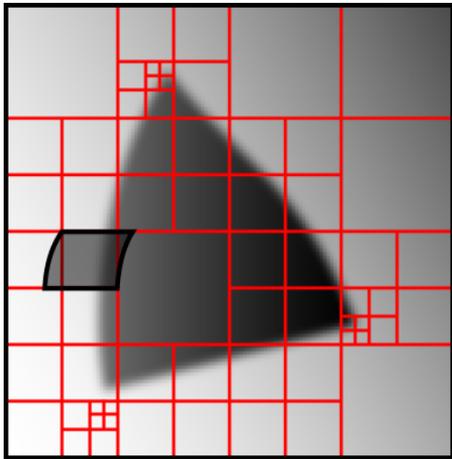
- Image $C^\alpha - C^\alpha$ simple par morceaux.
- Déformation locale \implies singularité verticale/horizontale .
- Bandelettes locales : préimage d'une base adaptée.

Bandelettes



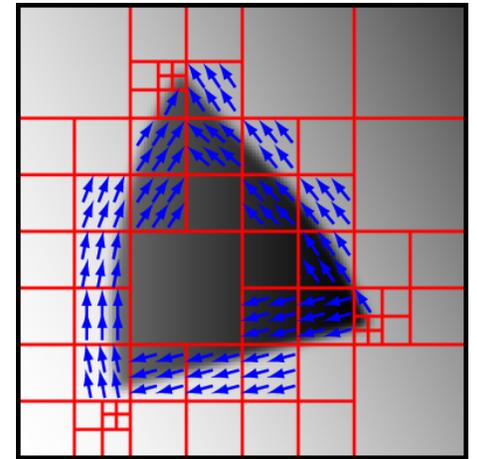
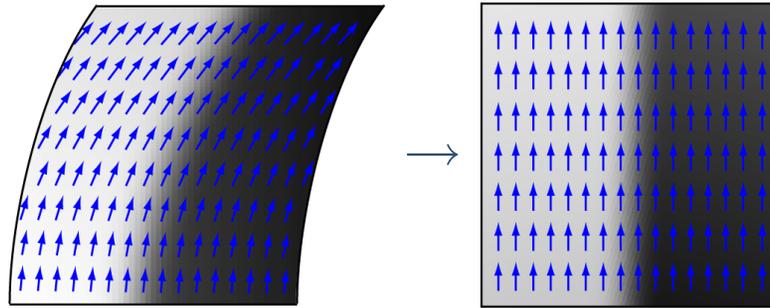
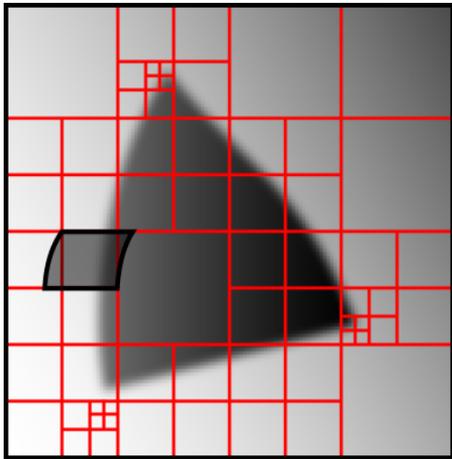
- Image $C^\alpha - C^\alpha$ simple par morceaux.
- Déformation locale \implies singularité verticale/horizontale .
- Bandelettes locales : préimage d'une base adaptée.
- Base de bandelettes définie par :
 - une segmentation dyadique et
 - une géométrie dans chaque carré.

Bandelettes



- Image $C^\alpha - C^\alpha$ simple par morceaux.
- Déformation locale \implies singularité verticale/horizontale .
- Bandelettes locales : préimage d'une base adaptée.
- Base de bandelettes définie par :
 - une segmentation dyadique et
 - une géométrie dans chaque carré.
- **Théorème** : Si f est $C^\alpha - C^\alpha$, alors, dans la meilleure base,
 $\|f - f_M\|^2 \leq C(\log M)M^{-\alpha}$.

Bandelettes



- Image $C^\alpha - C^\alpha$ simple par morceaux.
- Déformation locale \implies singularité verticale/horizontale .
- Bandelettes locales : préimage d'une base adaptée.
- Base de bandelettes définie par :
 - une segmentation dyadique et
 - une géométrie dans chaque carré.
- **Théorème** : Si f est $C^\alpha - C^\alpha$, alors, dans la meilleure base,
 $\|f - f_M\|^2 \leq C(\log M)M^{-\alpha}$.
- Famille de bases avec un algorithme de recherche de meilleure base.

Seuillage et sélection de modèles

Seuillage et sélection de modèles

- Seuillage : minimisation de $\|Y - Y_{\Gamma}\|^2 + T(\epsilon)^2 |\Gamma|$.

Seuillage et sélection de modèles

- Seuillage : minimisation de $\|Y - Y_{\Gamma}\|^2 + T(\epsilon)^2|\Gamma|$.
- Sélection de modèles : minimisation de $\|Y - P_{\mathcal{M}}Y\|^2 + T(\epsilon)^2\dim(\mathcal{M})$ avec \mathcal{M} qui parcourt un ensemble de sous espaces engendrés par une famille finie de vecteurs.

Seuillage et sélection de modèles

- Seuillage : minimisation de $\|Y - Y_\Gamma\|^2 + T(\epsilon)^2|\Gamma|$.
- Sélection de modèles : minimisation de $\|Y - P_{\mathcal{M}}Y\|^2 + T(\epsilon)^2\dim(\mathcal{M})$ avec \mathcal{M} qui parcourt un ensemble de sous espaces engendrés par une famille finie de vecteurs.
- **Théorème** : Si la taille de la famille de vecteurs est au plus polynomiale en N et si $T(\epsilon) = \lambda\sqrt{\log N}\epsilon$, alors

$$E(\|f - F_E\|^2) \leq C \log N E(\|f - F_O\|^2) \quad .$$

Seuillage et sélection de modèles

- Seuillage : minimisation de $\|Y - Y_\Gamma\|^2 + T(\epsilon)^2|\Gamma|$.
- Sélection de modèles : minimisation de $\|Y - P_{\mathcal{M}}Y\|^2 + T(\epsilon)^2\dim(\mathcal{M})$ avec \mathcal{M} qui parcourt un ensemble de sous espaces engendrés par une famille finie de vecteurs.
- **Théorème** : Si la taille de la famille de vecteurs est au plus polynomiale en N et si $T(\epsilon) = \lambda\sqrt{\log N}\epsilon$, alors

$$E(\|f - F_E\|^2) \leq C \log N E(\|f - F_O\|^2) \quad .$$

- **Théorème (maxiset)** :

$$\min_{\mathcal{M}} \|Y - P_{\mathcal{M}}Y\|^2 + T(\epsilon)^2\dim(\mathcal{M}) \leq C (T(\epsilon))^{\frac{2\beta}{\beta+1}}$$

$$\Leftrightarrow E(\|f - F_E\|^2) \leq C (T(\epsilon))^{\frac{2\beta}{\beta+1}} \quad .$$

Seuillage et sélection de modèles

- Seuillage : minimisation de $\|Y - Y_\Gamma\|^2 + T(\epsilon)^2|\Gamma|$.
- Sélection de modèles : minimisation de $\|Y - P_{\mathcal{M}}Y\|^2 + T(\epsilon)^2\dim(\mathcal{M})$ avec \mathcal{M} qui parcourt un ensemble de sous espaces engendrés par une famille finie de vecteurs.
- **Théorème** : Si la taille de la famille de vecteurs est au plus polynomiale en N et si $T(\epsilon) = \lambda\sqrt{\log N}\epsilon$, alors

$$E(\|f - F_E\|^2) \leq C \log N E(\|f - F_O\|^2) \quad .$$

- **Théorème (maxiset)** :

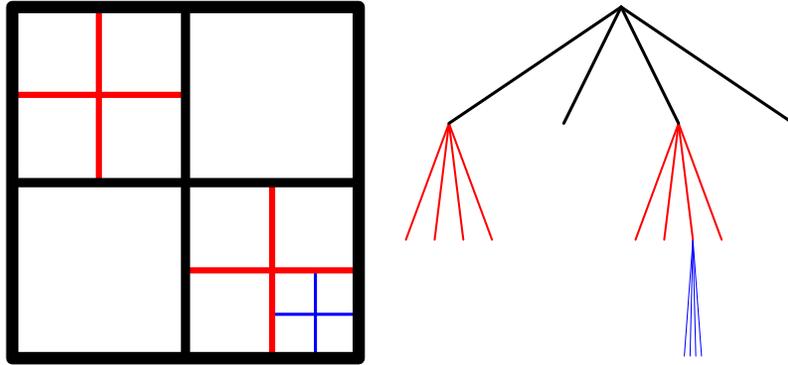
$$\min_{\mathcal{M}} \|Y - P_{\mathcal{M}}Y\|^2 + T(\epsilon)^2\dim(\mathcal{M}) \leq C (T(\epsilon))^{\frac{2\beta}{\beta+1}}$$

$$\Leftrightarrow E(\|f - F_E\|^2) \leq C (T(\epsilon))^{\frac{2\beta}{\beta+1}} \quad .$$

- Même cadre que pour le seuillage !

