

Bandelettes et estimation géométrique des images

E. LE PENNEC,

Ch. DOSSAL, S. MALLAT

LPMA (Université Paris 7) – CMAP (École Polytechnique) – Let It Wave

Représentation et estimation

Représentation et estimation

- Représentation concise nécessaire pour le traitement du signal : compression (thèse), estimation à partir d'un signal bruité (ici), . . .

Représentation et estimation

- Représentation concise nécessaire pour le traitement du signal : compression (thèse), estimation à partir d'un signal bruité (ici), . . .
- Concision d'une représentation liée à l'exploitation de régularité.

Représentation et estimation

- Représentation concise nécessaire pour le traitement du signal : compression (thèse), estimation à partir d'un signal bruité (ici), . . .
- Concision d'une représentation liée à l'exploitation de régularité.
- Image : nécessité de prendre en compte le caractère géométrique de la régularité.

Représentation et estimation

- Représentation concise nécessaire pour le traitement du signal : compression (thèse), estimation à partir d'un signal bruité (ici), . . .
- Concision d'une représentation liée à l'exploitation de régularité.
- Image : nécessité de prendre en compte le caractère géométrique de la régularité.
- Couplage estimation statistique et représentation harmonique adaptée à des géométries complexes.

Représentation et estimation

- Représentation concise nécessaire pour le traitement du signal : compression (thèse), estimation à partir d'un signal bruité (ici), . . .
- Concision d'une représentation liée à l'exploitation de régularité.
- Image : nécessité de prendre en compte le caractère géométrique de la régularité.
- Couplage estimation statistique et représentation harmonique adaptée à des géométries complexes.
- Considérations algorithmique, pratique et théorique.

Régularité géométrique et contours

Régularité géométrique et contours

- Image = fonction régulière par morceaux.



Régularité géométrique et contours

- Image = fonction régulière par morceaux.
- Structures inexistantes en 1D : les contours.



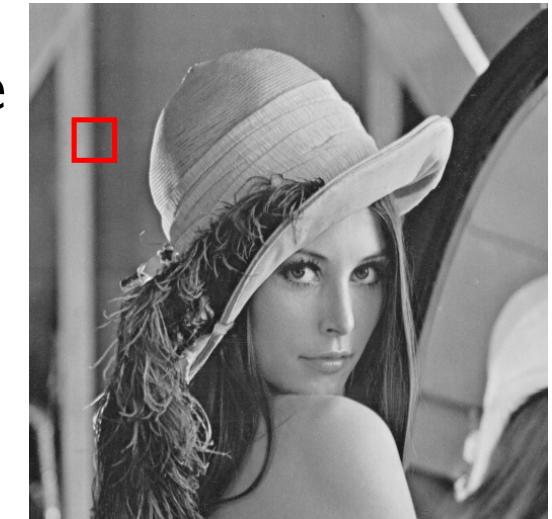
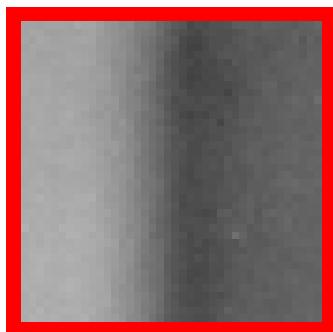
Régularité géométrique et contours

- Image = fonction régulière par morceaux.
- Structures inexistantes en 1D : les contours.
- Contour = singularité lissée le long d'une courbe régulière :



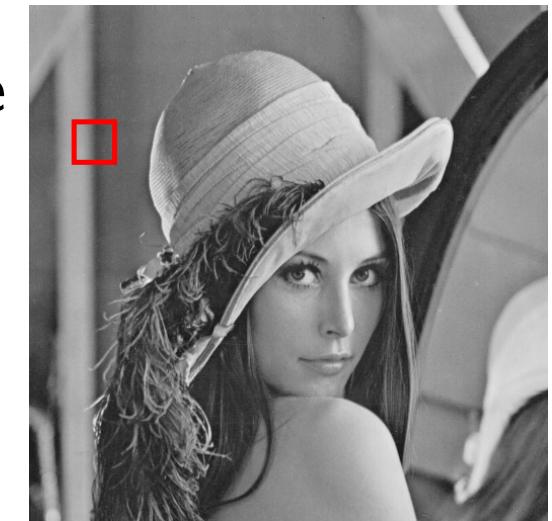
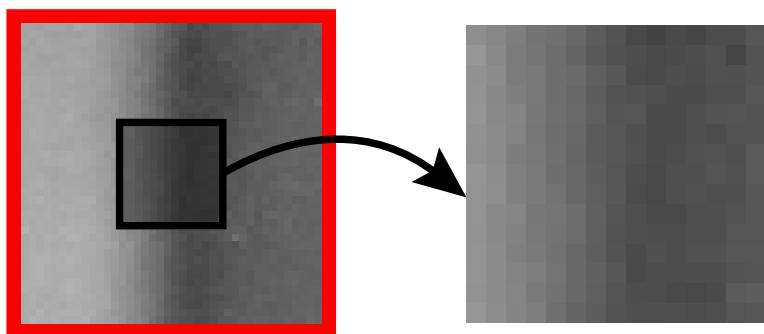
Régularité géométrique et contours

- Image = fonction régulière par morceaux.
- Structures inexistantes en 1D : les contours.
- Contour = singularité lissée le long d'une courbe régulière :



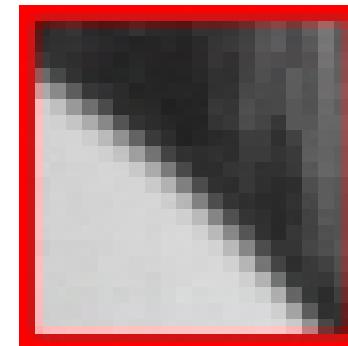
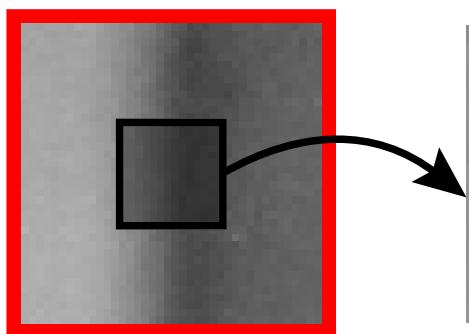
Régularité géométrique et contours

- Image = fonction régulière par morceaux.
- Structures inexistantes en 1D : les contours.
- Contour = singularité lissée le long d'une courbe régulière :



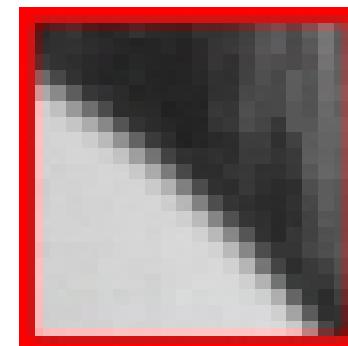
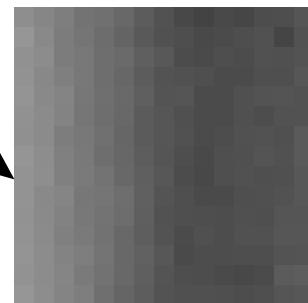
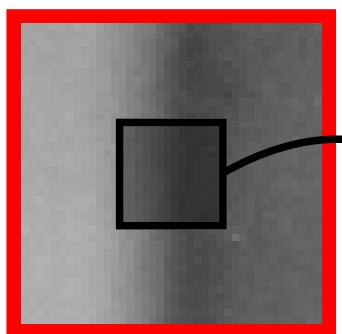
Régularité géométrique et contours

- Image = fonction régulière par morceaux.
- Structures inexistantes en 1D : les contours.
- Contour = singularité lissée le long d'une courbe régulière :



Régularité géométrique et contours

- Image = fonction régulière par morceaux.
- Structures inexistantes en 1D : les contours.
- Contour = singularité lissée le long d'une courbe régulière :

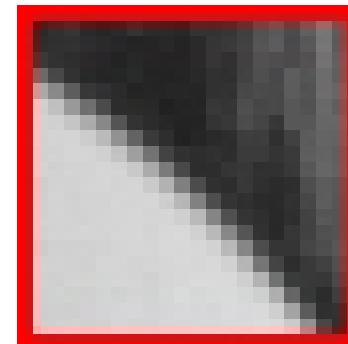
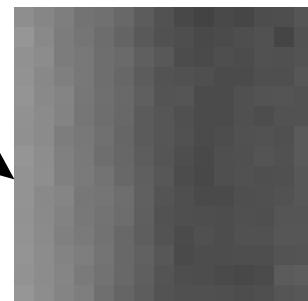
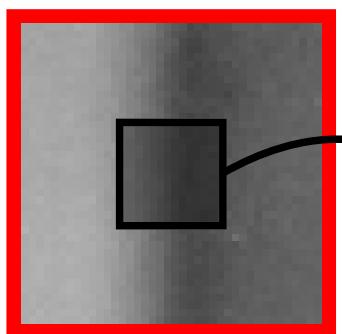


- Notion de contours difficile à définir :

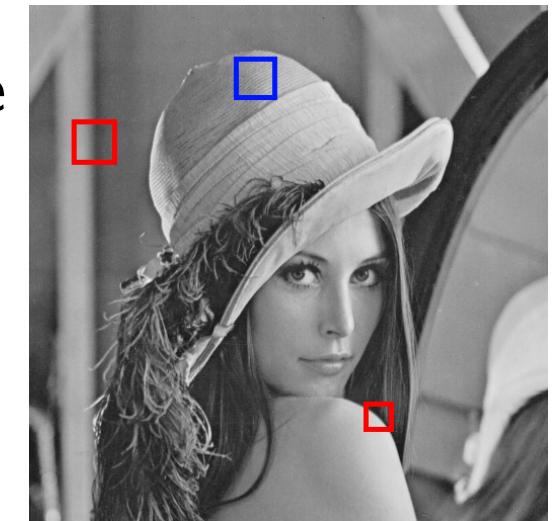
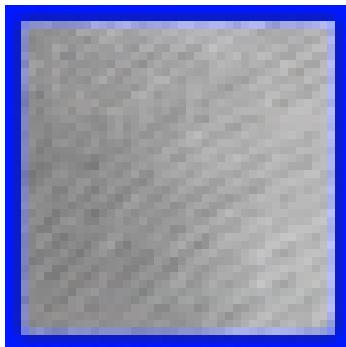


Régularité géométrique et contours

- Image = fonction régulière par morceaux.
- Structures inexistantes en 1D : les contours.
- Contour = singularité lissée le long d'une courbe régulière :

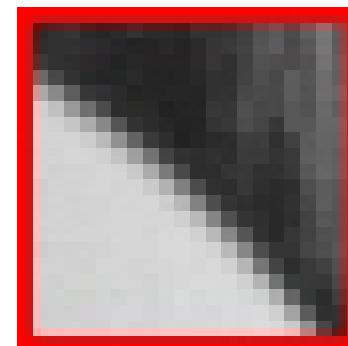
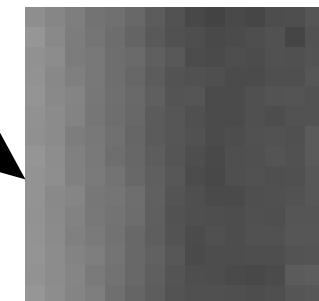
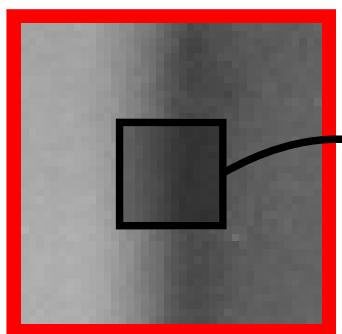


- Notion de contours difficile à définir :

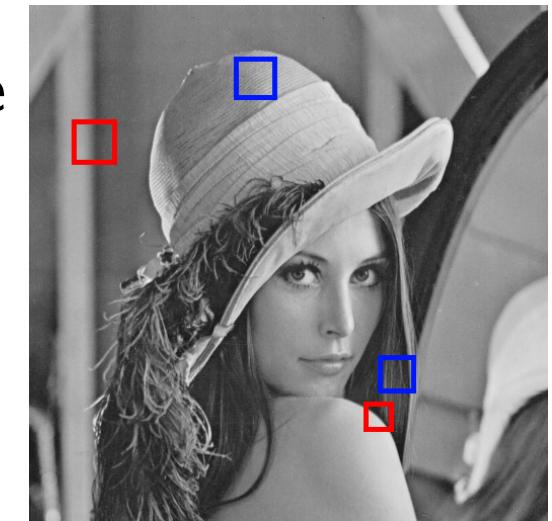
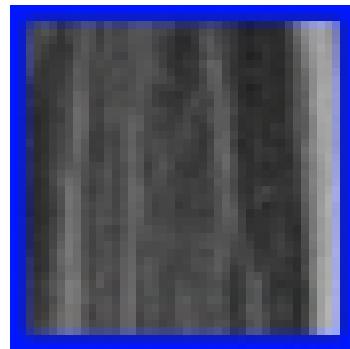
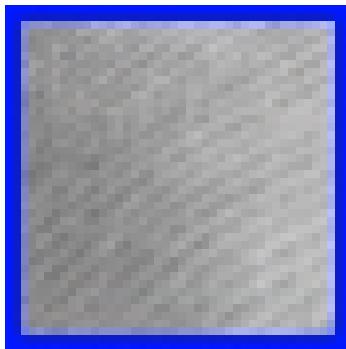


Régularité géométrique et contours

- Image = fonction régulière par morceaux.
- Structures inexistantes en 1D : les contours.
- Contour = singularité lissée le long d'une courbe régulière :

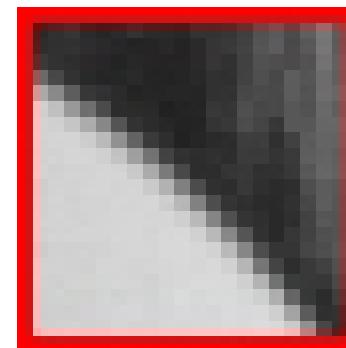
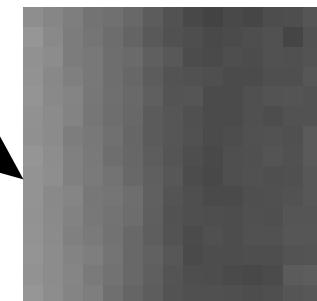
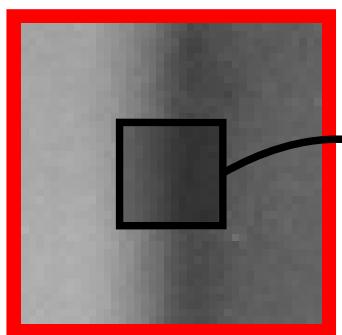


- Notion de contours difficile à définir :

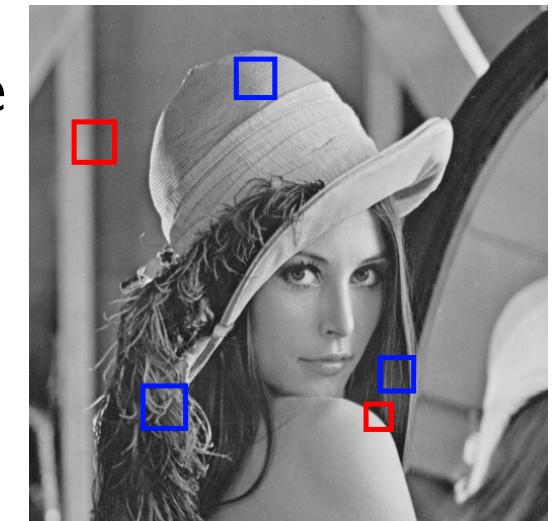
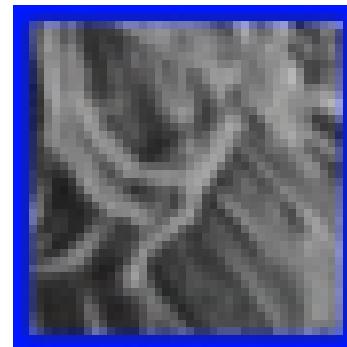
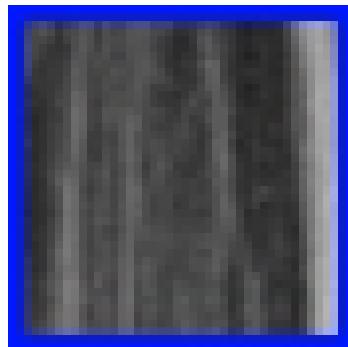
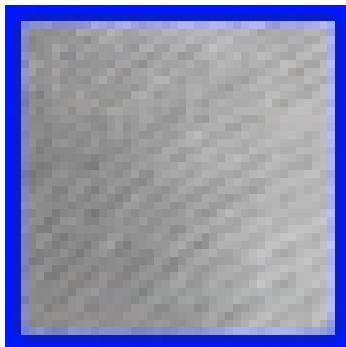


Régularité géométrique et contours

- Image = fonction régulière par morceaux.
- Structures inexistantes en 1D : les contours.
- Contour = singularité lissée le long d'une courbe régulière :

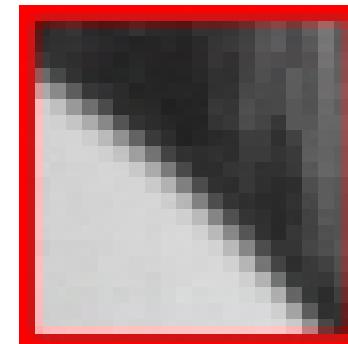
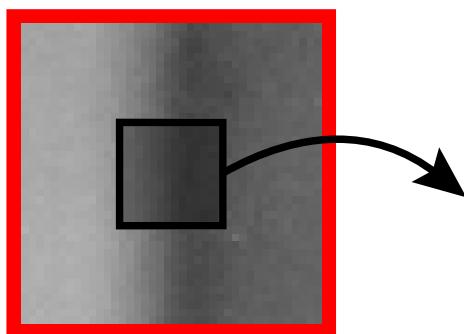


- Notion de contours difficile à définir :

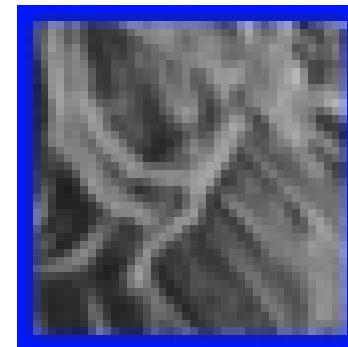
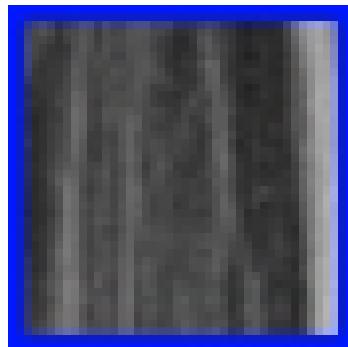
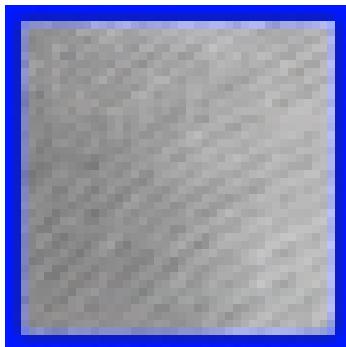


Régularité géométrique et contours

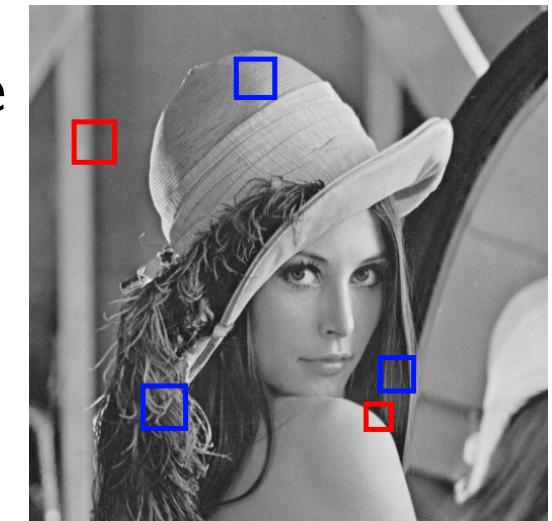
- Image = fonction régulière par morceaux.
- Structures inexistantes en 1D : les contours.
- Contour = singularité lissée le long d'une courbe régulière :



- Notion de contours difficile à définir :



- Comment bien définir cette géométrie ?