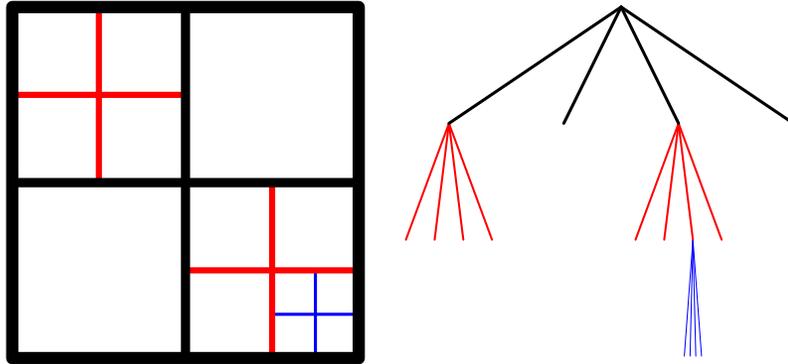
Estimation géométrique

Estimation géométrique



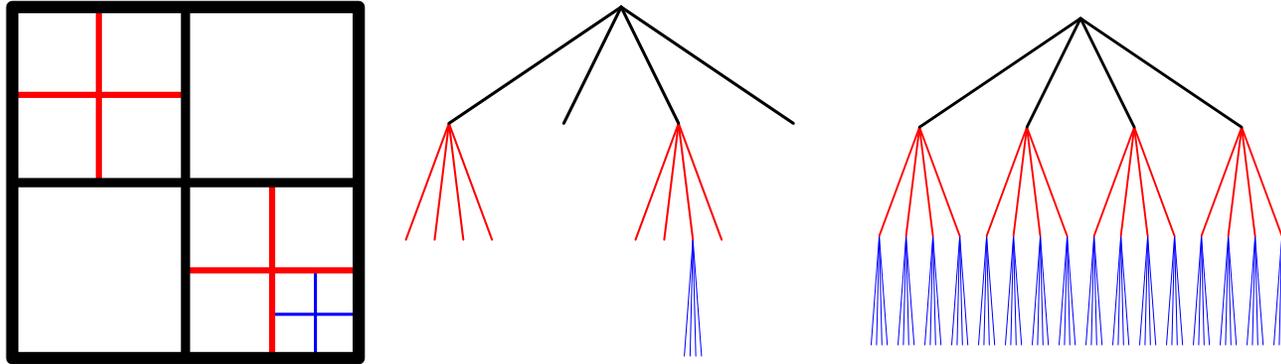
- Sélection de bandelettes : minimisation de $\|Y - P_{\mathcal{M}}Y\|^2 + T(\epsilon)^2 \dim(\mathcal{M})$ avec \mathcal{M} qui parcourt les sous-espaces d'une famille de bases de bandelettes.

Estimation géométrique



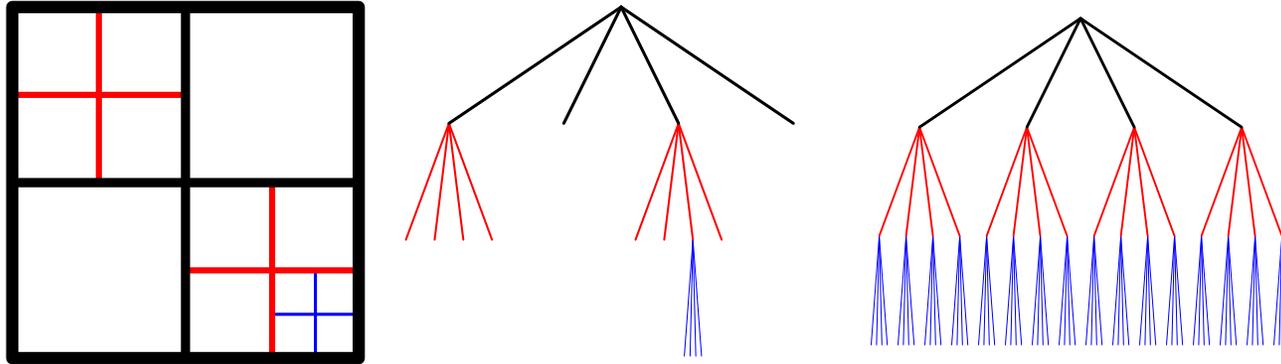
- Sélection de bandelettes : minimisation de $\|Y - P_{\mathcal{M}}Y\|^2 + T(\epsilon)^2 \dim(\mathcal{M})$ avec \mathcal{M} qui parcourt les sous-espaces d'une famille de bases de bandelettes.
- Minimisation à 2 étages :
 - à base fixée, seuillage à $T(\epsilon)$ (facile),
 - recherche de meilleure base (difficile).

Estimation géométrique



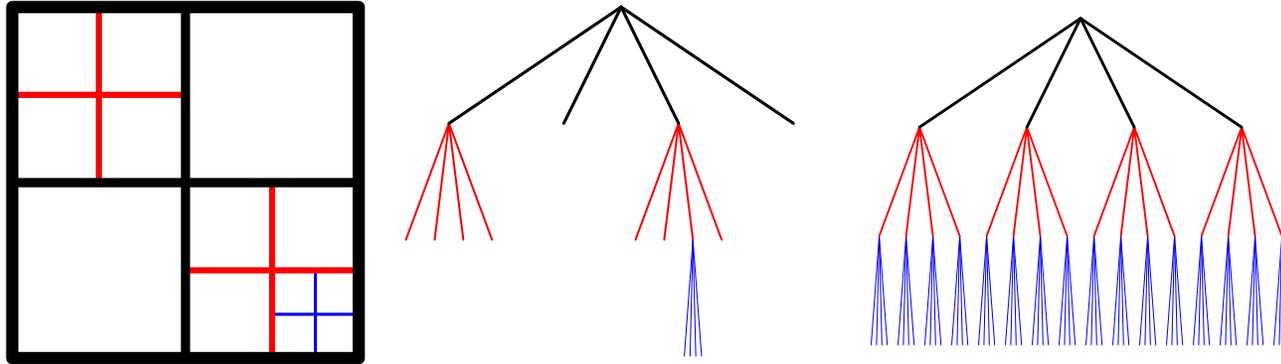
- Sélection de bandelettes : minimisation de $\|Y - P_{\mathcal{M}}Y\|^2 + T(\epsilon)^2 \dim(\mathcal{M})$ avec \mathcal{M} qui parcourt les sous-espaces d'une famille de bases de bandelettes.
- Minimisation à 2 étages :
 - à base fixée, seuillage à $T(\epsilon)$ (facile),
 - recherche de meilleure base (difficile).
- Structure hiérarchique de la partition et additivité de la fonction à minimiser : utilisation l'algorithme de meilleure base de Wickerhauser (CART).

Estimation géométrique



- Sélection de bandelettes : minimisation de $\|Y - P_{\mathcal{M}}Y\|^2 + T(\epsilon)^2 \dim(\mathcal{M})$ avec \mathcal{M} qui parcourt les sous-espaces d'une famille de bases de bandelettes.
- Minimisation à 2 étages :
 - à base fixée, seuillage à $T(\epsilon)$ (facile),
 - recherche de meilleure base (difficile).
- Structure hiérarchique de la partition et additivité de la fonction à minimiser : utilisation l'algorithme de meilleure base de Wickerhauser (CART).
- Exploration exhaustive des géométries dans chaque carré.