Plan

Plan

- Représentation, bases et estimateurs diagonaux.

Plan

- Représentation, bases et estimateurs diagonaux.
- Ondelettes et représentations géométriques.

Plan

- Représentation, bases et estimateurs diagonaux.
- Ondelettes et représentations géométriques.
- Bandelettes.

Plan

- Représentation, bases et estimateurs diagonaux.
- Ondelettes et représentations géométriques.
- Bandelettes.
- Approximation non-linéaire et compression.

Plan

- Représentation, bases et estimateurs diagonaux.
- Ondelettes et représentations géométriques.
- Bandelettes.
- Approximation non-linéaire et compression.
- Estimation en bandelettes.

Représentation concise dans une base

Représentation concise dans une base

- Décomposition dans une base orthonormée $B = \{g_m\}_{m \in \mathbb{N}}$

$$f = \sum_{m \in \mathbb{N}} \langle f, g_m \rangle g_m .$$

Représentation concise dans une base

- Décomposition dans une base orthonormée $B = \{g_m\}_{m \in \mathbb{N}}$

$$f = \sum_{m \in \mathbb{N}} \langle f, g_m \rangle g_m .$$

- Approximation avec M vecteurs choisis adaptativement

$$f_M = \sum_{m \in I_M} \langle f, g_m \rangle g_m .$$

Représentation concise dans une base

- Décomposition dans une base orthonormée $B = \{g_m\}_{m \in \mathbb{N}}$

$$f = \sum_{m \in \mathbb{N}} \langle f, g_m \rangle g_m .$$

- Approximation avec M vecteurs choisis adaptativement

$$f_M = \sum_{m \in I_M} \langle f, g_m \rangle g_m .$$

- Pour minimiser $\|f - f_M\|^2 = \sum_{m \notin I_M} |\langle f, g_m \rangle|^2,$

sélection des M plus grands produits scalaires :

$$I_M = \{m, |\langle f, g_m \rangle| > T_M\} : \text{seuillage.}$$

Représentation concise dans une base

- Décomposition dans une base orthonormée $\mathbf{B} = \{g_m\}_{m \in \mathbb{N}}$

$$f = \sum_{m \in \mathbb{N}} \langle f, g_m \rangle g_m .$$

- Approximation avec M vecteurs choisis adaptativement

$$f_M = \sum_{m \in I_M} \langle f, g_m \rangle g_m .$$

- Pour minimiser $\|f - f_M\|^2 = \sum_{m \notin I_M} |\langle f, g_m \rangle|^2,$

sélection des M plus grands produits scalaires :

$$I_M = \{m, |\langle f, g_m \rangle| > T_M\} : \text{seuillage.}$$

- Problème : Si $f \in \Theta$, comment choisir la base \mathbf{B} de sorte que

$$\|f - f_M\|^2 \leq CM^{-\beta} \text{ avec un grand } \beta ?$$

Débruitage et base

Débruitage et base

- Estimation de f à partir de $Y = f + W$ avec $W \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$.

Débruitage et base

- Estimation de f à partir de $Y = f + W$ avec $W \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$.
- Estimation diagonale dans une base :

$$F = \sum_n \rho_n(Y) \langle Y, g_n \rangle g_n \quad .$$

Débruitage et base

- Estimation de f à partir de $Y = f + W$ avec $W \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$.
- Estimation diagonale dans une base :

$$F = \sum_n \rho_n(Y) \langle Y, g_n \rangle g_n \quad .$$

- Estimation par projection : $\rho_n(Y) \in \{0, 1\}$.

Débruitage et base

- Estimation de f à partir de $Y = f + W$ avec $W \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$.
- Estimation diagonale dans une base :

$$F = \sum_n \rho_n(Y) \langle Y, g_n \rangle g_n \quad .$$

- Estimation par projection : $\rho_n(Y) \in \{0, 1\}$.
- $I_M = \{n, \rho_n \neq 0\}$ avec $\text{Card}(I_M) = M$

$$F = P_{I_M} Y = \sum_{n \in I_M} \langle Y, g_n \rangle g_n \quad .$$

Débruitage et base

- Estimation de f à partir de $Y = f + W$ avec $W \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$.
- Estimation diagonale dans une base :

$$F = \sum_n \rho_n(Y) \langle Y, g_n \rangle g_n \quad .$$

- Estimation par projection : $\rho_n(Y) \in \{0, 1\}$.
- $I_M = \{n, \rho_n \neq 0\}$ avec $\text{Card}(I_M) = M$

$$F = P_{I_M} Y = \sum_{n \in I_M} \langle Y, g_n \rangle g_n \quad .$$

- Risque associé :

$$E(\|f - F\|^2) = \underbrace{\|f - P_{I_M} f\|^2}_{\text{biais}} + \underbrace{\sigma^2 M}_{\text{variance}} \quad .$$

Débruitage et approximation non-linéaire

Débruitage et approximation non-linéaire

- Risque associé à I_M :

$$E(\|f - P_{I_M} Y\|^2) = \|f - P_{I_M} f\|^2 + \sigma^2 M \quad .$$

Débruitage et approximation non-linéaire

- Risque associé à I_M :

$$E(\|f - P_{I_M} Y\|^2) = \|f - P_{I_M} f\|^2 + \sigma^2 M \quad .$$

- Performance du meilleur estimateur lié à l'approximation non linéaire :

$$R_{\text{opt}} = \min_{I_M} \|f - P_{I_M} f\|^2 + \sigma^2 M \quad .$$

Débruitage et approximation non-linéaire

- Risque associé à I_M :

$$E(\|f - P_{I_M} Y\|^2) = \|f - P_{I_M} f\|^2 + \sigma^2 M \quad .$$

- Performance du meilleur estimateur lié à l'approximation non linéaire :

$$R_{\text{opt}} = \min_{I_M} \|f - P_{I_M} f\|^2 + \sigma^2 M \quad .$$

- $I_M = \{n, |\langle f, g_n \rangle|^2 \geq \sigma^2\}$: oracle.

Débruitage et approximation non-linéaire

- Risque associé à I_M :

$$E(\|f - P_{I_M} Y\|^2) = \|f - P_{I_M} f\|^2 + \sigma^2 M \quad .$$

- Performance du meilleur estimateur lié à l'approximation non linéaire :

$$R_{\text{opt}} = \min_{I_M} \|f - P_{I_M} f\|^2 + \sigma^2 M \quad .$$

- $I_M = \{n, |\langle f, g_n \rangle|^2 \geq \sigma^2\}$: oracle.
- Estimateur pratique : $I_M = \{n, |\langle Y, g_n \rangle|^2 \geq \gamma \sigma^2\}$.

Débruitage et approximation non-linéaire

- Risque associé à I_M :

$$E(\|f - P_{I_M} Y\|^2) = \|f - P_{I_M} f\|^2 + \sigma^2 M \quad .$$

- Performance du meilleur estimateur lié à l'approximation non linéaire :

$$R_{\text{opt}} = \min_{I_M} \|f - P_{I_M} f\|^2 + \sigma^2 M \quad .$$

- $I_M = \{n, |\langle f, g_n \rangle|^2 \geq \sigma^2\}$: oracle.
- Estimateur pratique : $I_M = \{n, |\langle Y, g_n \rangle|^2 \geq \gamma \sigma^2\}$.
- Théorème (*Donoho*) : pour $\gamma = \lambda^2 \log N$, la procédure est quasi optimale

$$E(\|f - F\|^2) \leq C \log N (\sigma^2 + R_{\text{opt}}) \quad .$$

Débruitage et approximation non-linéaire

- Risque associé à I_M :

$$E(\|f - P_{I_M} Y\|^2) = \|f - P_{I_M} f\|^2 + \sigma^2 M \quad .$$

- Performance du meilleur estimateur lié à l'approximation non linéaire :

$$R_{\text{opt}} = \min_{I_M} \|f - P_{I_M} f\|^2 + \sigma^2 M \quad .$$

- $I_M = \{n, |\langle f, g_n \rangle|^2 \geq \sigma^2\}$: oracle.
- Estimateur pratique : $I_M = \{n, |\langle Y, g_n \rangle|^2 \geq \gamma \sigma^2\}$.
- Théorème (*Donoho*) : pour $\gamma = \lambda^2 \log N$, la procédure est quasi optimale

$$E(\|f - F\|^2) \leq C \log N (\sigma^2 + R_{\text{opt}}) \quad .$$

- Double usage de l'approximation non-linéaire : risque oracle et seuillage.

Base d'ondelettes 1D de $L^2[0, 1]$

• ψ : ondelette fondamentale

• ψ_0 : ondelette fondamentale à support compact

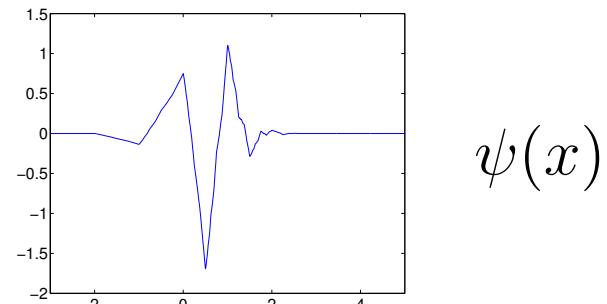
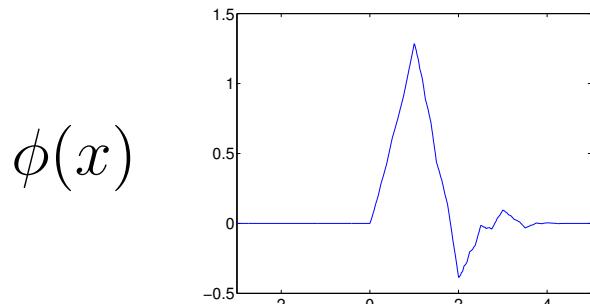
• $\psi_{j,k}$: ondelette fondamentale à support compact

• $\psi_{j,k} = \psi_0(\cdot - k) \otimes \psi_0(2^{-j}\cdot)$

• $\psi_{j,k}$: ondelette fondamentale à support compact

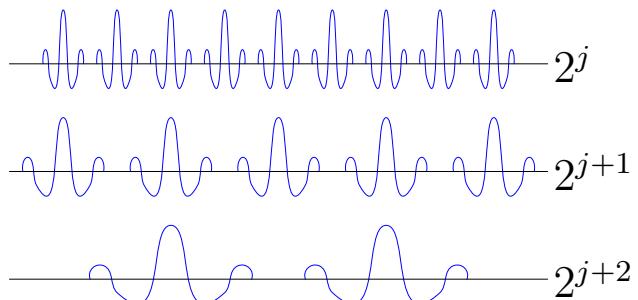
Base d'ondelettes 1D de $L^2[0, 1]$

- Construite à partir d'une fonction d'échelle $\phi(x)$ et d'une ondelette mère $\psi(x)$



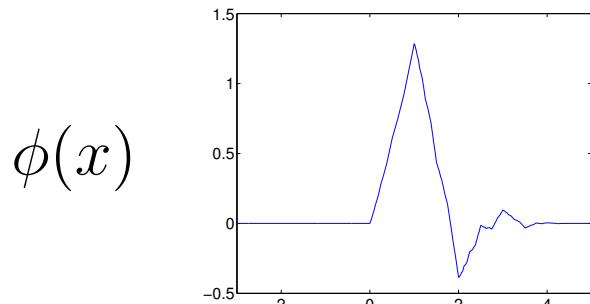
qui sont dilatées par 2^j et translatées de $2^j n$

$$\phi_{j,n}(x) = \frac{1}{\sqrt{2^j}} \phi\left(\frac{x - 2^j n}{2^j}\right) \quad , \quad \psi_{j,n}(x) = \frac{1}{\sqrt{2^j}} \psi\left(\frac{x - 2^j n}{2^j}\right) \quad .$$

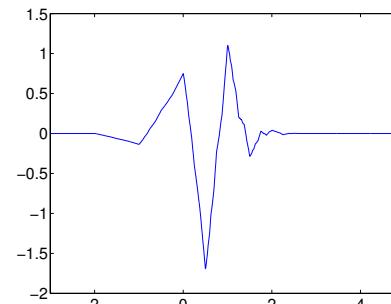


Base d'ondelettes 1D de $L^2[0, 1]$

- Construite à partir d'une fonction d'échelle $\phi(x)$ et d'une ondelette mère $\psi(x)$



$\phi(x)$

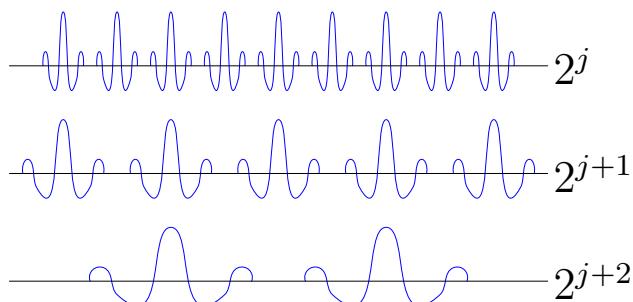


$\psi(x)$

qui sont dilatées par 2^j et translatées de $2^j n$

$$\phi_{j,n}(x) = \frac{1}{\sqrt{2^j}} \phi\left(\frac{x - 2^j n}{2^j}\right) \quad , \quad \psi_{j,n}(x) = \frac{1}{\sqrt{2^j}} \psi\left(\frac{x - 2^j n}{2^j}\right) .$$

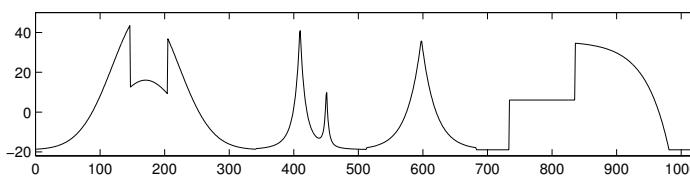
- $\mathbf{B} = \left\{ \psi_{j,n} \right\}_{j \in \mathbb{N}, 2^j n \in [0,1]}$ est une base orthonormale de $L^2[0, 1]$.



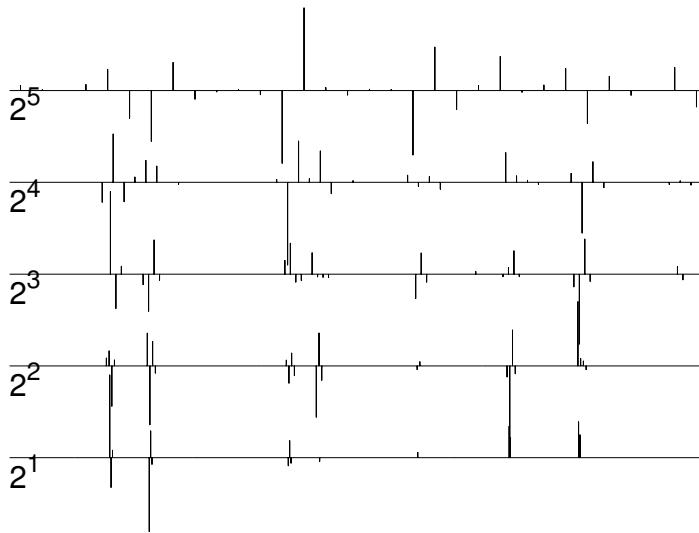
Approximation non linéaire en ondelettes

Approximation non linéaire en ondelettes

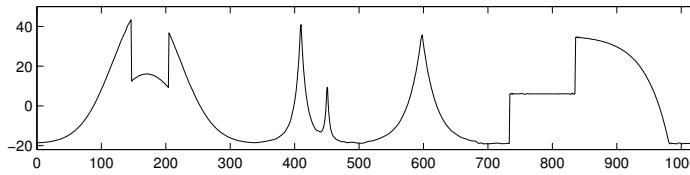
f



$\langle f, \psi_{j,n} \rangle$

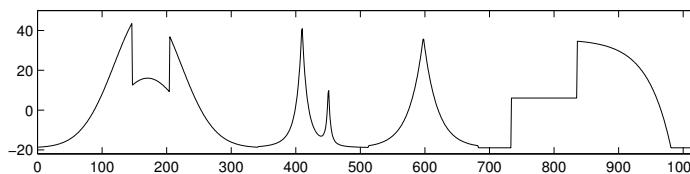


f_M

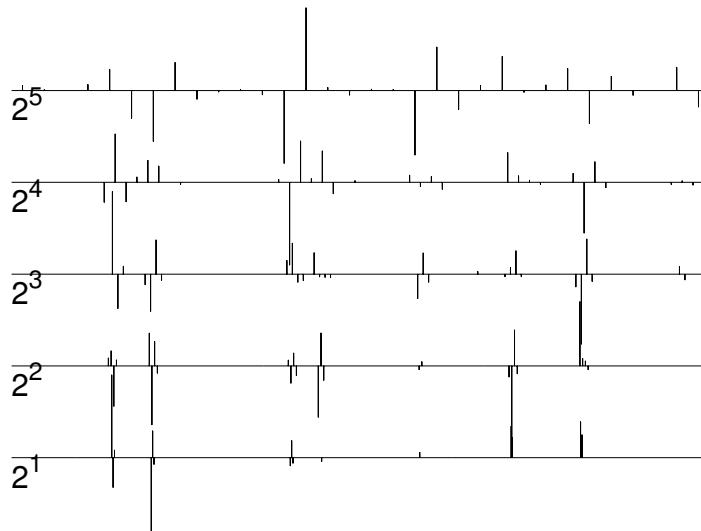


Approximation non linéaire en ondelettes

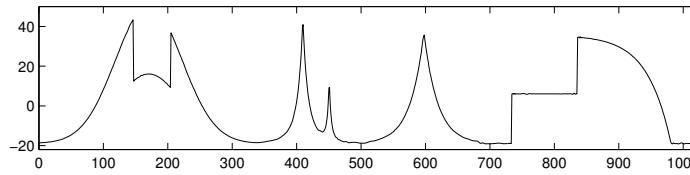
f



$\langle f, \psi_{j,n} \rangle$



f_M



- Si f est C^α par morceaux et ψ a $p > \alpha$ moments nuls alors

$$\|f - f_M\|^2 = O(M^{-2\alpha}) .$$

Base d'ondelettes 2D séparables



Base d'ondelettes 2D séparables

- La famille

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi_{j,n_1}(x_1) \psi_{j,n_2}(x_2) , \quad \psi_{j,n_1}(x_1) \phi_{j,n_2}(x_2) \\ , \quad \psi_{j,n_1}(x_1) \psi_{j,n_2}(x_2) \end{array} \right\}_{(j,n_1,n_2) \in \mathbb{Z}^3}$$

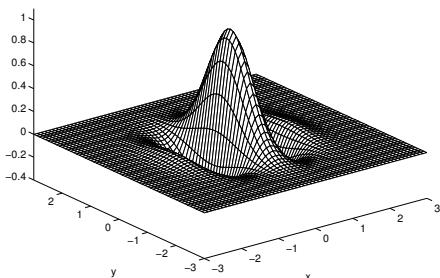
est une base orthonormée de $L^2[0, 1]^2$.