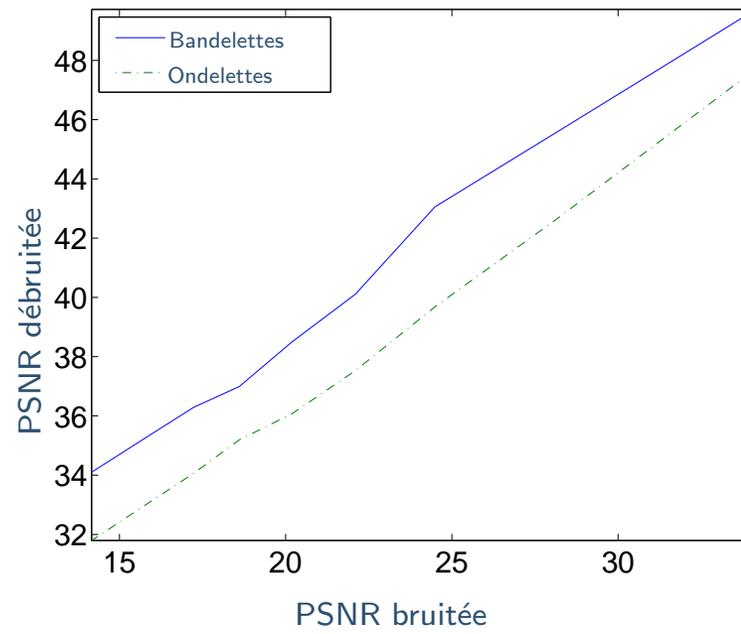
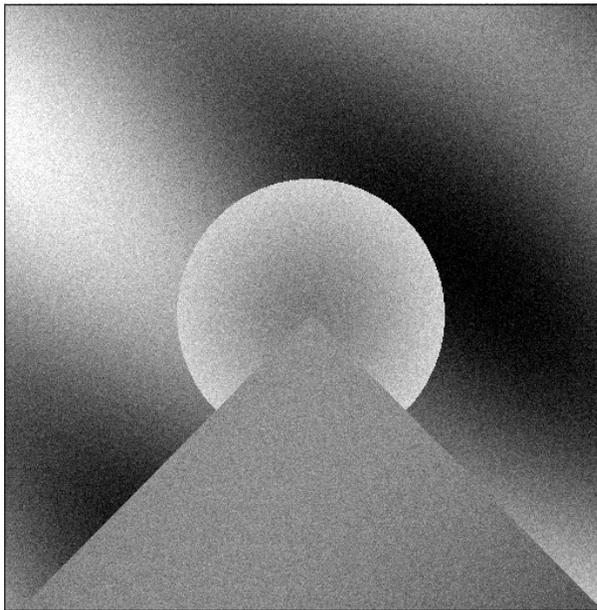
Estimation géométrique



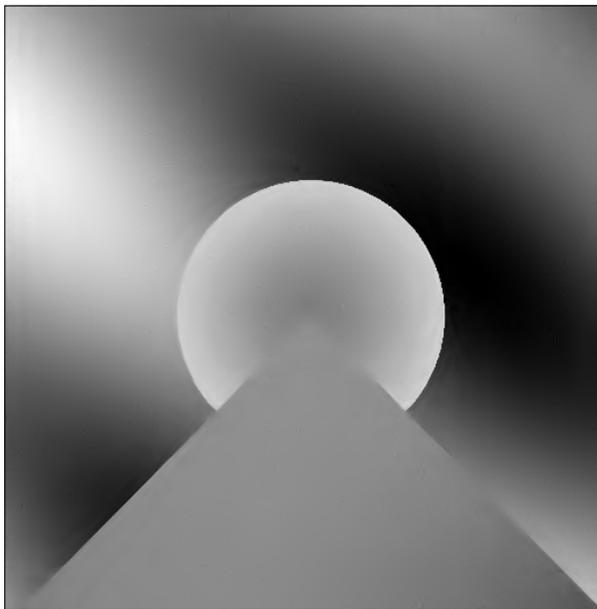
- Sélection de bandelettes : minimisation de $\|Y - P_{\mathcal{M}}Y\|^2 + T(\epsilon)^2 \dim(\mathcal{M})$ avec \mathcal{M} qui parcourt les sous-espaces d'une famille de bases de bandelettes.
- Minimisation à 2 étages :
 - à base fixée, seuillage à $T(\epsilon)$ (facile),
 - recherche de meilleure base (difficile).
- Structure hiérarchique de la partition et additivité de la fonction à minimiser : utilisation l'algorithme de meilleure base de Wickerhauser (CART).
- Exploration exhaustive des géométries dans chaque carré.
- Algorithme polynomial permettant d'atteindre le risque quasi optimal :

$$E(\|f - F_E\|) \leq CT(\epsilon)^{\frac{2\alpha}{\alpha+1}} .$$

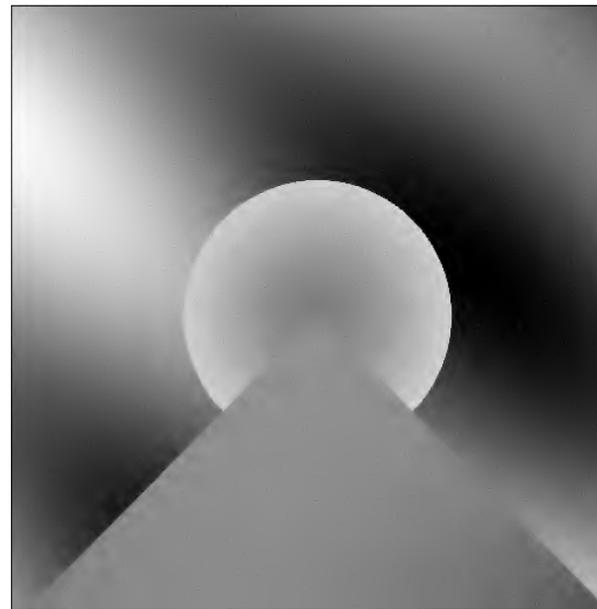
Bruitée (20,19 dB)



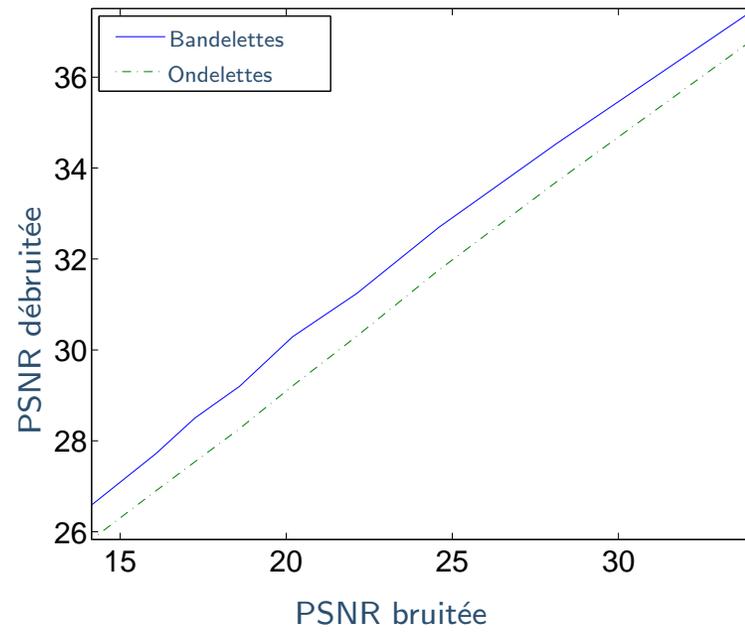
Bandelettes (30,29 dB)



Ondelettes (28,21 dB)



Bruitée (20,19 dB)



Bandelettes (30,29 dB)



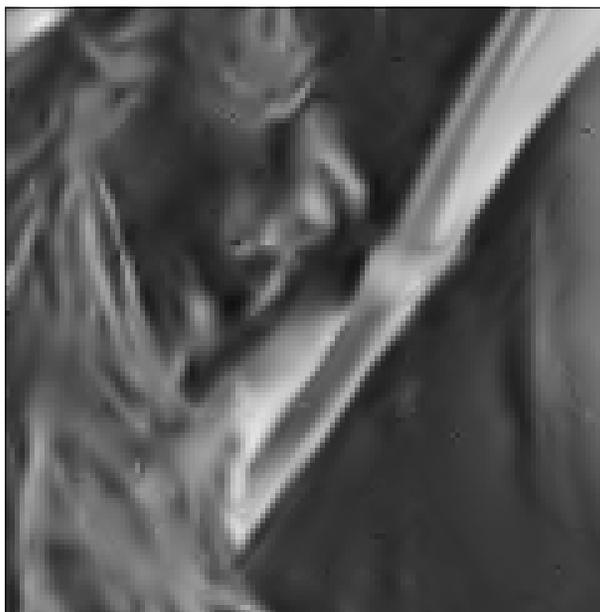
Ondelettes (28,21 dB)



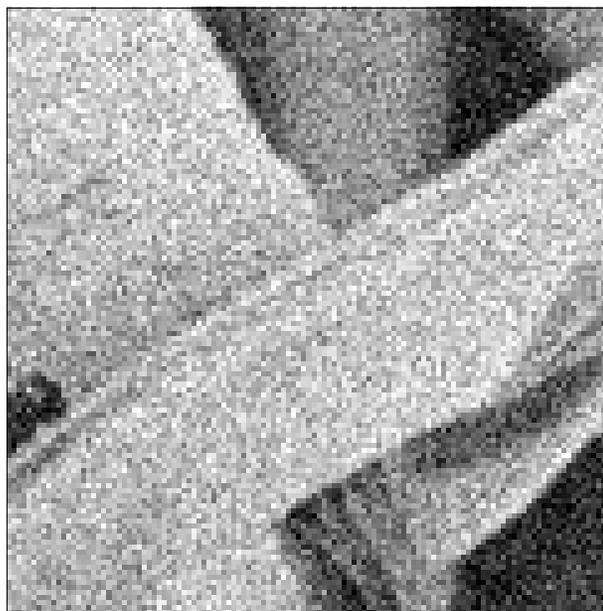
Bruitée



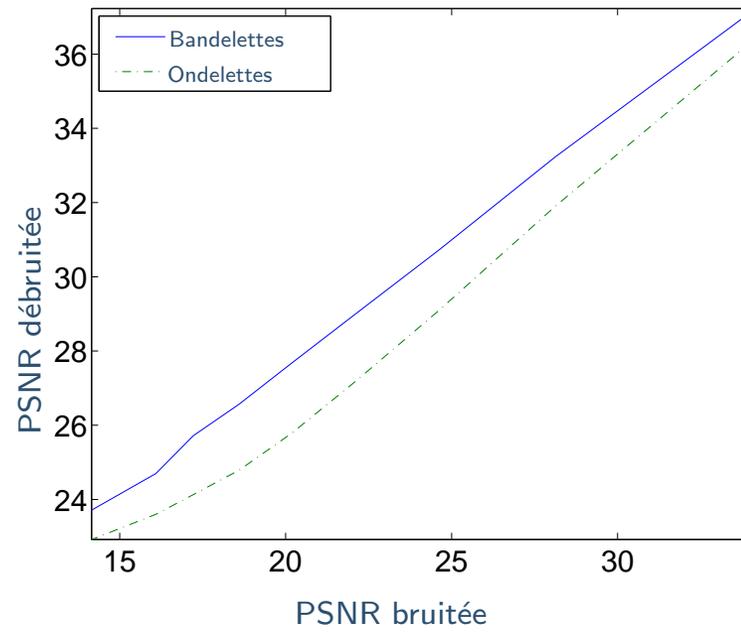
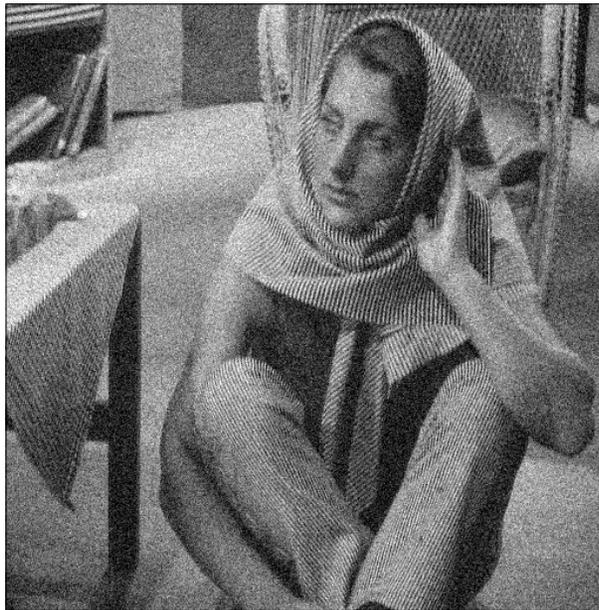
Bandelettes



Ondelettes



Bruitée (20,19 dB)



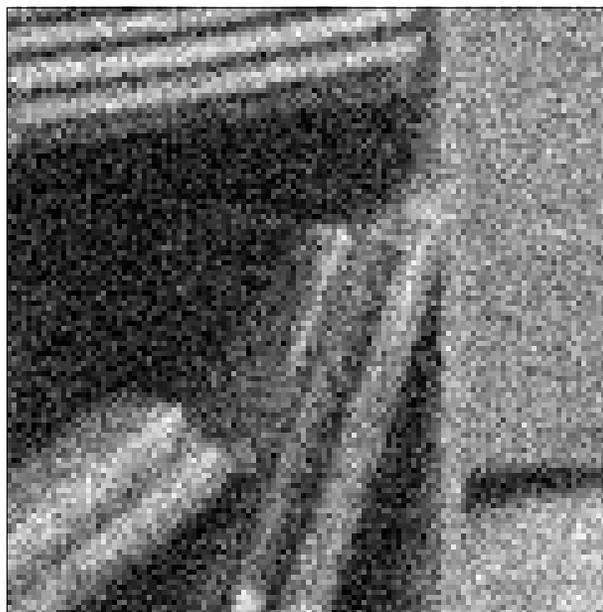
Bandelettes (27,68 dB)



Ondelettes (25,79 dB)



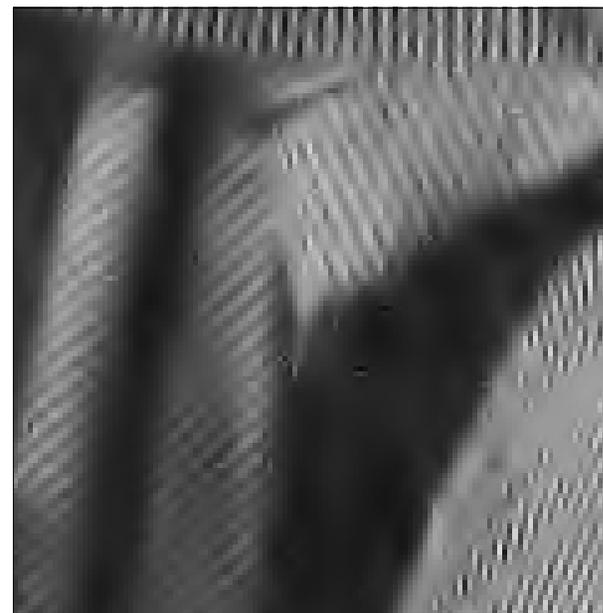
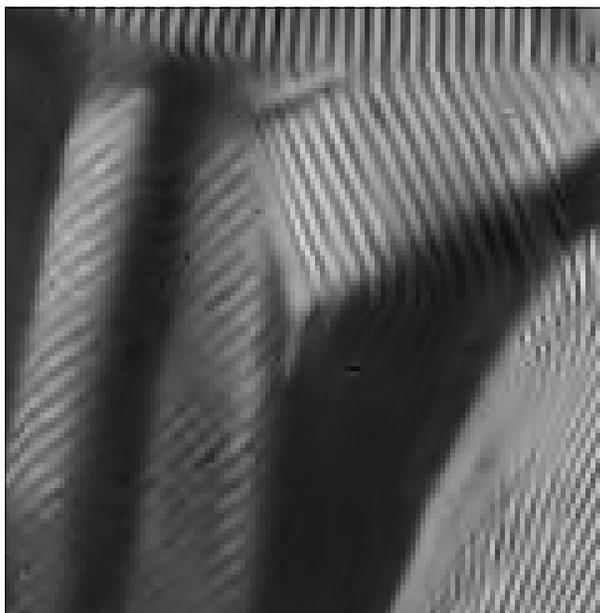
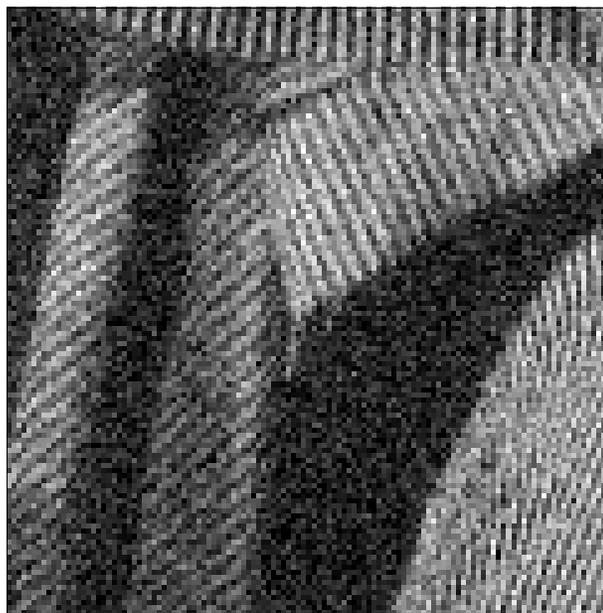
Bruitée