Base d'ondelettes 2D séparables

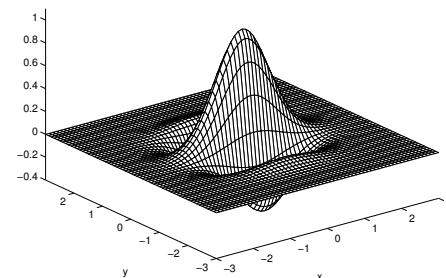
- La famille

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi_{j,n_1}(x_1) \psi_{j,n_2}(x_2) , \quad \psi_{j,n_1}(x_1) \phi_{j,n_2}(x_2) \\ , \quad \psi_{j,n_1}(x_1) \psi_{j,n_2}(x_2) \end{array} \right\}_{(j,n_1,n_2) \in \mathbb{Z}^3}$$

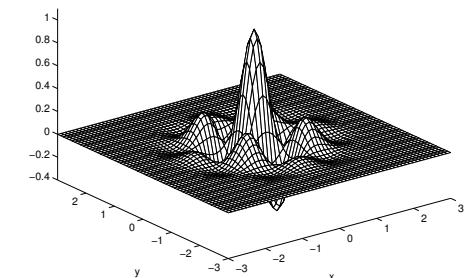
est une base orthonormée de $L^2[0, 1]^2$.



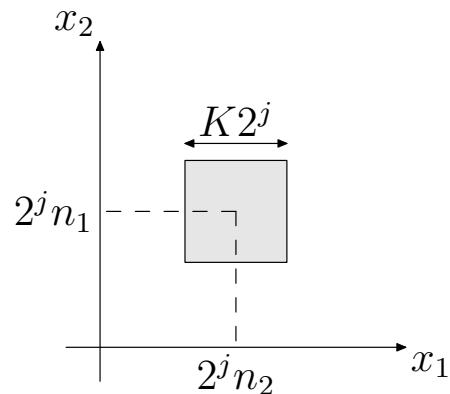
$$\phi_{j,n_1}(x_1) \psi_{j,n_2}(x_2)$$



$$\psi_{j,n_1}(x_1) \phi_{j,n_2}(x_2)$$



$$\psi_{j,n_1}(x_1) \psi_{j,n_2}(x_2)$$



Support
des
ondelettes
isotropes

Succès et échecs des bases d'ondelettes

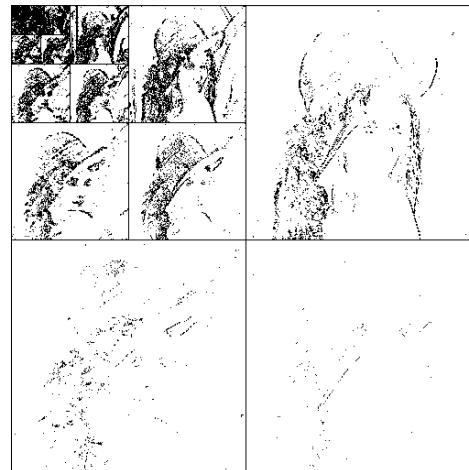
Succès et échecs des bases d'ondelettes

- Les images sont décomposées dans une base d'ondelettes 2D et les coefficients les plus grands sont conservés (JPEG-2000).

f



M plus grands coeff.



f_M



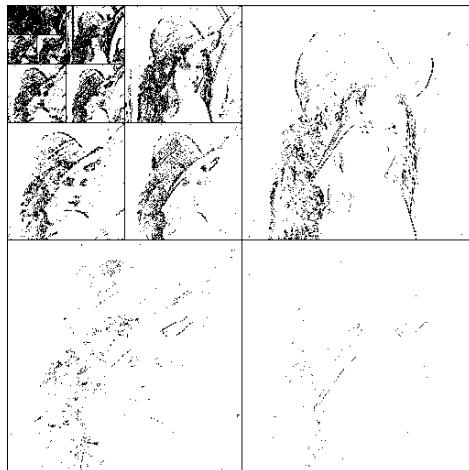
Succès et échecs des bases d'ondelettes

- Les images sont décomposées dans une base d'ondelettes 2D et les coefficients les plus grands sont conservés (JPEG-2000).

f



M plus grands coeff.



f_M



- (*Cohen, DeVore, Petrushev, Xue*) : Optimal pour les fonctions à variation bornée : $\|f - f_M\|^2 \leq C \|f\|_{TV} M^{-1}$.

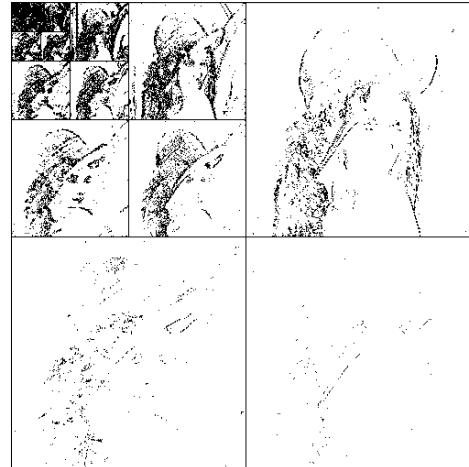
Succès et échecs des bases d'ondelettes

- Les images sont décomposées dans une base d'ondelettes 2D et les coefficients les plus grands sont conservés (JPEG-2000).



f

M plus grands coeff.



f_M

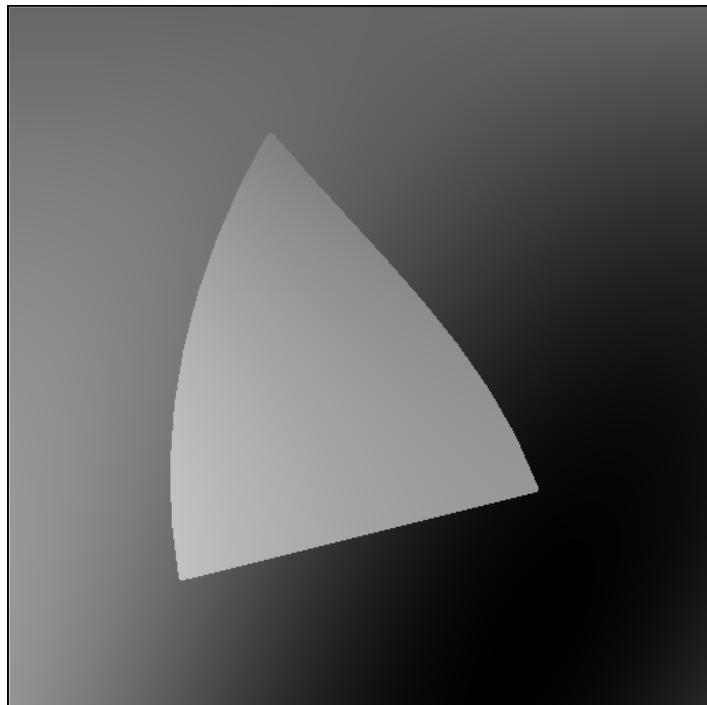


- (Cohen, DeVore, Petrushev, Xue) : Optimal pour les fonctions à variation bornée : $\|f - f_M\|^2 \leq C \|f\|_{TV} M^{-1}$.
- Mais ne prend avantage d'aucune sorte de régularité géométrique.

Approximation en ondelettes des contours

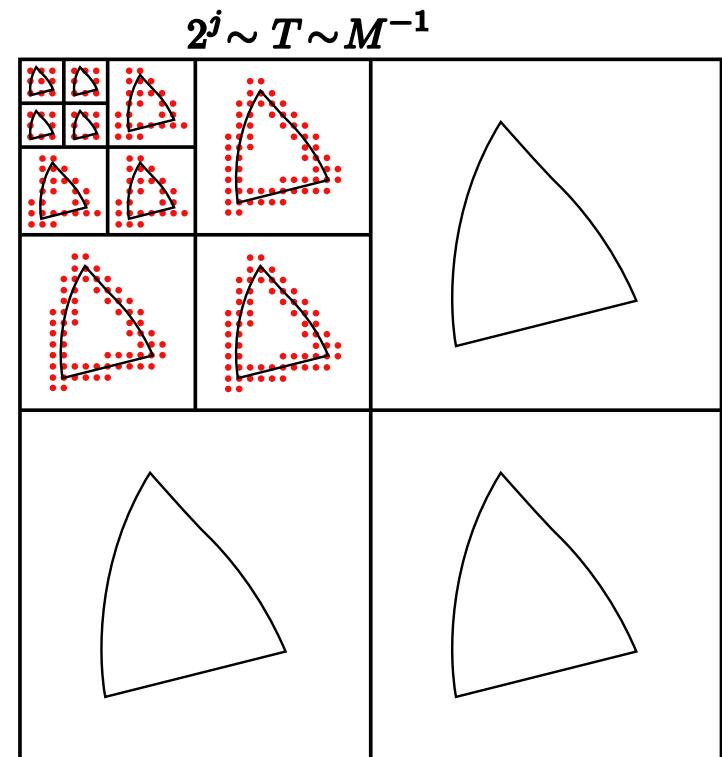
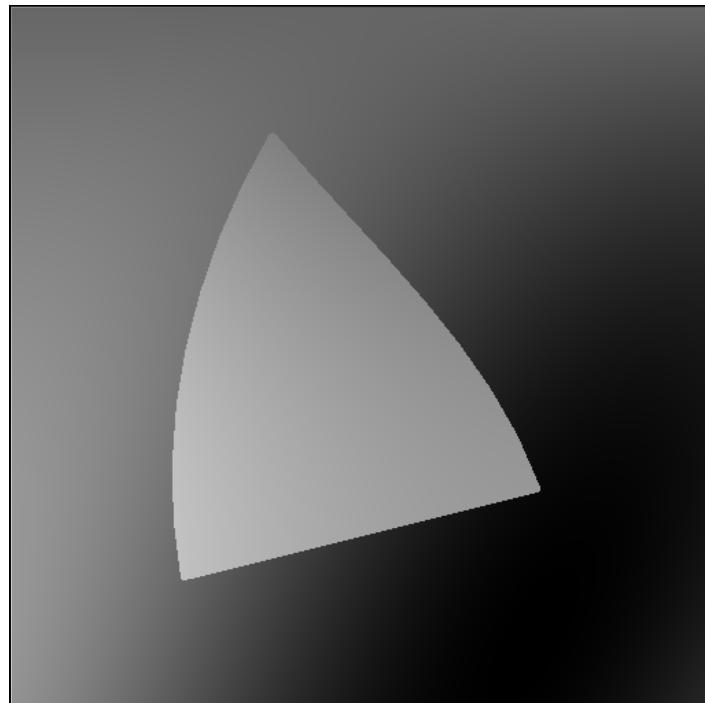
Approximation en ondelettes des contours

- Approximation de f qui est C^α en dehors de contours C^α :



Approximation en ondelettes des contours

- Approximation de f qui est C^α en dehors de contours C^α :

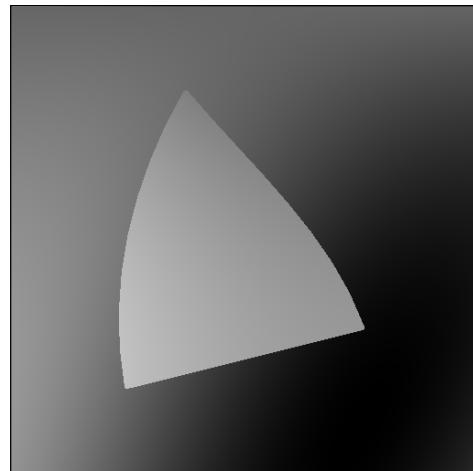


- Avec M ondelettes : $\|f - f_M\|^2 \leq C M^{-1}$.

Éléments géométriques pour les contours

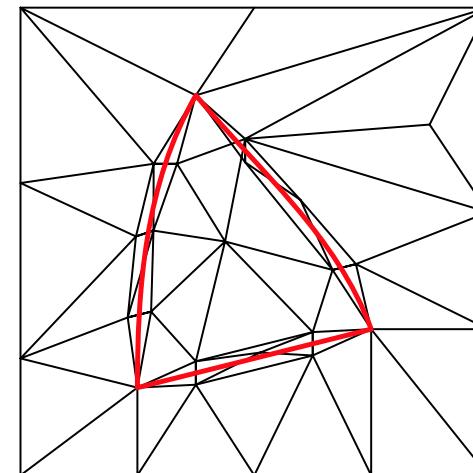
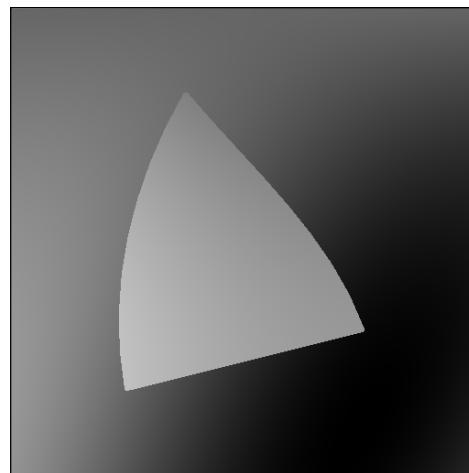
Éléments géométriques pour les contours

- Approximation de f qui est C^α en dehors de contours C^α :

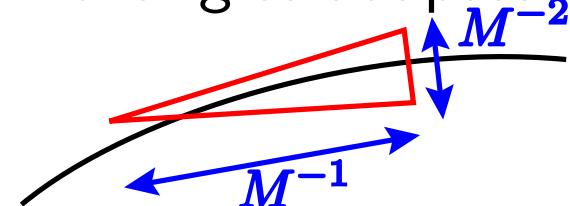


Éléments géométriques pour les contours

- Approximation de f qui est C^α en dehors de contours C^α :

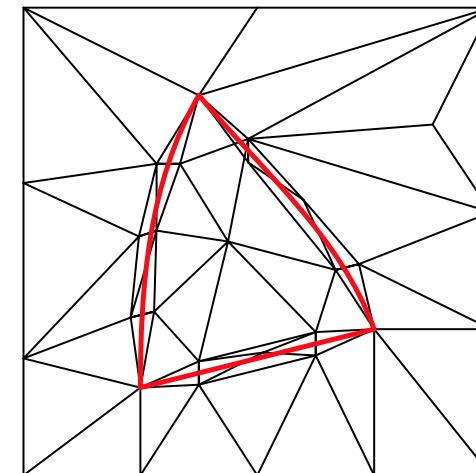
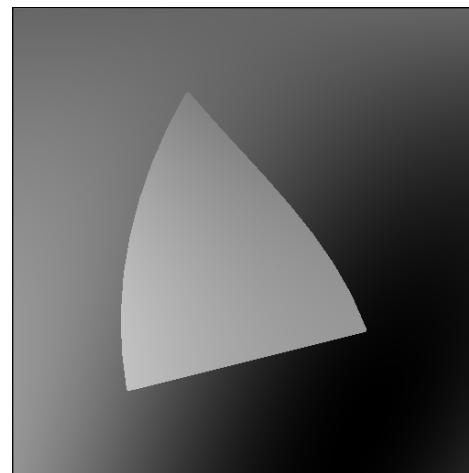


- Approximation linéaire par morceau sur M triangles adaptés :
si $\alpha \geq 2$ alors $\|f - f_M\|^2 \leq C M^{-2}$,

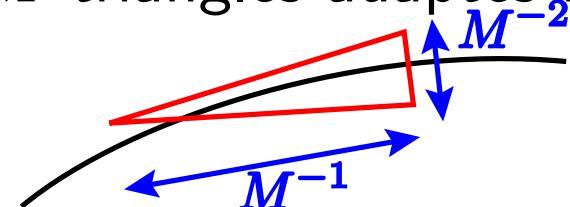


Éléments géométriques pour les contours

- Approximation de f qui est C^α en dehors de contours C^α :

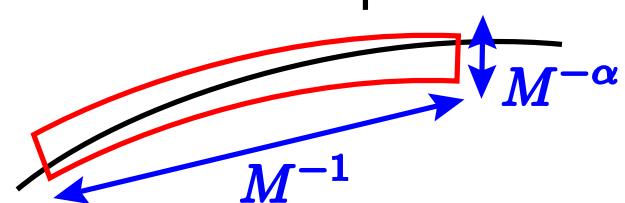


- Approximation linéaire par morceau sur M triangles adaptés :
si $\alpha \geq 2$ alors $\|f - f_M\|^2 \leq C M^{-2}$,



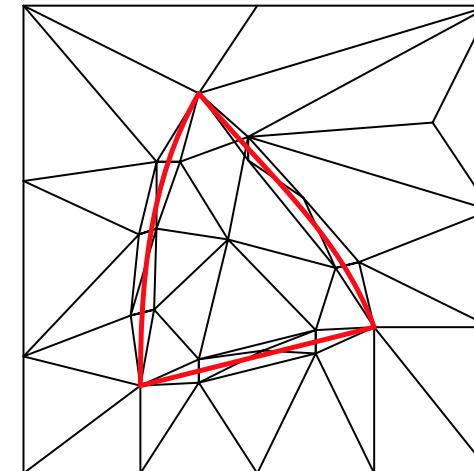
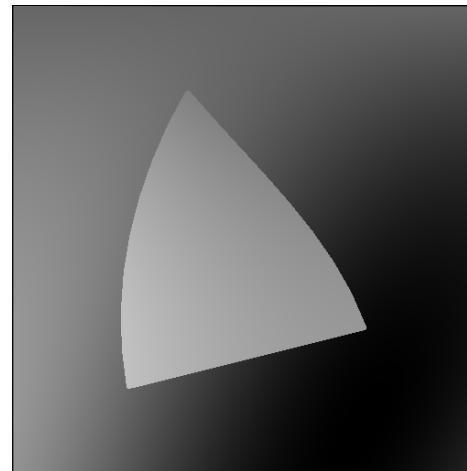
- Approximation d'ordre élevé avec M "éléments" adaptés :

$$\|f - f_M\|^2 \leq C M^{-\alpha}.$$

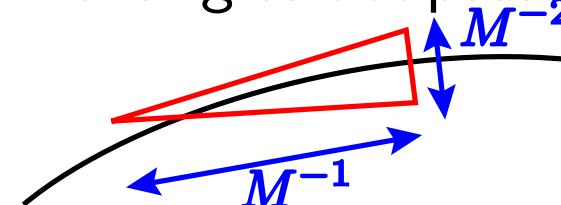


Éléments géométriques pour les contours

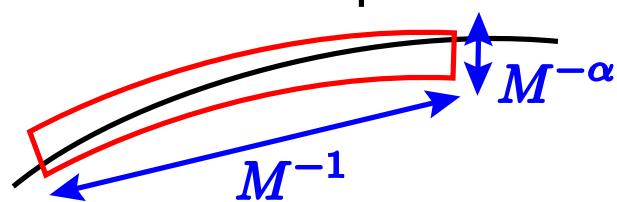
- Approximation de f qui est C^α en dehors de contours C^α :



- Approximation linéaire par morceau sur M triangles adaptés :
si $\alpha \geq 2$ alors $\|f - f_M\|^2 \leq C M^{-2}$,



- Approximation d'ordre élevé avec M "éléments" adaptés :
 $\|f - f_M\|^2 \leq C M^{-\alpha}$.



- Difficile de trouver une solution optimale mais bonnes solutions "gloutonnes" (*Dekel, Demaret, Dyn, Iske*).

Approximation en curvelets

• Définitions et propriétés

• Approximation par les coefficients de la transformée

Approximation en curvelets

- Les curvelets définissent un “tight frame” de $L^2[0, 1]^2$ avec des éléments allongés et tournés (*Candes, Donoho*) : $\{c_j(R_\theta x - \eta)\}_{j,\theta,\eta}$



Approximation en curvelets

- Les curvelets définissent un “tight frame” de $L^2[0, 1]^2$ avec des éléments allongés et tournés (*Candes, Donoho*) : $\{c_j(R_\theta x - \eta)\}_{j,\theta,\eta}$



- Si f est \mathbf{C}^α en dehors de contours \mathbf{C}^α alors avec M curvelets :

$$\text{si } \alpha \geq 2 \text{ alors } \|f - f_M\|^2 \leq C (\log M)^3 M^{-2}.$$

Approximation en curvelets

- Les curvelets définissent un “tight frame” de $L^2[0, 1]^2$ avec des éléments allongés et tournés (*Candes, Donoho*) : $\{c_j(R_\theta x - \eta)\}_{j,\theta,\eta}$



- Si f est \mathbf{C}^α en dehors de contours \mathbf{C}^α alors avec M curvelets :
si $\alpha \geq 2$ alors $\|f - f_M\|^2 \leq C (\log M)^3 M^{-2}$.
- Quasi optimal pour $\alpha = 2$.

Approximation en curvelets

- Les curvelets définissent un “tight frame” de $L^2[0, 1]^2$ avec des éléments allongés et tournés (*Candes, Donoho*) : $\{c_j(R_\theta x - \eta)\}_{j,\theta,\eta}$

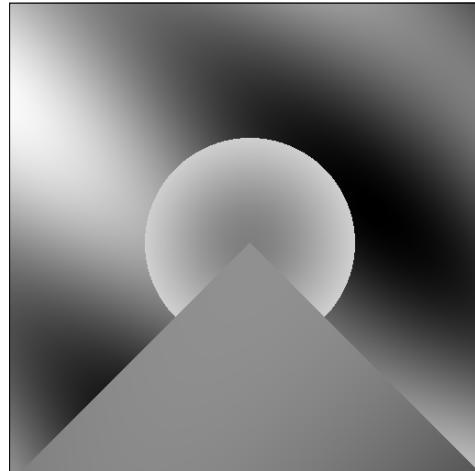


- Si f est \mathbf{C}^α en dehors de contours \mathbf{C}^α alors avec M curvelets :

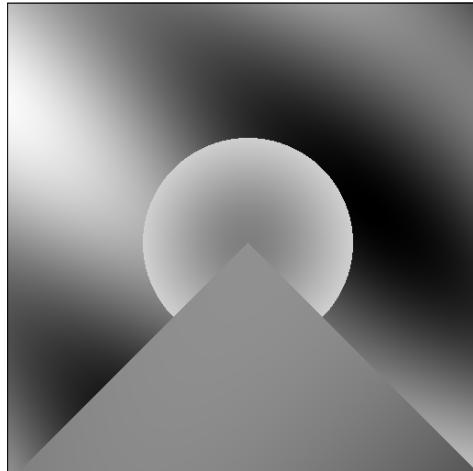
$$\text{si } \alpha \geq 2 \text{ alors } \|f - f_M\|^2 \leq C (\log M)^3 M^{-2}.$$

- Quasi optimal pour $\alpha = 2$.
- Difficile d'obtenir des bases orthogonales ou des bases de Riesz : (*Vetterli & Minh Do*).

Modèle de régularité géométrique

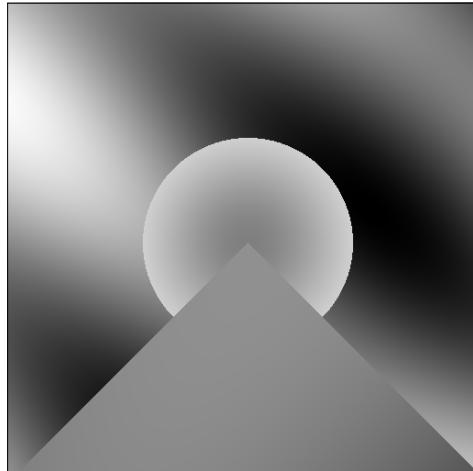


Modèle de régularité géométrique



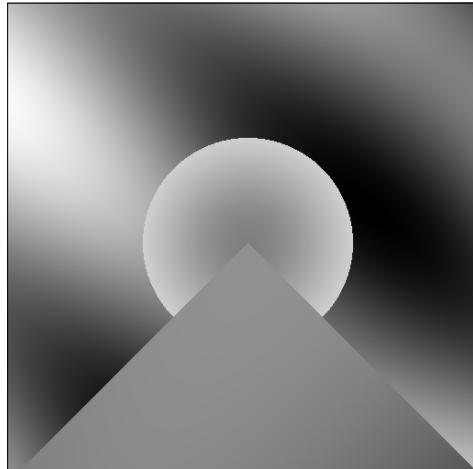
- Fonctions régulières par morceaux avec des discontinuités le long de courbes régulières.

Modèle de régularité géométrique



- Fonctions régulières par morceaux avec des discontinuités le long de courbes régulières.
- Cf modèle horizon ou fonctions étoilées (*Donoho*).

Modèle de régularité géométrique



- Fonctions régulières par morceaux avec des discontinuités le long de courbes régulières.
- Cf modèle horizon ou fonctions étoilées (*Donoho*).
- Fonctions de régularité géométrique \mathbf{C}^α :
 - $f = \tilde{f}$ ou $f = \tilde{f} \star h$,
 - $\tilde{f} : \mathbf{C}^\alpha(\Lambda)$ avec $\Lambda = [0, 1]^2 - \{\mathcal{C}_\gamma\}_{1 \leqslant \gamma \leqslant G}$,
 - $\mathcal{C}_\gamma : \mathbf{C}^\alpha +$ conditions géométriques de non tangence,
 - $h : \mathbf{C}^\alpha$ à support $\subset [-s, s]^2$ et $\|h\|_{\mathbf{C}^\alpha} \leqslant s^{-(2+\alpha)}$.

Flot géométrique segmenté

Flot géométrique segmenté

Flot géométrique segmenté

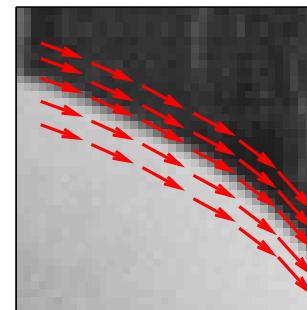
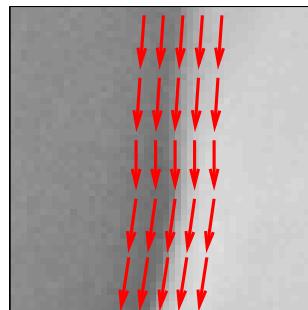
- Spécification de la géométrie \neq contours.

Flot géométrique segmenté

- Spécification de la géométrie \neq contours.
- Flot géométrique : champ de vecteurs $\vec{\tau}(x_1, x_2)$ donnant des directions dans lesquelles l'image est localement régulière.

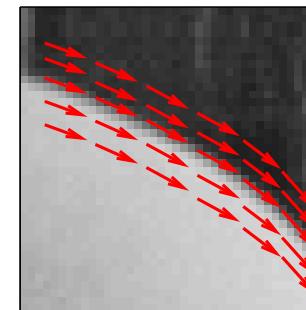
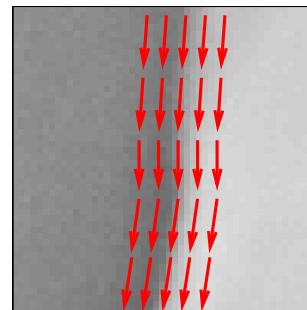
Flot géométrique segmenté

- Spécification de la géométrie \neq contours.
- Flot géométrique : champ de vecteurs $\vec{\tau}(x_1, x_2)$ donnant des directions dans lesquelles l'image est localement régulière.
- Dans une région, le flot est constant horizontalement ou verticalement.

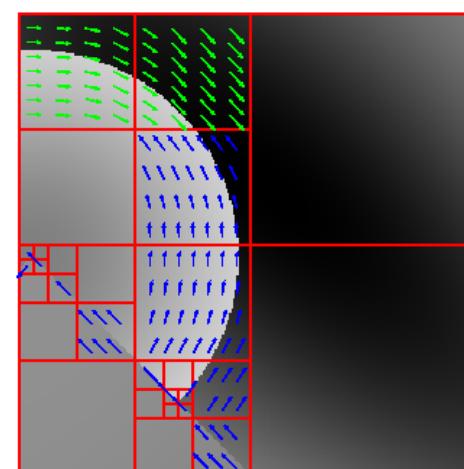
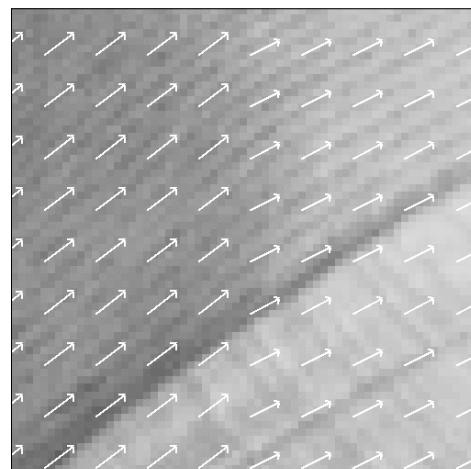


Flot géométrique segmenté

- Spécification de la géométrie \neq contours.
- Flot géométrique : champ de vecteurs $\vec{\tau}(x_1, x_2)$ donnant des directions dans lesquelles l'image est localement régulière.
- Dans une région, le flot est constant horizontalement ou verticalement.



- Nécessite une segmentation de l'image.



Base d'ondelettes déformées

• Déformation de la base d'ondelettes

• Utilisation de bases d'ondelettes déformées

• Application à l'analyse et à la synthèse

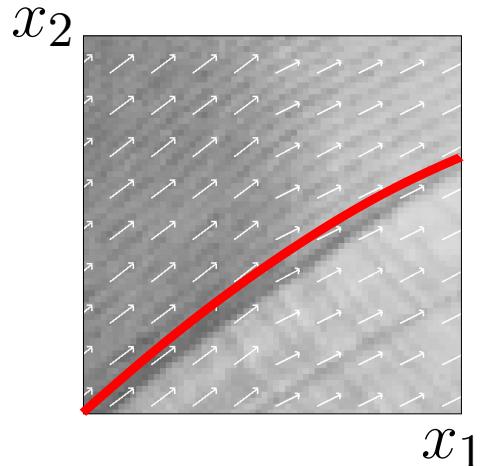
• Exemples : analyse et synthèse de signaux

• Conclusion : les bases d'ondelettes déformées sont utiles pour l'analyse et la synthèse de signaux.

Base d'ondelettes déformées

- Supposons le flot constant verticalement :

$$\vec{\tau}(x_1, x_2) = (1, c'(x_1)) .$$

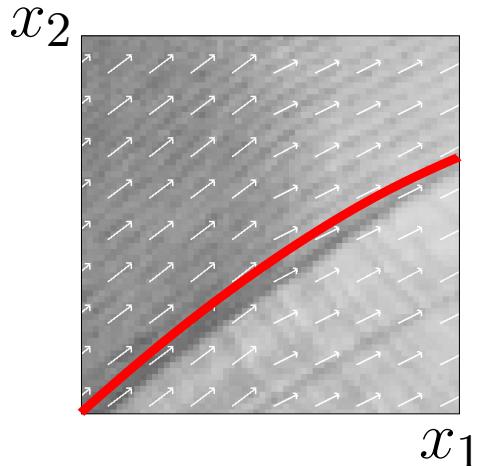


$$c(x_1) = \int_{x_{1,\min}}^{x_1} c'(u) \, du$$

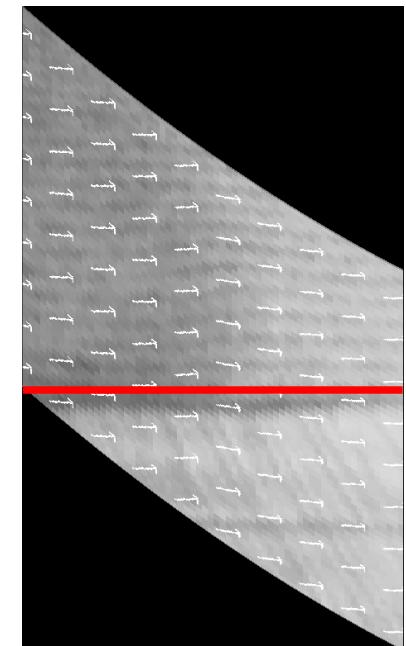
Base d'ondelettes déformées

- Supposons le flot constant verticalement :

$$\vec{\tau}(x_1, x_2) = (1, c'(x_1)) .$$



$$c(x_1) = \int_{x_{1,\min}}^{x_1} c'(u) \, du$$

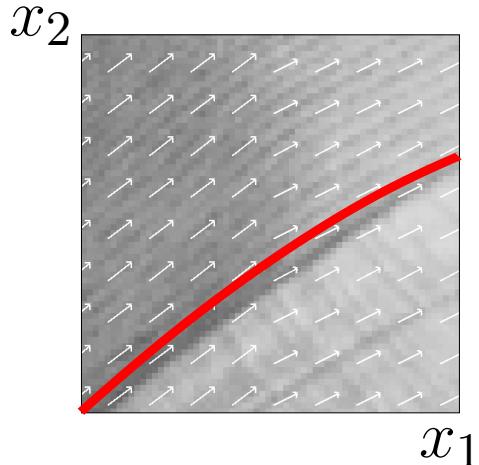


- À x_2 fixé, $f(x_1, x_2 + c(x_1))$ est une fonction régulière de x_1 .