Bandelettes



Ondelettes



Vers des images plus naturelles

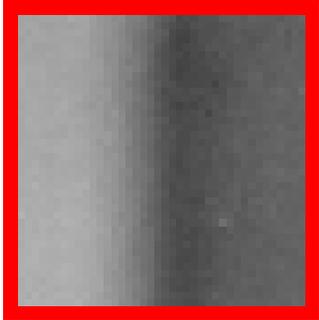
Vers des images plus naturelles

- Modèle $C^\alpha - C^\alpha$ simpliste.



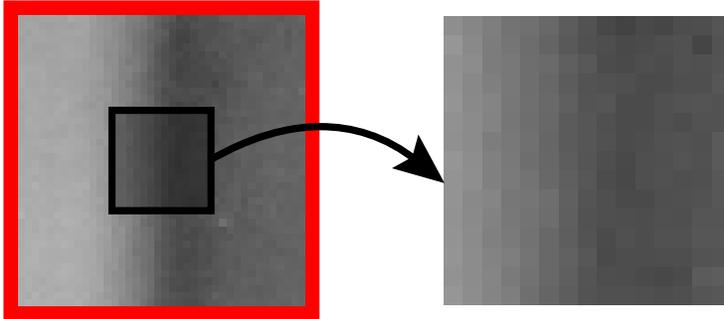
Vers des images plus naturelles

- Modèle $C^\alpha - C^\alpha$ simpliste.
- Les contours sont flous :



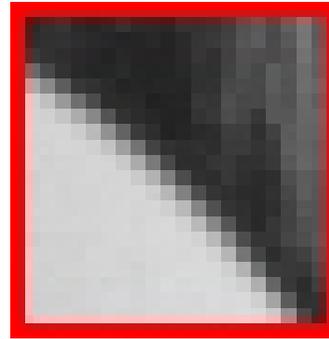
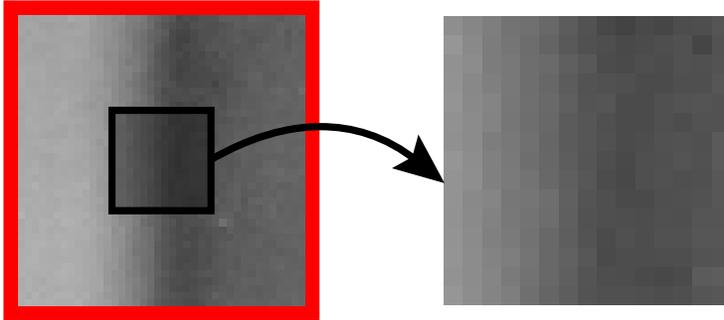
Vers des images plus naturelles

- Modèle $C^\alpha - C^\alpha$ simpliste.
- Les contours sont flous :



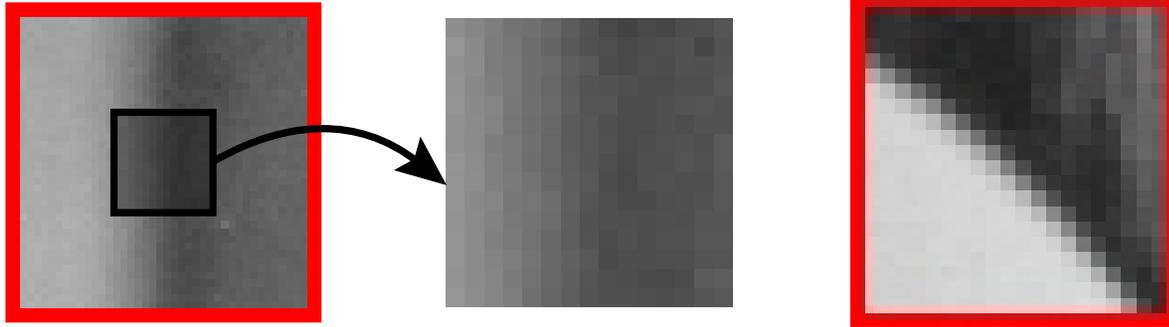
Vers des images plus naturelles

- Modèle $C^\alpha - C^\alpha$ simpliste.
- Les contours sont flous :



Vers des images plus naturelles

- Modèle $C^\alpha - C^\alpha$ simpliste.
- Les contours sont flous :

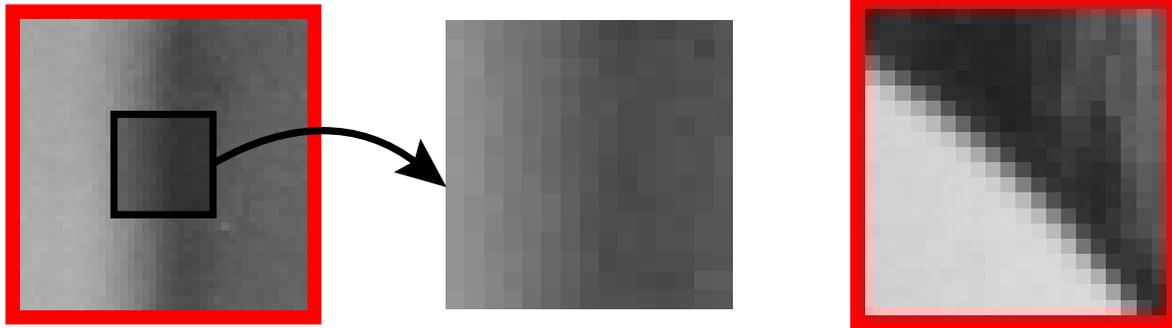


- Pas un problème pour les bandelettes.

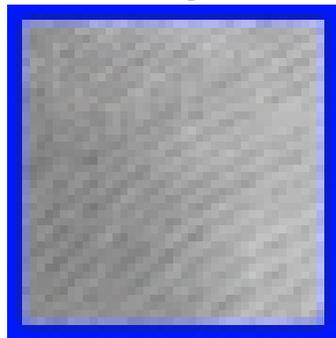


Vers des images plus naturelles

- Modèle $C^\alpha - C^\alpha$ simpliste.
- Les contours sont flous :

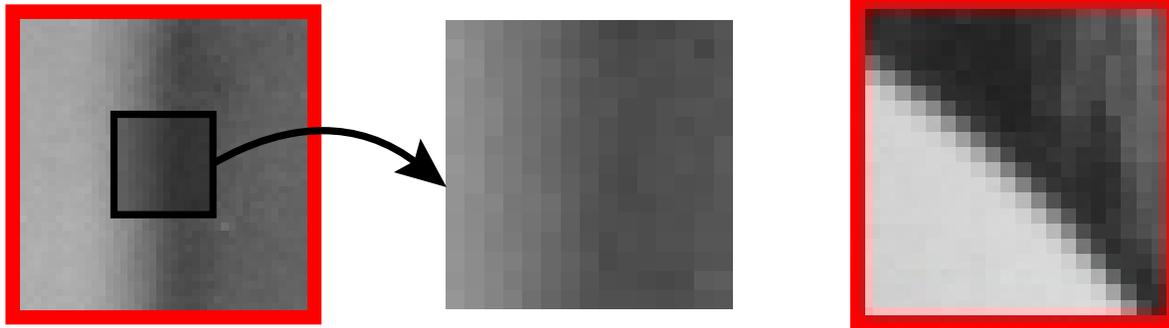


- Pas un problème pour les bandelettes.
- La géométrie vie à plusieurs échelles :