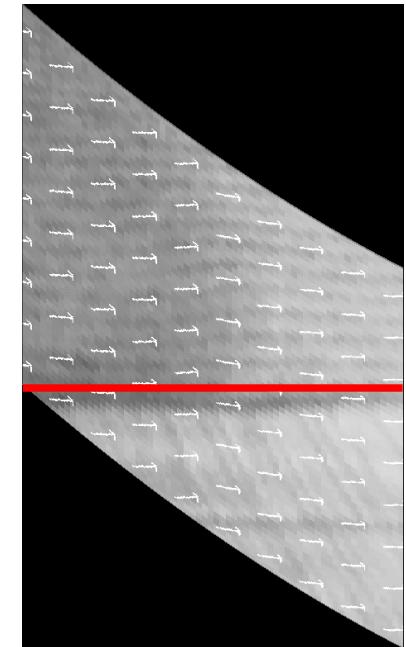
Base d'ondelettes déformées

- Supposons le flot constant verticalement :

$$\vec{\tau}(x_1, x_2) = (1, c'(x_1)) .$$



$$c(x_1) = \int_{x_{1,\min}}^{x_1} c'(u) \, du$$

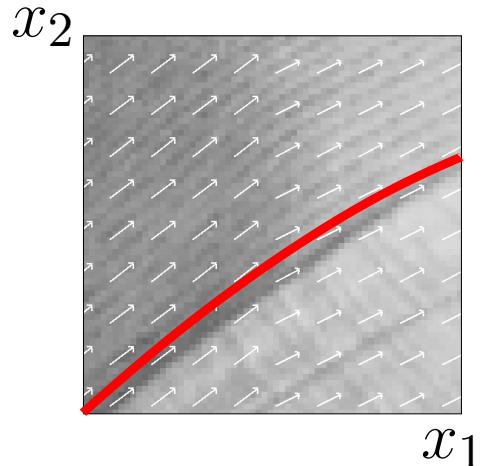


- À x_2 fixé, $f(x_1, x_2 + c(x_1))$ est une fonction régulière de x_1 .
- $\langle f(x_1, x_2 + c(x_1)) , \Psi(x_1, x_2) \rangle = \langle f(x_1, x_2) , \Psi(x_1, x_2 - c(x_1)) \rangle .$

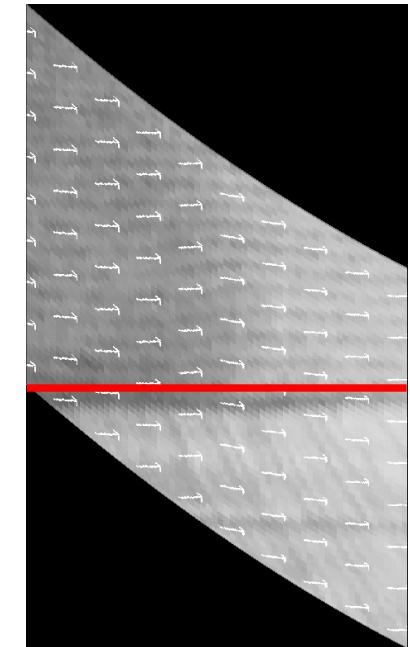
Base d'ondelettes déformées

- Supposons le flot constant verticalement :

$$\vec{\tau}(x_1, x_2) = (1, c'(x_1)) .$$



$$c(x_1) = \int_{x_{1,\min}}^{x_1} c'(u) \, du$$



- À x_2 fixé, $f(x_1, x_2 + c(x_1))$ est une fonction régulière de x_1 .
- $\langle f(x_1, x_2 + c(x_1)), \Psi(x_1, x_2) \rangle = \langle f(x_1, x_2), \Psi(x_1, x_2 - c(x_1)) \rangle$.
- On décompose donc f dans une *base d'ondelettes déformées* de $L^2(\Omega)$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi_{j,m_1}(x_1) \psi_{j,m_2}(x_2 - c(x_1)) , \quad \psi_{j,m_1}(x_1) \phi_{j,m_2}(x_2 - c(x_1)) \\ , \quad \psi_{j,m_1}(x_1) \psi_{j,m_2}(x_2 - c(x_1)) \end{array} \right\}_{j,m_1,m_2} .$$

Bandelettisation

Bandelettisation

- Les fonctions de la base doivent avoir des moments nuls selon x_1 (direction du flot).

Bandelettisation

- Les fonctions de la base doivent avoir des moments nuls selon x_1 (direction du flot).
- Base d'ondelettes déformées de $L^2(\Omega)$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi_{j,m_1}(x_1) \psi_{j,m_2}(x_2 - c(x_1)) , \quad \psi_{j,m_1}(x_1) \phi_{j,m_2}(x_2 - c(x_1)) \\ , \quad \psi_{j,m_1}(x_1) \psi_{j,m_2}(x_2 - c(x_1)) \end{array} \right\}_{\substack{j \\ m_1, m_2}}.$$

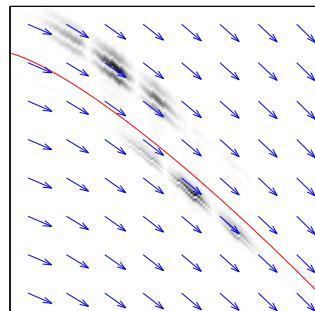
Isotrope Isotrope

Bandelettisation

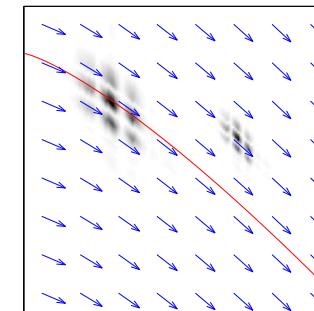
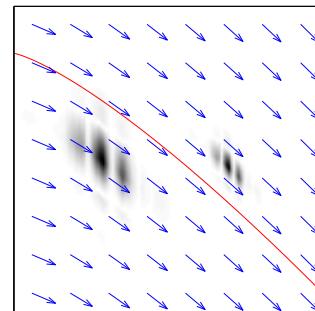
- Les fonctions de la base doivent avoir des moments nuls selon x_1 (direction du flot).
- Bandelettisation : remplace $\{\phi_{j,m_1}(x_1)\}_{m_1}$ par une famille d'ondelettes $\{\psi_{l,m_1}(x_1)\}_{l>j, m_1}$ qui génère le même espace.
- Obtention d'une *base de bandelettes* de $L^2(\Omega)$:

$$\left\{ \begin{array}{c} \psi_{l,m_1}(x_1) \psi_{j,m_2}(x_2 - c(x_1)) , \quad \psi_{j,m_1}(x_1) \phi_{j,m_2}(x_2 - c(x_1)) \\ , \quad \psi_{j,m_1}(x_1) \psi_{j,m_2}(x_2 - c(x_1)) \end{array} \right\}_{\substack{j,l>j \\ m_1,m_2}} .$$

Anisotrope



Isotrope



Base segmentée de bandelettes

Base segmentée de bandelettes

- Le support de l'image est segmenté en régions munies soit
 - d'une base de bandelettes à flot constant verticalement,
 - d'une base de bandelettes à flot constant horizontalement,
 - d'une base d'ondelettes sans flot (régularité isotrope).



Base segmentée de bandelettes

- Le support de l'image est segmenté en régions munies soit
 - d'une base de bandelettes à flot constant verticalement,
 - d'une base de bandelettes à flot constant horizontalement,
 - d'une base d'ondelettes sans flot (régularité isotrope).



- Transformée rapide en bandelettes ($O(N^2)$) :
 - rééchantillonnage, transformée en ondelettes déformées, bandelettisation.

Base segmentée de bandelettes

- Le support de l'image est segmenté en régions munies soit
 - d'une base de bandelettes à flot constant verticalement,
 - d'une base de bandelettes à flot constant horizontalement,
 - d'une base d'ondelettes sans flot (régularité isotrope).



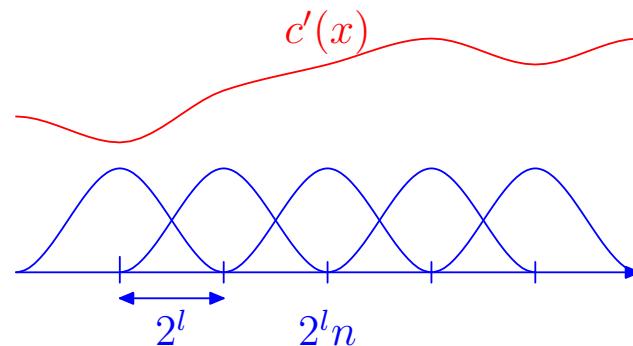
- Transformée rapide en bandelettes ($O(N^2)$) :
 - rééchantillonnage, transformée en ondelettes déformées, bandelettisation.
- Pas de discontinuités aux frontières grâce à un schéma de lifting adapté.

Détermination d'un flot paramétré

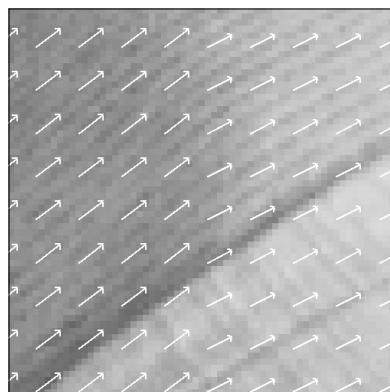
Détermination d'un flot paramétré

- Un flot constant verticalement $\vec{\tau}(x_1, x_2) = (1, c'(x_1))$ dans Ω est paramétré par

$$c'(x) = \sum_{n=1}^{L2^{-l}} \alpha_n \phi(2^{-l}x - n)$$



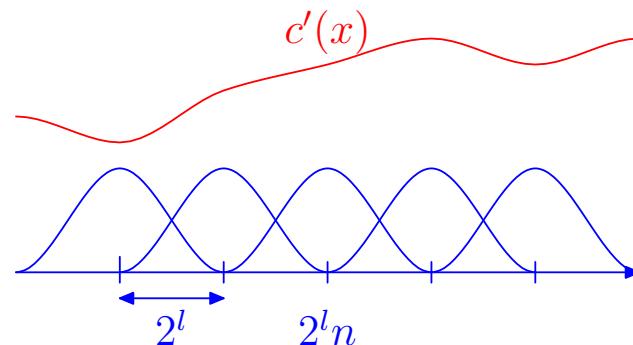
et les $L 2^{-l}$ paramètres α_n .



Détermination d'un flot paramétré

- Un flot constant verticalement $\vec{\tau}(x_1, x_2) = (1, c'(x_1))$ dans Ω est paramétré par

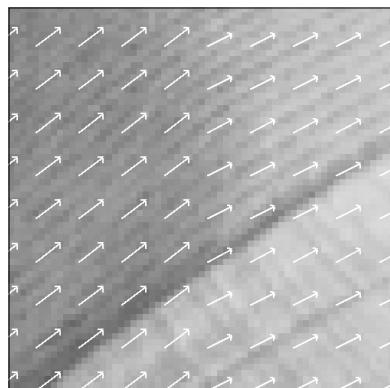
$$c'(x) = \sum_{n=1}^{L2^{-l}} \alpha_n \phi(2^{-l}x - n)$$



et les $L 2^{-l}$ paramètres α_n .

- Minimisation de

$$\int_{\Omega} \left| \nabla f(x_1, x_2) \cdot \vec{\tau}(x_1, x_2) \right|^2 dx_1 dx_2 = \int_{\Omega} \left| \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial \vec{\tau}(x_1, x_2)} \right|^2 dx_1 dx_2 .$$



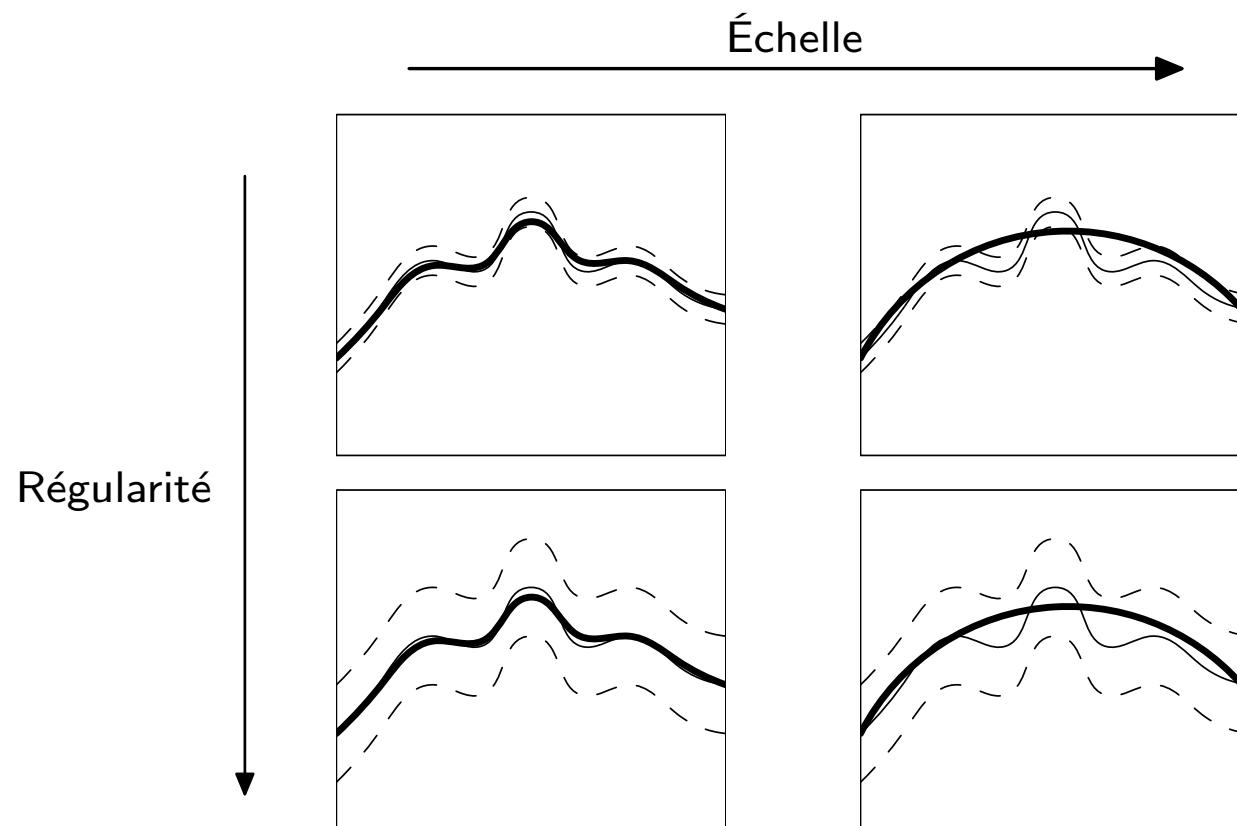
Choix de l'échelle de paramétrisation du flot

Choix de l'échelle de paramétrisation du flot

- Adaptation de l'échelle 2^l à la régularité du signal le long du flot :

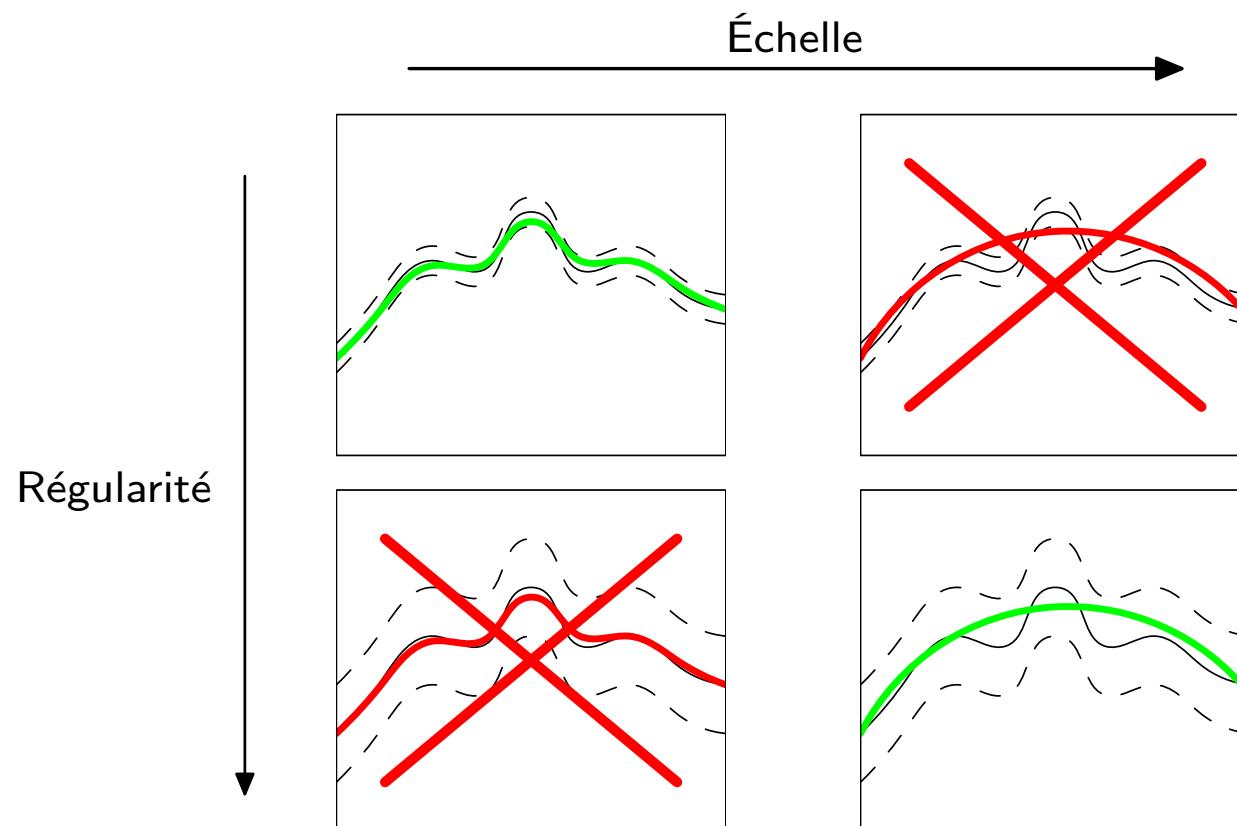
Choix de l'échelle de paramétrisation du flot

- Adaptation de l'échelle 2^l à la régularité du signal le long du flot :



Choix de l'échelle de paramétrisation du flot

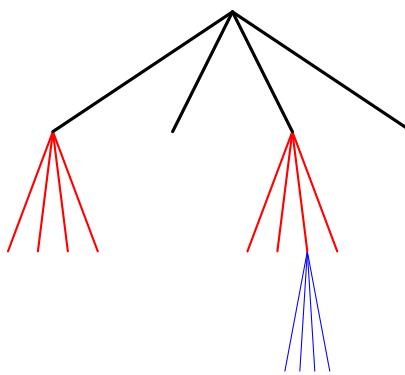
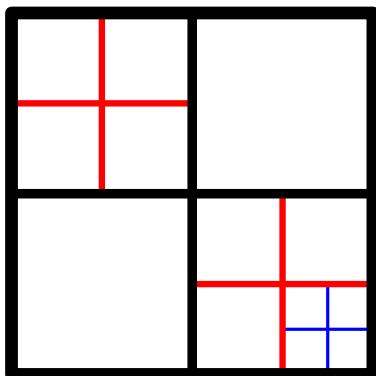
- Adaptation de l'échelle 2^l à la régularité du signal le long du flot :



Approximation M termes

Approximation M termes

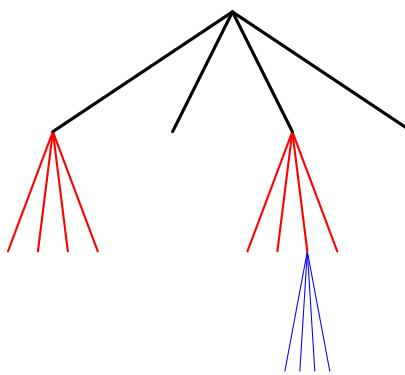
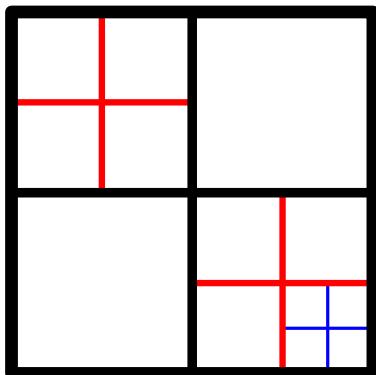
- Une approximation en bandelettes est donnée par :
 - une segmentation en carrés dyadiques, représentée par les M_s nœuds intérieurs de l'arbre quaternaire de la segmentation,
 - à l'intérieur de chaque carré Ω_i de la segmentation par :
 - $M_{g,i}$ coefficients du flot géométrique,
 - $M_{b,i}$ coefficients de bandelettes au dessus d'un seuil T .