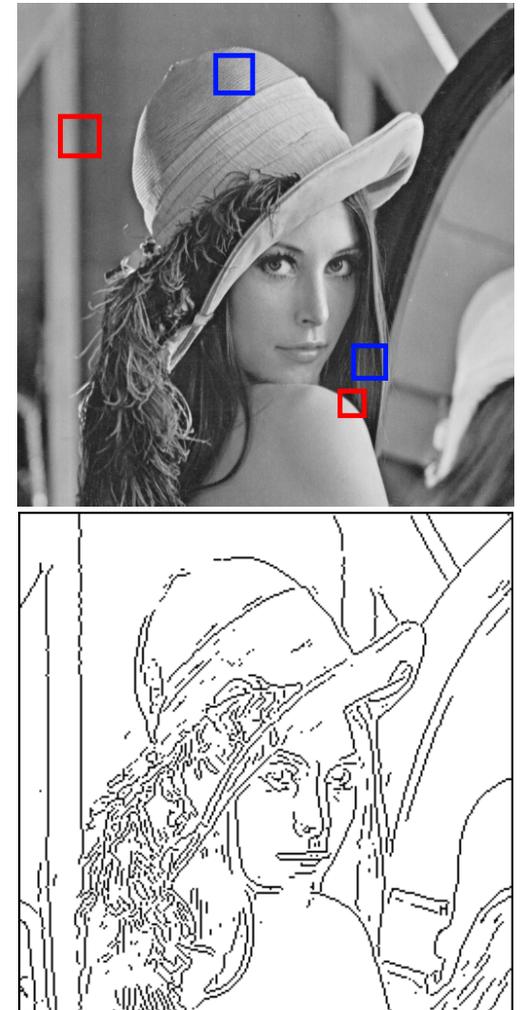
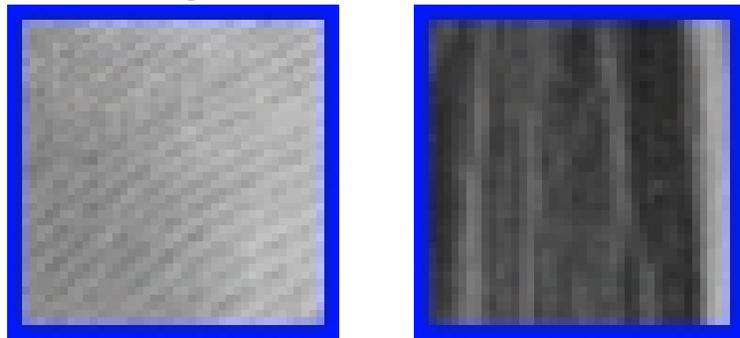


Vers des images plus naturelles

- Modèle $C^\alpha - C^\alpha$ simpliste.
- Les contours sont flous :

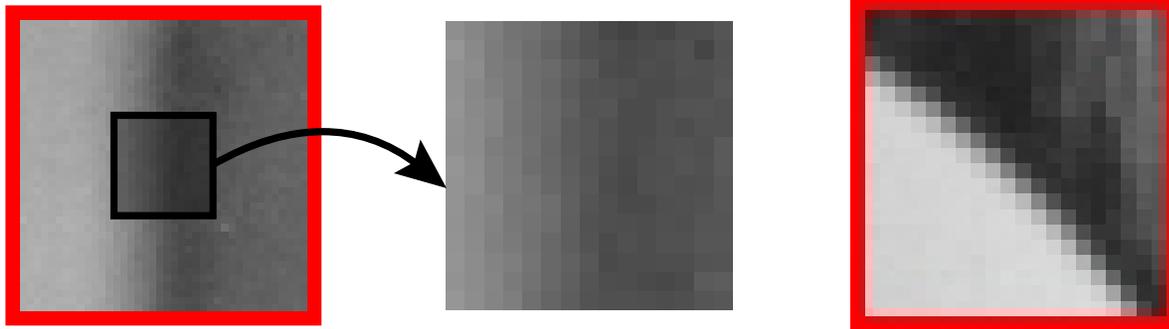


- Pas un problème pour les bandelettes.
- La géométrie vie à plusieurs échelles :

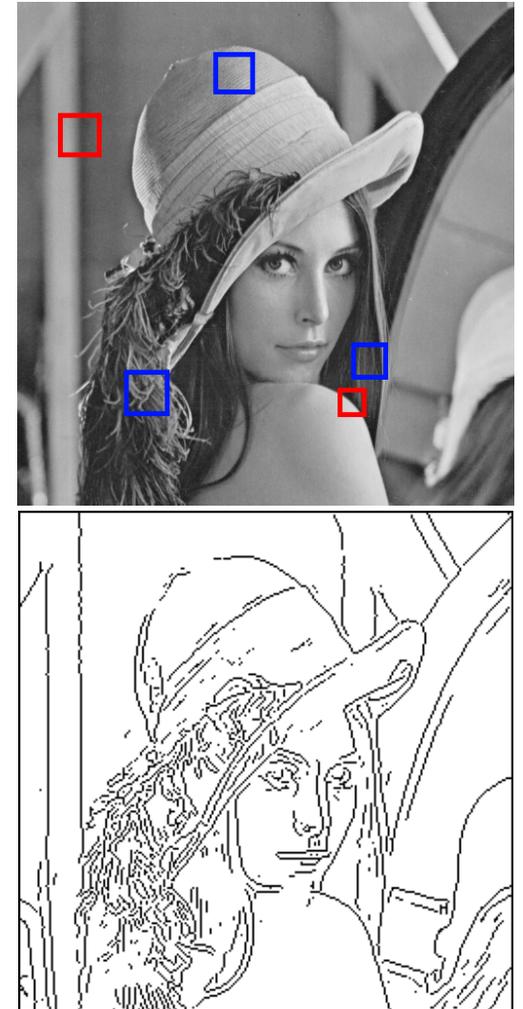
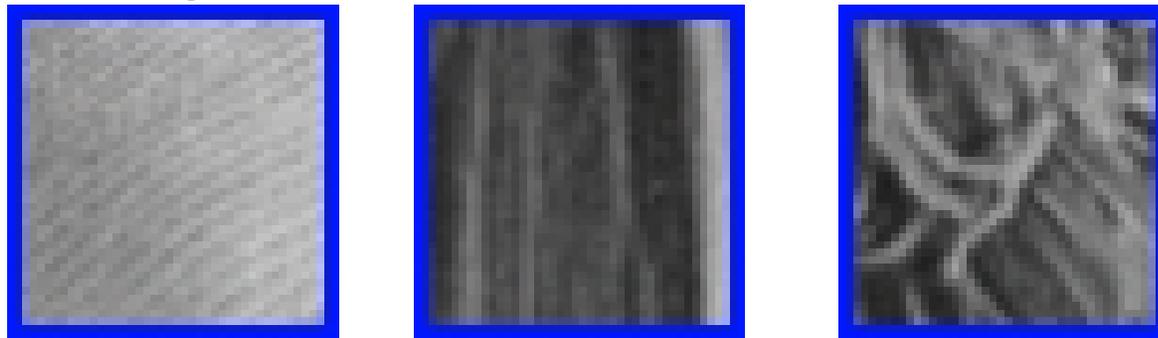


Vers des images plus naturelles

- Modèle $C^\alpha - C^\alpha$ simpliste.
- Les contours sont flous :