Approximation M termes

- Une approximation en bandelettes est donnée par :
 - une segmentation en carrés dyadiques, représentée par les M_s nœuds intérieurs de l'arbre quaternaire de la segmentation,
 - à l'intérieur de chaque carré Ω_i de la segmentation par :
 - $M_{g,i}$ coefficients du flot géométrique,
 - $M_{b,i}$ coefficients de bandelettes au dessus d'un seuil T .
- Nombre total de paramètres :

$$M = M_s + \sum_i (M_{g,i} + M_{b,i}) = \sum_i (M_{s,i} + M_{g,i} + M_{b,i}) .$$



Optimisation de l'approximation

Optimisation de l'approximation

- Minimiser $\|f - f_M\|^2$ pour un nombre fixé M de paramètres.

Optimisation de l'approximation

- Minimiser $\|f - f_M\|^2$ pour un nombre fixé M de paramètres.
- Approche lagrangienne : trouver le meilleur flot géométrique segmenté qui minimise

$$\|f - f_M\|^2 + T^2 M .$$

Optimisation de l'approximation

- Minimiser $\|f - f_M\|^2$ pour un nombre fixé M de paramètres.
- Approche lagrangienne : trouver le meilleur flot géométrique segmenté qui minimise

$$\|f - f_M\|^2 + T^2 M .$$

- Additivité du Lagrangien :

$$\|f - f_M\|^2 + T^2 M = \sum_i \|f - f_M\|_{\Omega_i}^2 + T^2 M_i .$$

Optimisation de l'approximation

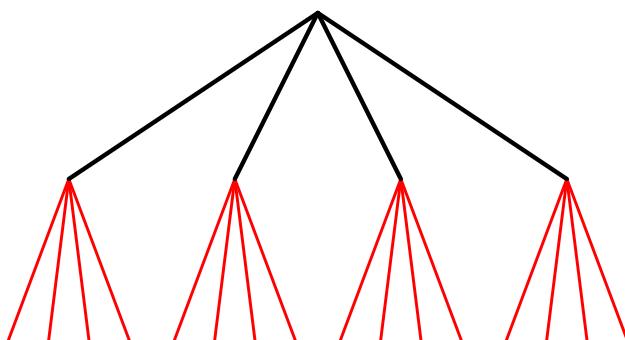
- Minimiser $\|f - f_M\|^2$ pour un nombre fixé M de paramètres.
- Approche lagrangienne : trouver le meilleur flot géométrique segmenté qui minimise

$$\|f - f_M\|^2 + T^2 M .$$

- Additivité du Lagrangien :

$$\|f - f_M\|^2 + T^2 M = \sum_i \|f - f_M\|_{\Omega_i}^2 + T^2 M_i .$$

- Algorithme rapide (CART) : programmation dynamique de bas en haut sur la segmentation en arbre quaternaire.



Optimisation de l'approximation

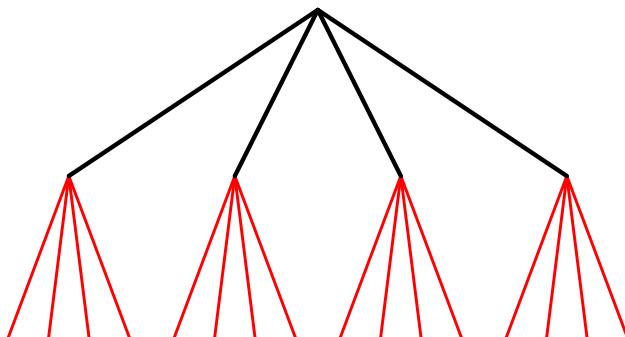
- Minimiser $\|f - f_M\|^2$ pour un nombre fixé M de paramètres.
- Approche lagrangienne : trouver le meilleur flot géométrique segmenté qui minimise

$$\|f - f_M\|^2 + T^2 M .$$

- Additivité du Lagrangien :

$$\|f - f_M\|^2 + T^2 M = \sum_i \|f - f_M\|_{\Omega_i}^2 + T^2 M_i .$$

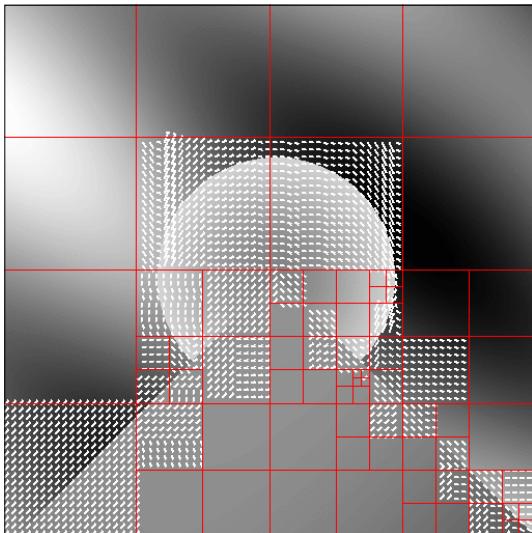
- Algorithme rapide (CART) : programmation dynamique de bas en haut sur la segmentation en arbre quaternaire.
- Complexité : $O(N^2 (\log N)^2)$ pour N^2 pixels.



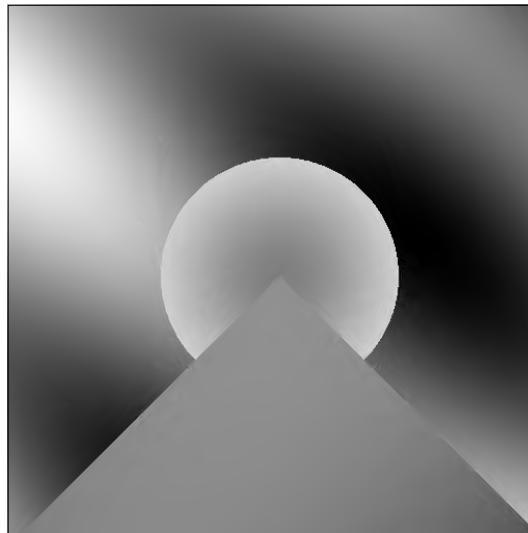
Fonction régulière par morceaux

Fonction régulière par morceaux

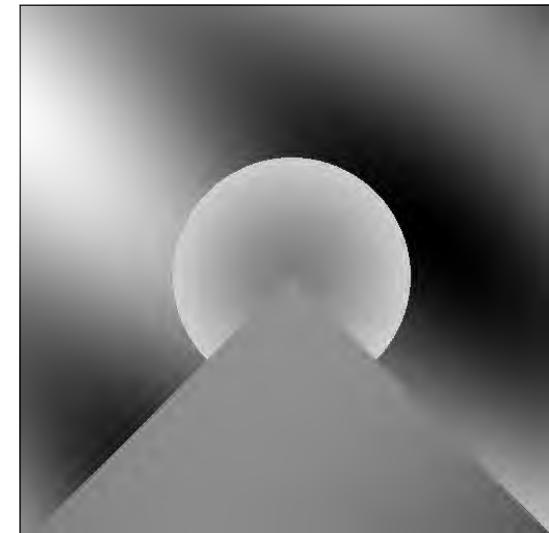
M=2650



PSNR = 45,97 dB

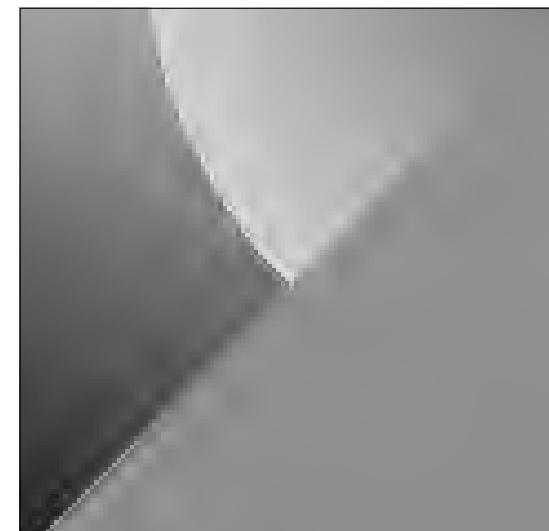
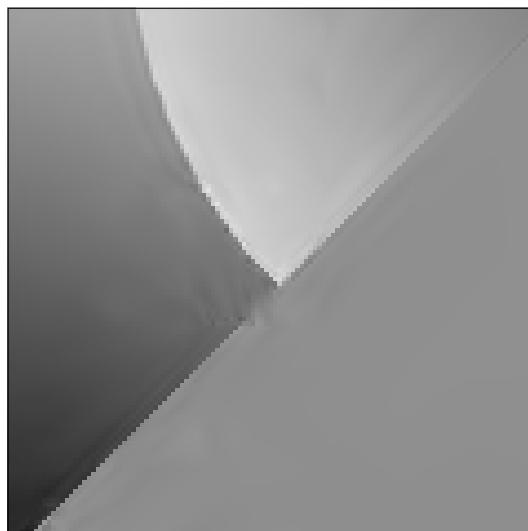


PSNR = 40,17 dB



Bandelettes

Ondelettes

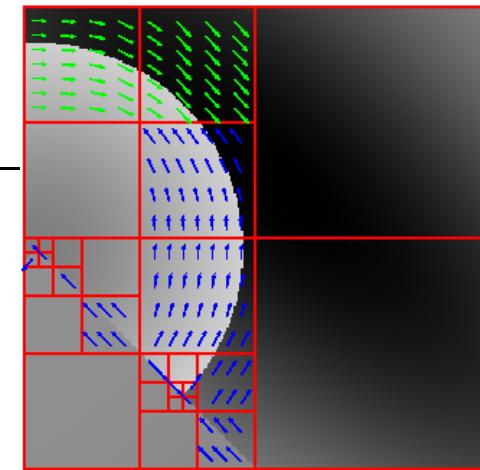


Théorème d'approximation

Théorème d'approximation

- Théorème : Si f est de régularité géométrique C^α ($f = \tilde{f}$ ou $f = \tilde{f} \star h$ avec $\tilde{f} C^\alpha$ en dehors de courbes C^α par morceaux avec des conditions de non tangence) alors

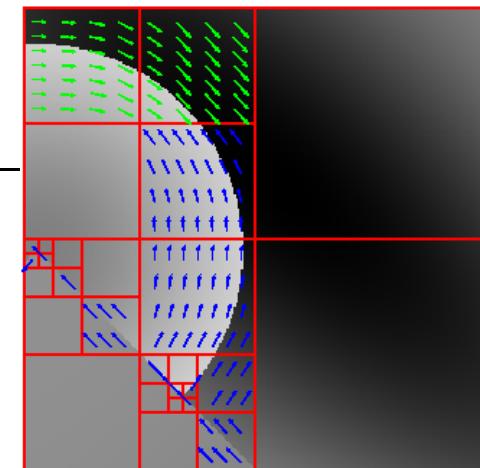
$$\|f - f_M\|^2 \leq C M^{-\alpha}.$$



Théorème d'approximation

- Théorème : Si f est de régularité géométrique C^α ($f = \tilde{f}$ ou $f = \tilde{f} \star h$ avec $\tilde{f} C^\alpha$ en dehors de courbes C^α par morceaux avec des conditions de non tangence) alors

$$\|f - f_M\|^2 \leq C M^{-\alpha}.$$

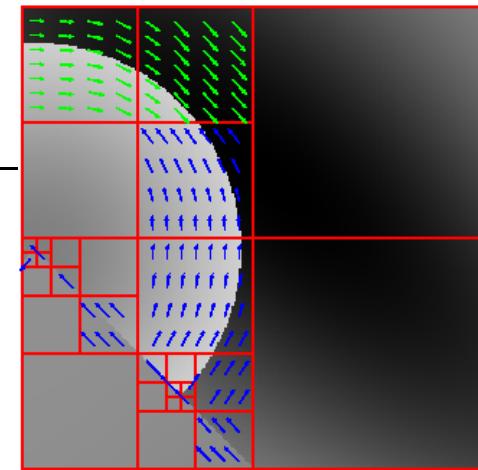


- Adaptivité : degré de régularité α inconnu.

Théorème d'approximation

- Théorème : Si f est de régularité géométrique C^α ($f = \tilde{f}$ ou $f = \tilde{f} \star h$ avec $\tilde{f} C^\alpha$ en dehors de courbes C^α par morceaux avec des conditions de non tangence) alors

$$\|f - f_M\|^2 \leq C M^{-\alpha}.$$

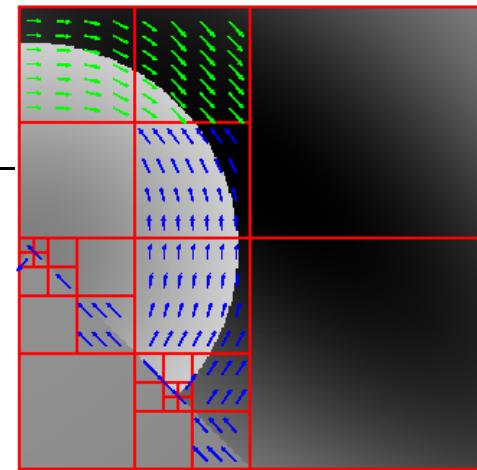


- Adaptivité : degré de régularité α inconnu.
- Optimalité : exposant de décroissance α .

Théorème d'approximation

- Théorème : Si f est de régularité géométrique C^α ($f = \tilde{f}$ ou $f = \tilde{f} \star h$ avec $\tilde{f} \in C^\alpha$ en dehors de courbes C^α par morceaux avec des conditions de non tangence) alors

$$\|f - f_M\|^2 \leq C M^{-\alpha}.$$

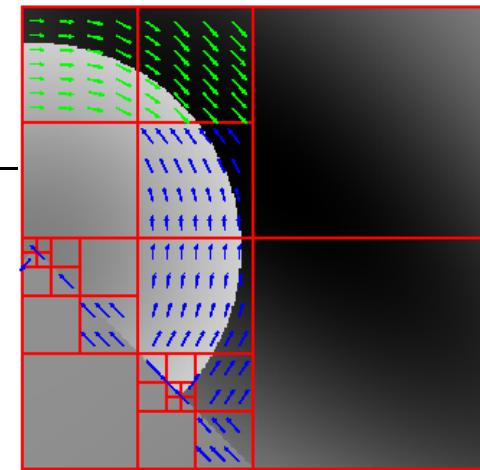


- Adaptivité : degré de régularité α inconnu.
- Optimalité : exposant de décroissance α .
- Comparaison :
 - Ondelettes isotropes : $\|f - f_M\|^2 \leq C M^{-1}$.
 - Curvelets : $\|f - f_M\|^2 \leq C (\log M)^3 M^{-2}$.

Théorème d'approximation

- Théorème : Si f est de régularité géométrique C^α ($f = \tilde{f}$ ou $f = \tilde{f} \star h$ avec $\tilde{f} \in C^\alpha$ en dehors de courbes C^α par morceaux avec des conditions de non tangence) alors

$$\|f - f_M\|^2 \leq C M^{-\alpha}.$$



- Adaptivité : degré de régularité α inconnu.
- Optimalité : exposant de décroissance α .
- Comparaison :
 - Ondelettes isotropes : $\|f - f_M\|^2 \leq C M^{-1}$.
 - Curvelets : $\|f - f_M\|^2 \leq C (\log M)^3 M^{-2}$.
- Modification des bandelettes.

Bandelettes modifiées

Bandelettes modifiées

- Représentation :
- Sélection de la géométrie :

Bandelettes modifiées

- Représentation :
 - Base \Rightarrow frame (redondance).
- Sélection de la géométrie :

Bandelettes modifiées

- Représentation :
 - Base \Rightarrow frame (redondance).
 - Union des bases de bandelettes associées aux tubes englobant les carrés dyadiques.
- Sélection de la géométrie :

Bandelettes modifiées

- Représentation :
 - Base \Rightarrow frame (redondance).
 - Union des bases de bandelettes associées aux tubes englobant les carrés dyadiques.
- Sélection de la géométrie :
 - Estimation présentée possible uniquement si les sauts des discontinuités de \tilde{f} sont suffisamment marqués.

Bandelettes modifiées

- Représentation :
 - Base \Rightarrow frame (redondance).
 - Union des bases de bandelettes associées aux tubes englobant les carrés dyadiques.
- Sélection de la géométrie :
 - Estimation présentée possible uniquement si les sauts des discontinuités de \tilde{f} sont suffisamment marqués.
 - Cas général : exploration exhaustive des géométries à une précision ϵ près

$$c'(x) = \sum_{n=1}^{L2^{-l}} \alpha_n \phi(2^{-l}x - n) \quad \forall \alpha_n \in \epsilon\mathbb{Z} \cap [-2, 2] .$$

Bandelettes modifiées

- Représentation :
 - Base \Rightarrow frame (redondance).
 - Union des bases de bandelettes associées aux tubes englobant les carrés dyadiques.
- Sélection de la géométrie :
 - Estimation présentée possible uniquement si les sauts des discontinuités de \tilde{f} sont suffisamment marqués.
 - Cas général : exploration exhaustive des géométries à une précision ϵ près

$$c'(x) = \sum_{n=1}^{L2^{-l}} \alpha_n \phi(2^{-l}x - n) \quad \forall \alpha_n \in \epsilon\mathbb{Z} \cap [-2, 2] .$$

- Pb : complexité exponentielle de l'optimisation.

Flot polynomial par morceaux

Flot polynomial par morceaux

- Complexité de l'optimisation liée au nombre de géométries possibles.

Flot polynomial par morceaux

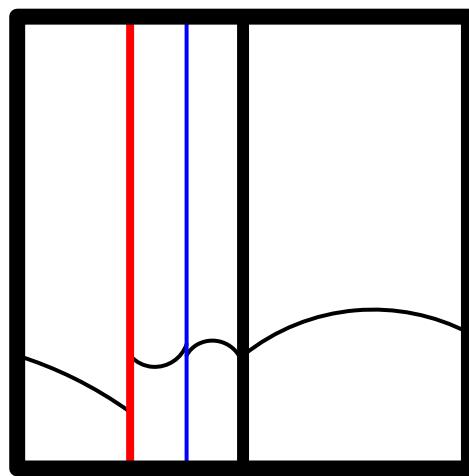
- Complexité de l'optimisation liée au nombre de géométries possibles.
- Réduction du nombre de géométries à explorer.

Flot polynomial par morceaux

- Complexité de l'optimisation liée au nombre de géométries possibles.
- Réduction du nombre de géométries à explorer.
- Flot polynomial : $c'(x) = \sum_{n=0}^p \alpha_n x^n$.