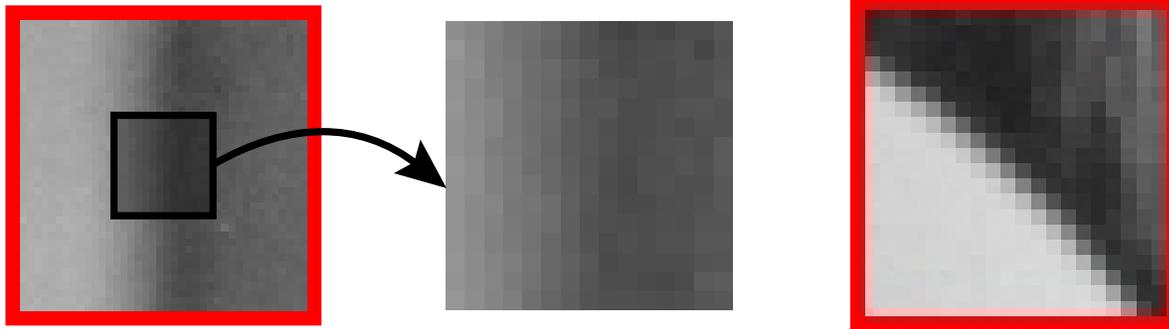


- Pas un problème pour les bandelettes.
- La géométrie vie à plusieurs échelles :

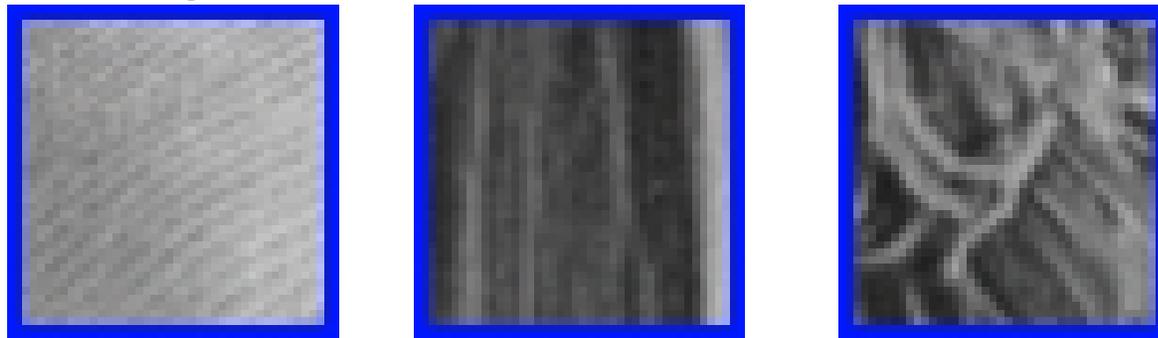


Vers des images plus naturelles

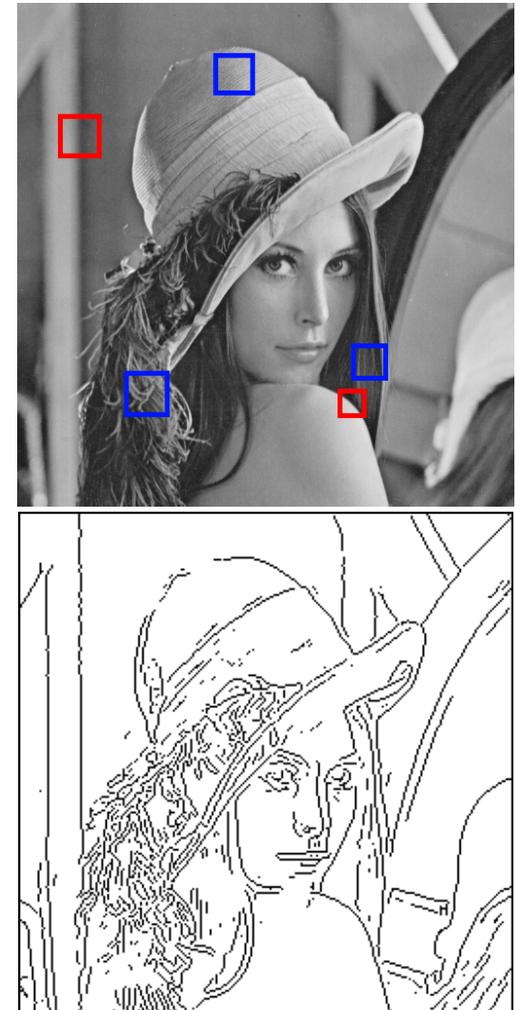
- Modèle $C^\alpha - C^\alpha$ simpliste.
- Les contours sont flous :



- Pas un problème pour les bandelettes.
- La géométrie vie à plusieurs échelles :



- Comment incorporer une géométrie multiéchelle ?

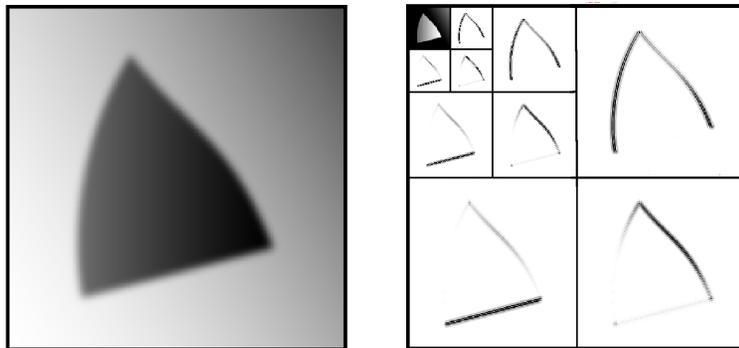


Bandelettes 2G

G. Peyré

Bandelettes 2G

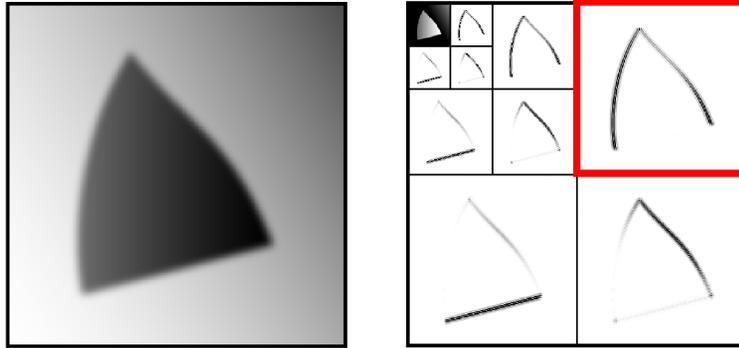
G. Peyré



● Retour vers les ondelettes.

Bandelettes 2G

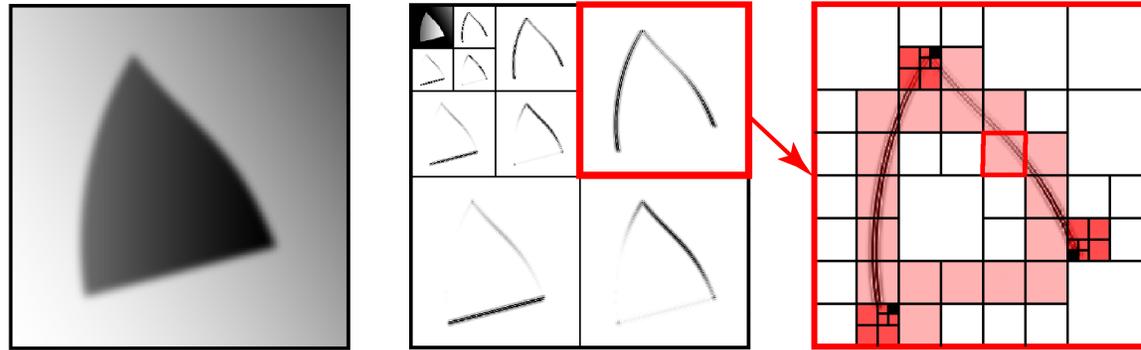
G. Peyré



- Retour vers les ondelettes.
- Bandelettes sur les coefficients d'ondelettes :