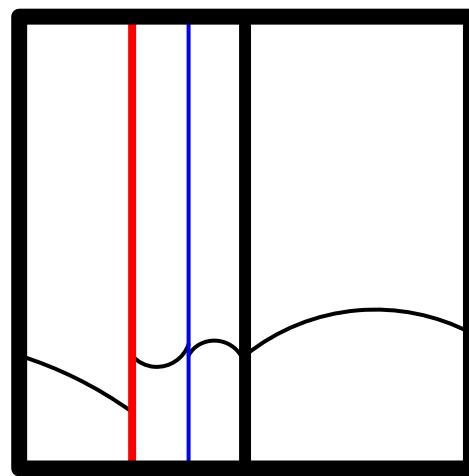
Flot polynomial par morceaux

- Complexité de l'optimisation liée au nombre de géométries possibles.
- Réduction du nombre de géométries à explorer.
- Flot polynomial : $c'(x) = \sum_{n=0}^p \alpha_n x^n$.
- Redécoupage des carrés dyadiques en rectangles dyadiques.



Flot polynomial par morceaux

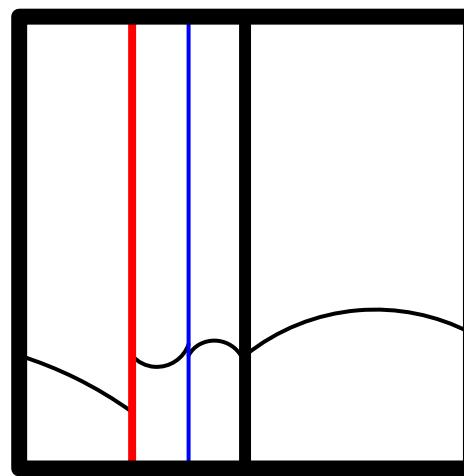
- Complexité de l'optimisation liée au nombre de géométries possibles.
- Réduction du nombre de géométries à explorer.
- Flot polynomial : $c'(x) = \sum_{n=0}^p \alpha_n x^n$.
- Redécoupage des carrés dyadiques en rectangles dyadiques.



- Algorithme d'optimisation de complexité polynomiale ($O(N^{3+p} \log^2 N)$).

Flot polynomial par morceaux

- Complexité de l'optimisation liée au nombre de géométries possibles.
- Réduction du nombre de géométries à explorer.
- Flot polynomial : $c'(x) = \sum_{n=0}^p \alpha_n x^n$.
- Redécoupage des carrés dyadiques en rectangles dyadiques.



- Algorithme d'optimisation de complexité polynomiale ($O(N^{3+p} \log^2 N)$).
- Apparition d'un facteur logarithmique dans la décroissance :

$$\|f - f_M\|^2 \leq CM^{-\alpha} \log^{\alpha+1} M$$

Compression d'image

Compression d'image

- Lien entre la compression et l'approximation non linéaire.

Compression d'image

- Lien entre la compression et l'approximation non linéaire.
- Une image compressée f_R est obtenue à partir de f en :
 - choisissant une segmentation et un flot quantifié,
 - quantifiant uniformément les coefficients de bandelettes avec un pas de taille Δ .
 - effectuant le codage entropique de tous les paramètres avec un total de R bits.

Compression d'image

- Lien entre la compression et l'approximation non linéaire.
- Une image compressée f_R est obtenue à partir de f en :
 - choisissant une segmentation et un flot quantifié,
 - quantifiant uniformément les coefficients de bandelettes avec un pas de taille Δ .
 - effectuant le codage entropique de tous les paramètres avec un total de R bits.
- Optimisation de la géométrie (segmentation et flot) pour minimiser le lagrangien :

$$\|f - f_R\|^2 + \lambda^2 \Delta^2 R$$

Compression d'image

- Lien entre la compression et l'approximation non linéaire.
- Une image compressée f_R est obtenue à partir de f en :
 - choisissant une segmentation et un flot quantifié,
 - quantifiant uniformément les coefficients de bandelettes avec un pas de taille Δ .
 - effectuant le codage entropique de tous les paramètres avec un total de R bits.
- Optimisation de la géométrie (segmentation et flot) pour minimiser le lagrangien :
$$\|f - f_R\|^2 + \lambda^2 \Delta^2 R$$
- $O(N^2 (\log N)^2)$ opérations.

Compression d'image

- Lien entre la compression et l'approximation non linéaire.
- Une image compressée f_R est obtenue à partir de f en :
 - choisissant une segmentation et un flot quantifié,
 - quantifiant uniformément les coefficients de bandelettes avec un pas de taille Δ .
 - effectuant le codage entropique de tous les paramètres avec un total de R bits.
- Optimisation de la géométrie (segmentation et flot) pour minimiser le lagrangien :

$$\|f - f_R\|^2 + \lambda^2 \Delta^2 R$$

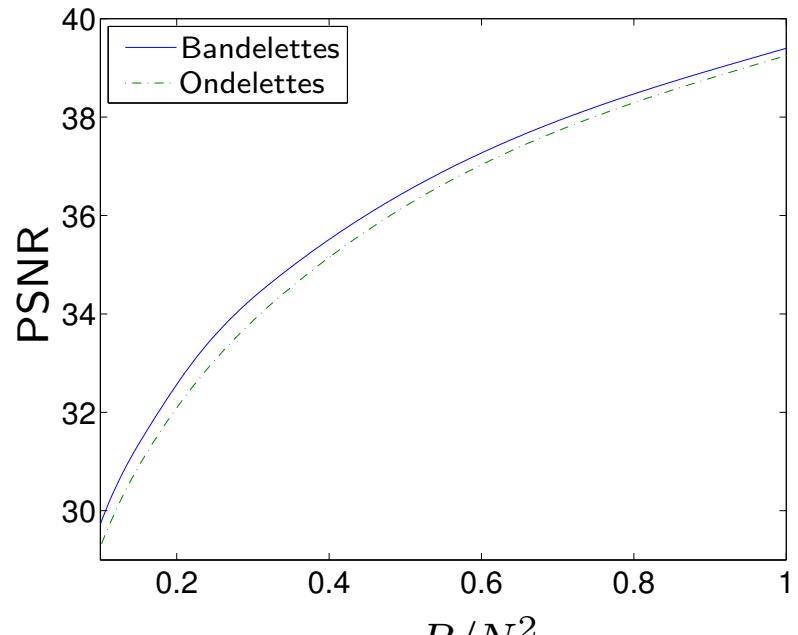
- $O(N^2 (\log N)^2)$ opérations.
- Résultat théorique :

$$\|f - f_R\|^2 \leq CR^{-\alpha} |\log R|^{\alpha+1}$$

Originale



Distorsion-Débit



$R/N^2 = 0,22 \text{ bpp}$

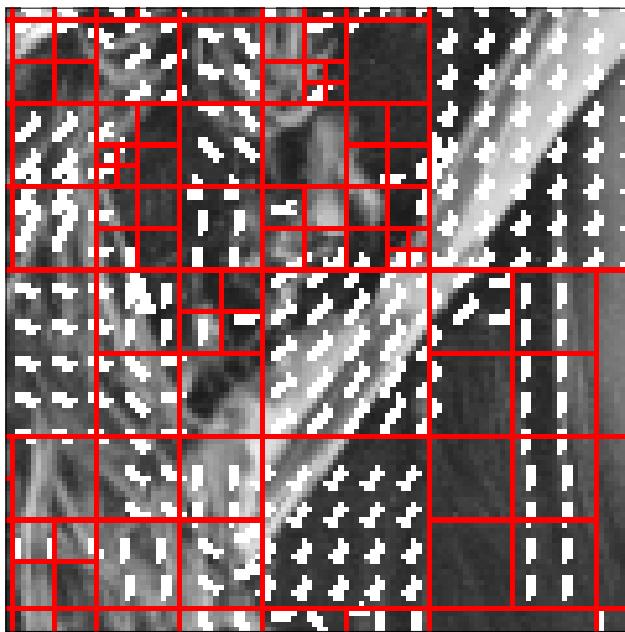
Bandelettes (33,05 db)



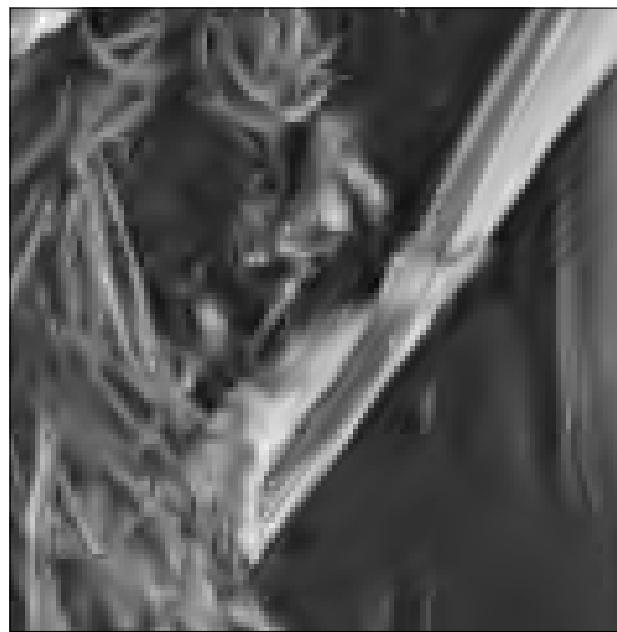
R/N^2
Ondelettes (32,54 db)



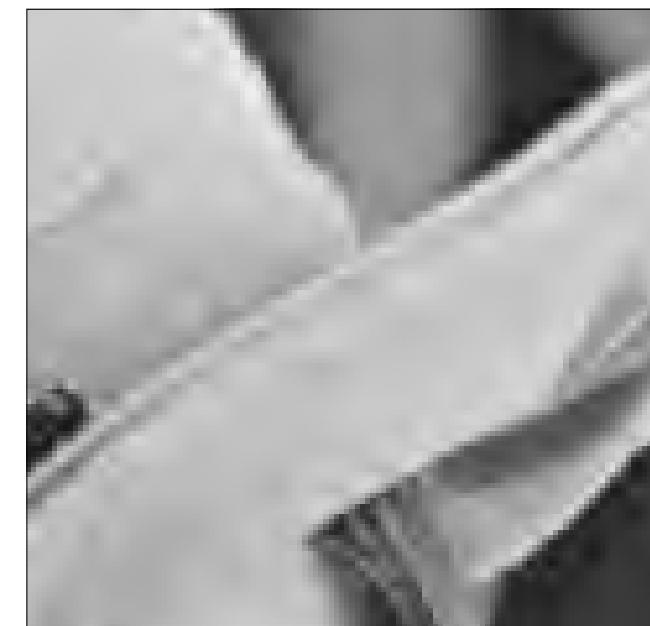
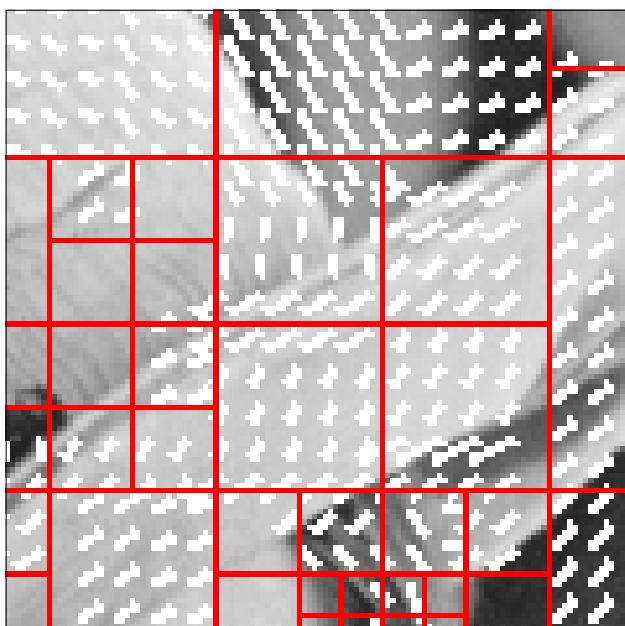
Originale



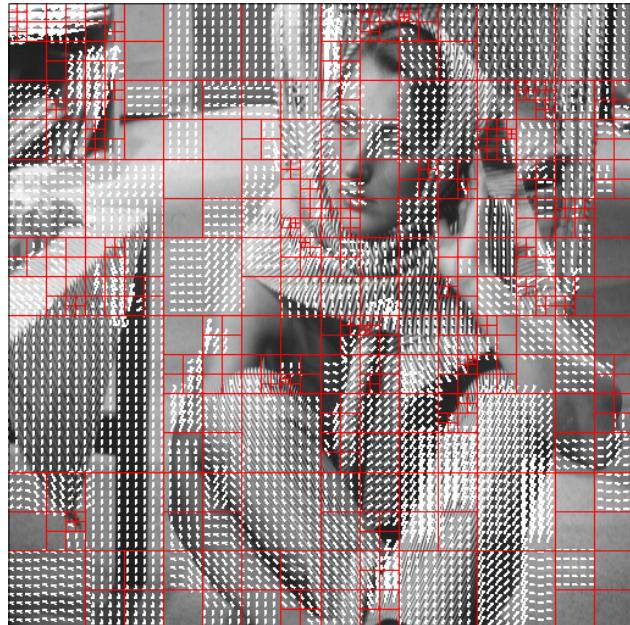
Bandelettes



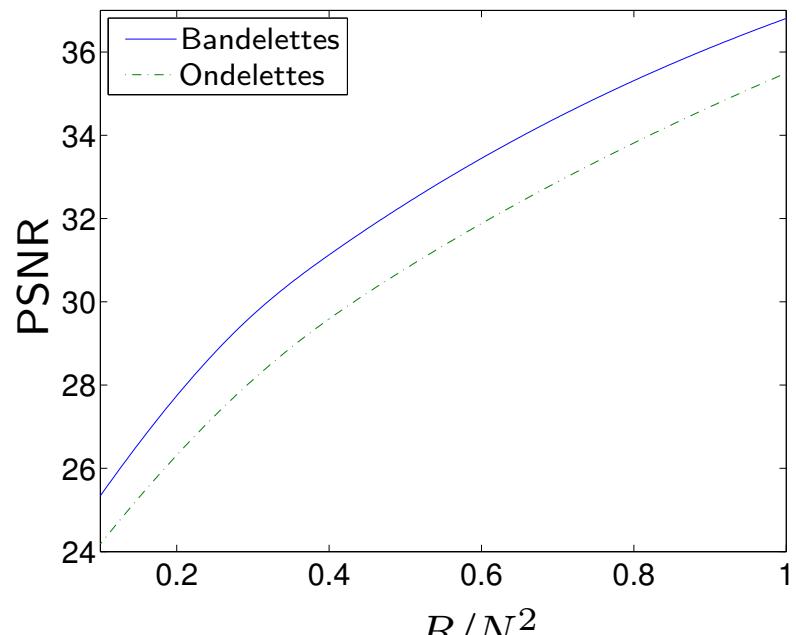
Ondelettes



Originale



Distorsion-Débit



$R/N^2 = 0,40$ bpp

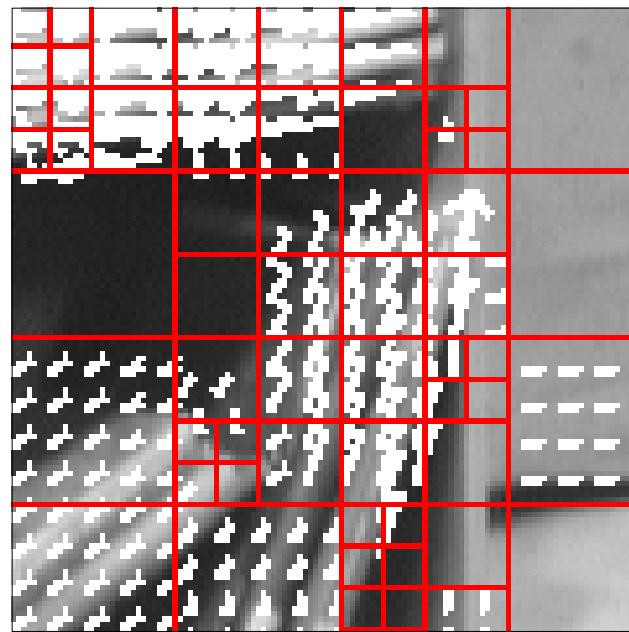
Bandelettes (31,22 db)



Ondelettes (29,68 db)



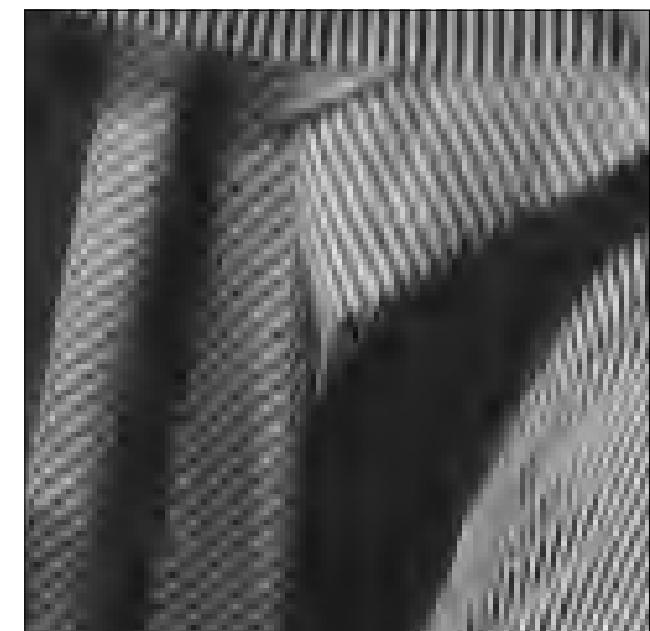
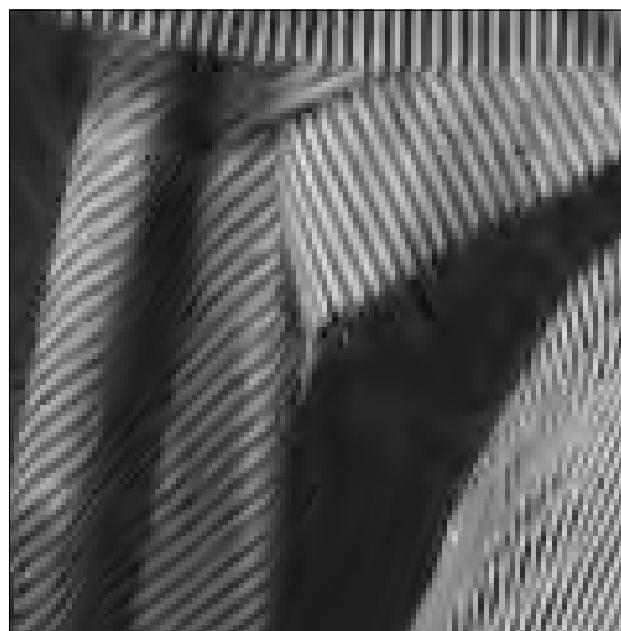
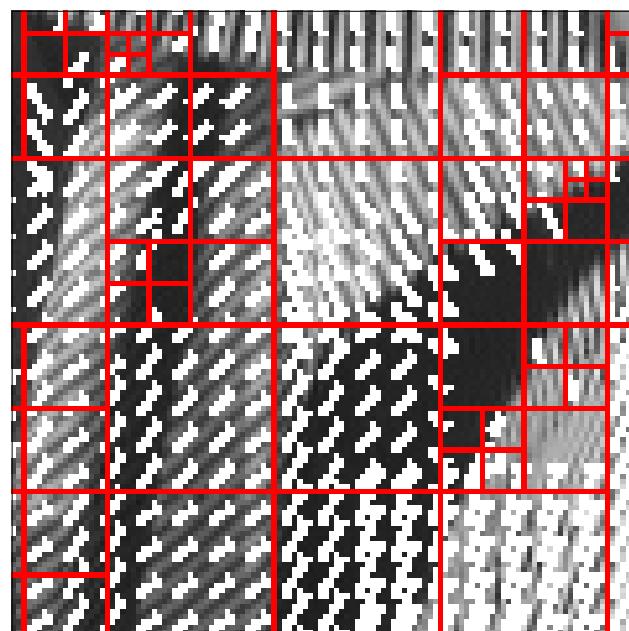
Originale



Bandelettes



Ondelettes



Compression et débruitage

Compression et débruitage

- Algorithme de compression = algorithme de débruitage.