Bandelettes 2G

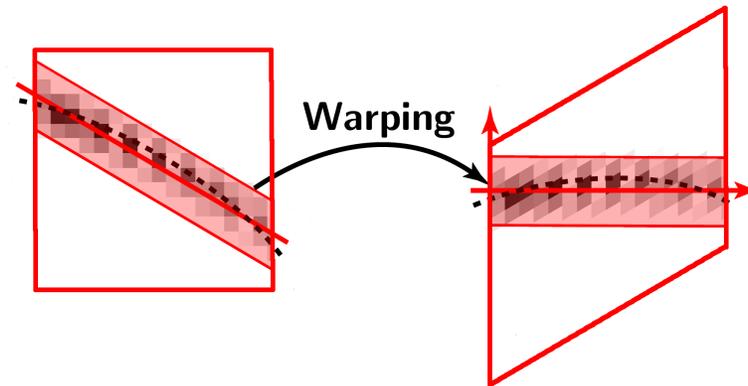
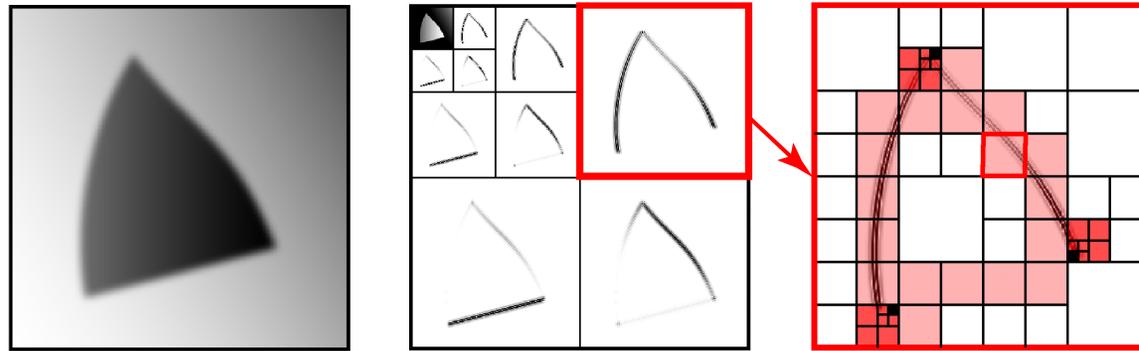
G. Peyré



- Retour vers les ondelettes.
- Bandelettes sur les coefficients d'ondelettes :
 - Segmentation de la décomposition en ondelettes,

Bandelettes 2G

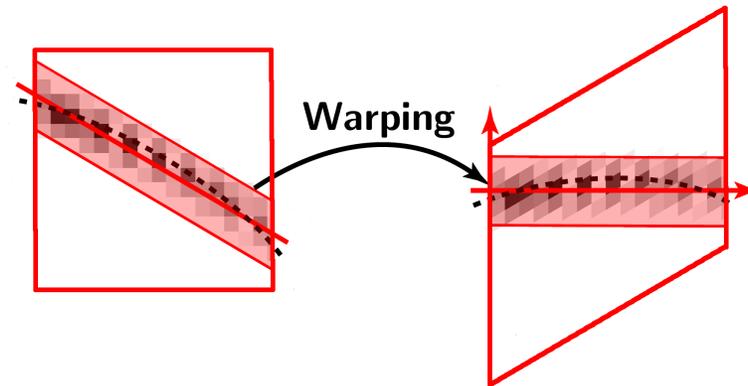
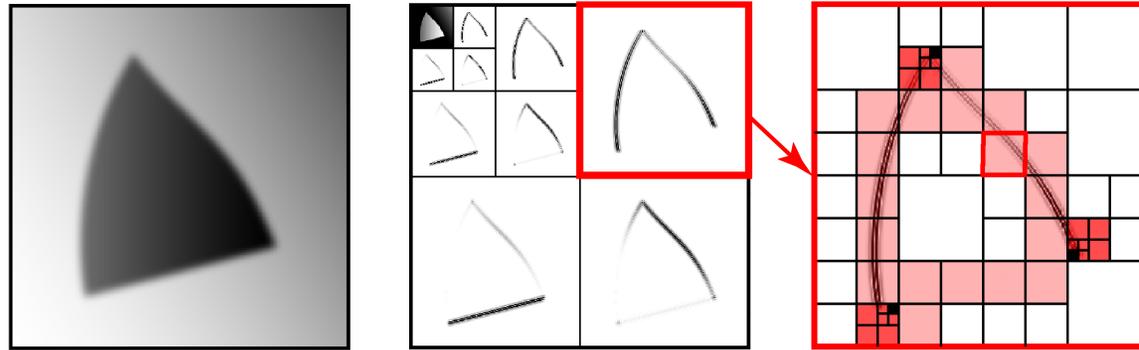
G. Peyré



- Retour vers les ondelettes.
- Bandelettes sur les coefficients d'ondelettes :
 - Segmentation de la décomposition en ondelettes,
 - Changement de base adaptée à la géométrie locale.

Bandelettes 2G

G. Peyré



- Retour vers les ondelettes.
- Bandelettes sur les coefficients d'ondelettes :
 - Segmentation de la décomposition en ondelettes,
 - Changement de base adaptée à la géométrie locale.
- Base orthogonale avec une géométrie multiéchelle : bandelettes de seconde génération.

Estimation en Bandelettes 2G

Estimation en Bandelettes 2G

- **Théorème** : Si f est $C^\alpha - C^\alpha$, alors, dans la meilleure base, $\|f - f_M\|^2 \leq CM^{-\alpha}$.

Estimation en Bandelettes 2G

- **Théorème** : Si f est $\mathbf{C}^\alpha - \mathbf{C}^\alpha$, alors, dans la meilleure base,
 $\|f - f_M\|^2 \leq CM^{-\alpha}$.
- Algorithmique quasi inchangée.

Estimation en Bandelettes 2G

- **Théorème** : Si f est $\mathbf{C}^\alpha - \mathbf{C}^\alpha$, alors, dans la meilleure base, $\|f - f_M\|^2 \leq CM^{-\alpha}$.
- Algorithmique quasi inchangée.
- Estimateur par sélection de modèle atteint le risque quasi optimal :

$$E(\|f - F_E\|) \leq CT(\epsilon)^{\frac{2\alpha}{\alpha+1}} .$$

Estimation en Bandelettes 2G

- **Théorème** : Si f est $\mathbf{C}^\alpha - \mathbf{C}^\alpha$, alors, dans la meilleure base,
 $\|f - f_M\|^2 \leq CM^{-\alpha}$.
- Algorithmique quasi inchangée.
- Estimateur par sélection de modèle atteint le risque quasi optimal :

$$E(\|f - F_E\|) \leq CT(\epsilon)^{\frac{2\alpha}{\alpha+1}} .$$

- Ensemble des fonctions bien estimées (maxiset) plus large ?

Estimation en Bandelettes 2G

- **Théorème** : Si f est $\mathbf{C}^\alpha - \mathbf{C}^\alpha$, alors, dans la meilleure base,
 $\|f - f_M\|^2 \leq CM^{-\alpha}$.
- Algorithmique quasi inchangée.
- Estimateur par sélection de modèle atteint le risque quasi optimal :

$$E(\|f - F_E\|) \leq CT(\epsilon)^{\frac{2\alpha}{\alpha+1}} .$$

- Ensemble des fonctions bien estimées (maxiset) plus large ?
- Expérimentation numérique en cours...

Conclusion

Conclusion

- Représentation dans des bases permet une estimation efficace (plus généralement un bon traitement du signal).

Conclusion

- Représentation dans des bases permet une estimation efficace (plus généralement un bon traitement du signal).
- Caractère central de l'approximation non linéaire.

Conclusion

- Représentation dans des bases permet une estimation efficace (plus généralement un bon traitement du signal).
- Caractère central de l'approximation non linéaire.
- Nécessité d'avoir une représentation adaptée au signal.

Conclusion

- Représentation dans des bases permet une estimation efficace (plus généralement un bon traitement du signal).
- Caractère central de l'approximation non linéaire.
- Nécessité d'avoir une représentation adaptée au signal.
- Pour les images, la régularité la plus importante est géométrique.

Conclusion

- Représentation dans des bases permet une estimation efficace (plus généralement un bon traitement du signal).
- Caractère central de l'approximation non linéaire.
- Nécessité d'avoir une représentation adaptée au signal.
- Pour les images, la régularité la plus importante est géométrique.
- Bandelettes : une représentation adaptée à la géométrie.

Conclusion

- Représentation dans des bases permet une estimation efficace (plus généralement un bon traitement du signal).
- Caractère central de l'approximation non linéaire.
- Nécessité d'avoir une représentation adaptée au signal.
- Pour les images, la régularité la plus importante est géométrique.
- Bandelettes : une représentation adaptée à la géométrie.
- Quelle représentation pour quel problème ?