Compression et débruitage

- Algorithme de compression = algorithme de débruitage.
- $Y = f + W$ et estimateur de f : $F = Y_R$.

Compression et débruitage

- Algorithme de compression = algorithme de débruitage.
- $Y = f + W$ et estimateur de f : $F = Y_R$.
- $\|Y - F\|^2 + \lambda^2 R$ proportionnel à une log-vraisemblance.

Compression et débruitage

- Algorithme de compression = algorithme de débruitage.
- $Y = f + W$ et estimateur de f : $F = Y_R$.
- $\|Y - F\|^2 + \lambda^2 R$ proportionnel à une log-vraisemblance.

$$\|Y - F\|^2 + \lambda^2 R = 2\sigma^2 \left(\underbrace{\|f - F\|^2 / (2\sigma^2)}_{\text{Bruit Gaussien}} + \underbrace{(\lambda^2 / (2\sigma^2))R}_{\text{a priori sur } f} \right)$$

Compression et débruitage

- Algorithme de compression = algorithme de débruitage.
- $Y = f + W$ et estimateur de f : $F = Y_R$.
- $\|Y - F\|^2 + \lambda^2 R$ proportionnel à une log-vraisemblance.

$$\|Y - F\|^2 + \lambda^2 R = 2\sigma^2 \left(\underbrace{\|f - F\|^2 / (2\sigma^2)}_{\text{Bruit Gaussien}} + \underbrace{(\lambda^2 / (2\sigma^2))R}_{\text{a priori sur } f} \right)$$

- Compression = maximum de vraisemblance.

Compression et débruitage

- Algorithme de compression = algorithme de débruitage.
- $Y = f + W$ et estimateur de f : $F = Y_R$.
- $\|Y - F\|^2 + \lambda^2 R$ proportionnel à une log-vraisemblance.

$$\|Y - F\|^2 + \lambda^2 R = 2\sigma^2 \left(\underbrace{\|f - F\|^2 / (2\sigma^2)}_{\text{Bruit Gaussien}} + \underbrace{(\lambda^2 / (2\sigma^2))R}_{\text{a priori sur } f} \right)$$

- Compression = maximum de vraisemblance.
- $\lambda^2 = 2 \log 2\sigma^2$: $P(f) = 2^{-R}$ (MDL - Saito).

Compression et débruitage

- Algorithme de compression = algorithme de débruitage.
- $Y = f + W$ et estimateur de f : $F = Y_R$.
- $\|Y - F\|^2 + \lambda^2 R$ proportionnel à une log-vraisemblance.

$$\|Y - F\|^2 + \lambda^2 R = 2\sigma^2 \left(\underbrace{\|f - F\|^2 / (2\sigma^2)}_{\text{Bruit Gaussien}} + \underbrace{(\lambda^2 / (2\sigma^2))R}_{\text{a priori sur } f} \right)$$

- Compression = maximum de vraisemblance.
- $\lambda^2 = 2 \log 2\sigma^2$: $P(f) = 2^{-R}$ (MDL - Saito).
- Algorithme pratique mais pas de résultat théorique.

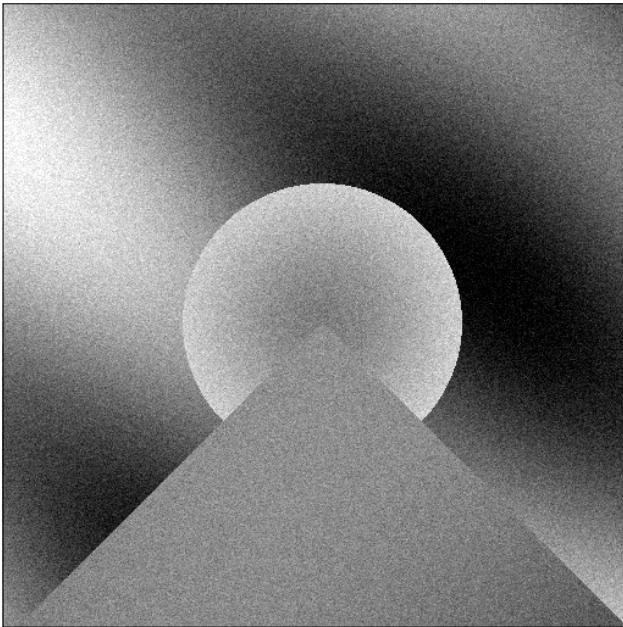
Compression et débruitage

- Algorithme de compression = algorithme de débruitage.
- $Y = f + W$ et estimateur de f : $F = Y_R$.
- $\|Y - F\|^2 + \lambda^2 R$ proportionnel à une log-vraisemblance.

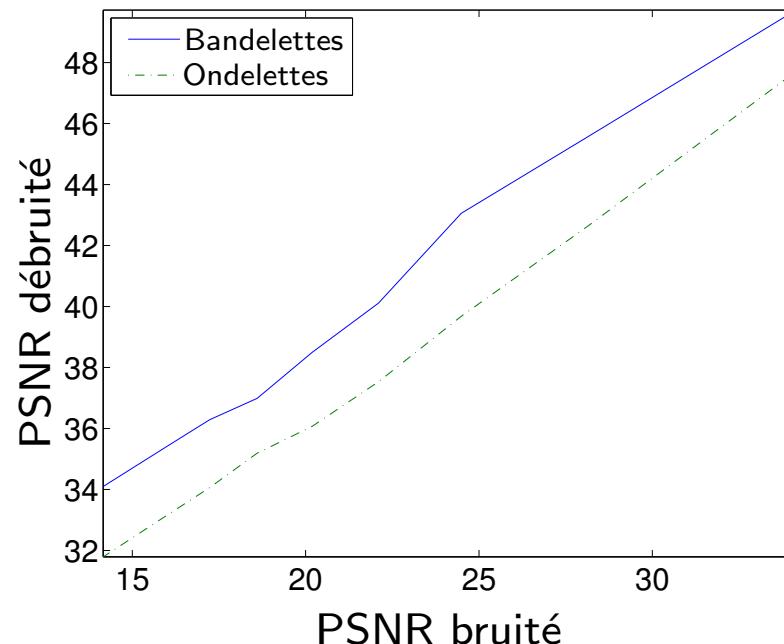
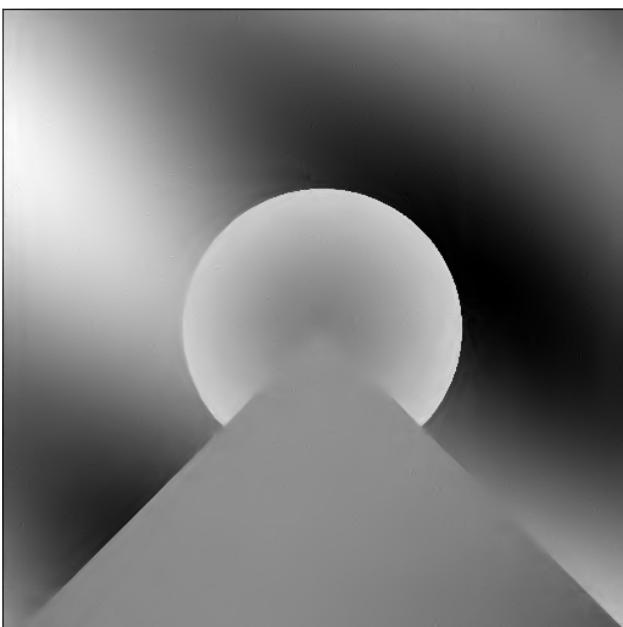
$$\|Y - F\|^2 + \lambda^2 R = 2\sigma^2 \left(\underbrace{\|f - F\|^2 / (2\sigma^2)}_{\text{Bruit Gaussien}} + \underbrace{(\lambda^2 / (2\sigma^2))R}_{\text{a priori sur } f} \right)$$

- Compression = maximum de vraisemblance.
- $\lambda^2 = 2 \log 2\sigma^2$: $P(f) = 2^{-R}$ (MDL - Saito).
- Algorithme pratique mais pas de résultat théorique.
- Remarque : $\|Y - F\|^2 + \lambda\sigma^2 R \simeq \|Y - F\|^2 + \lambda\sigma^2(\alpha_G M_G + \alpha_B M_B)$
(Prise en compte de la géométrie dans le terme M).

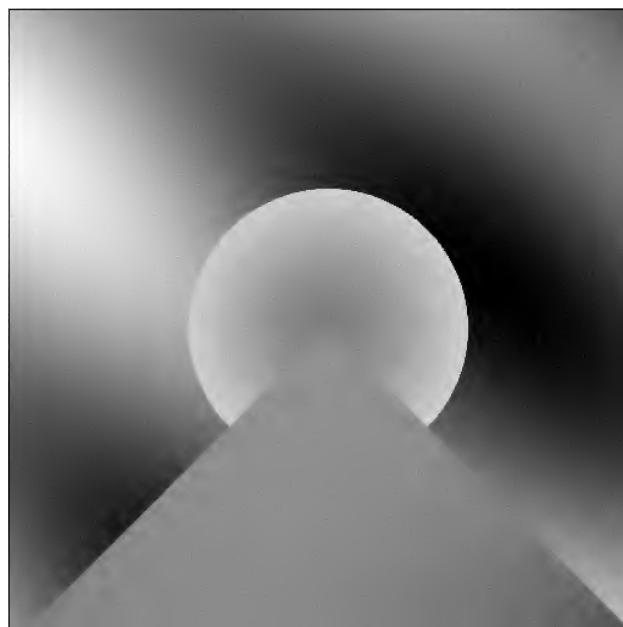
Bruité (20,19 dB)



Bandelettes (30,29 dB)



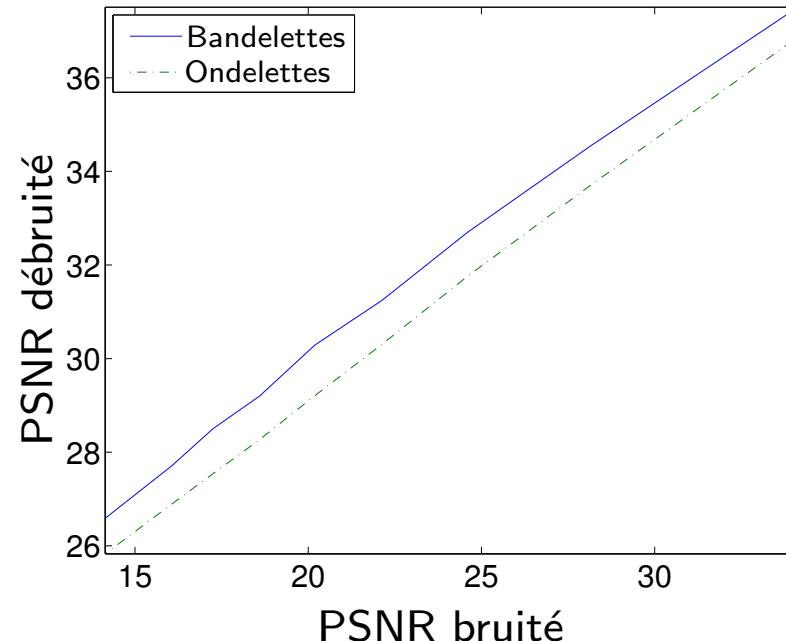
Ondelettes (28,21 dB)



Bruité (20,19 dB)



Bandelettes (30,29 dB)



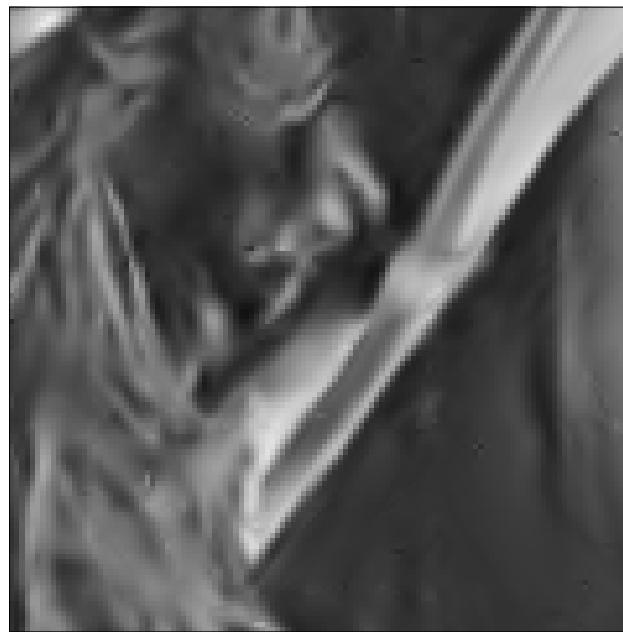
Ondelettes (28,21 dB)



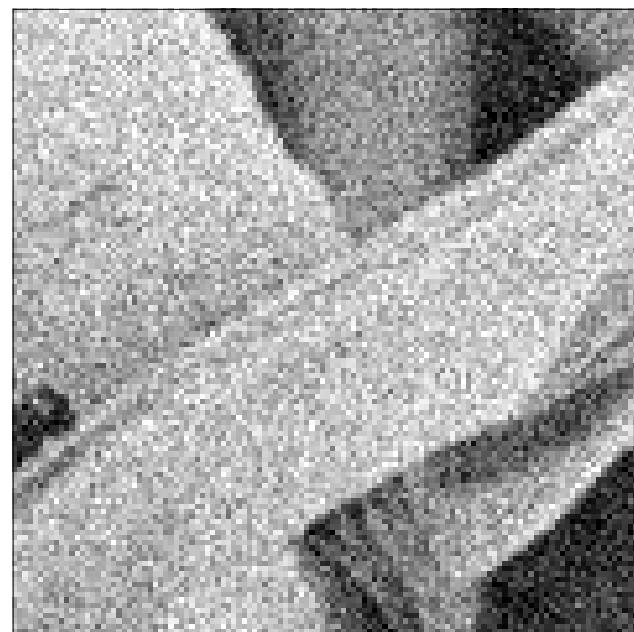
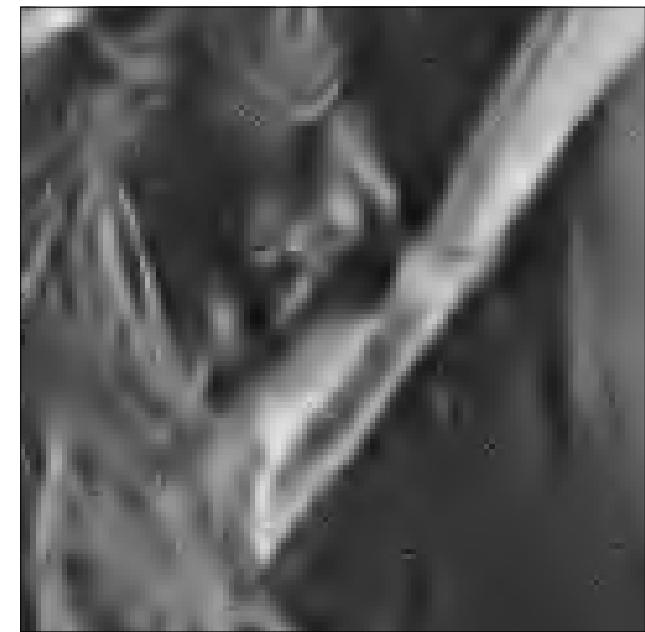
Bruité



Bandelettes



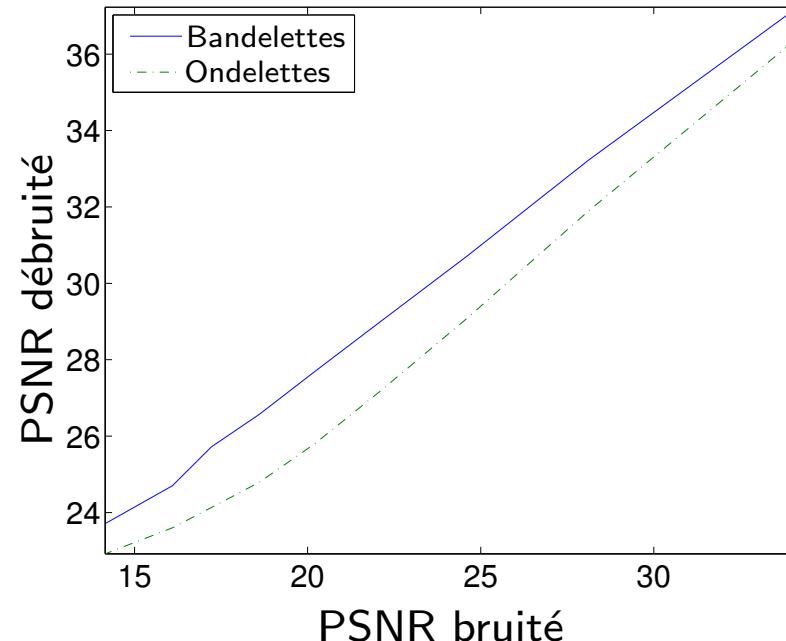
Ondelettes



Bruité (20,19 dB)



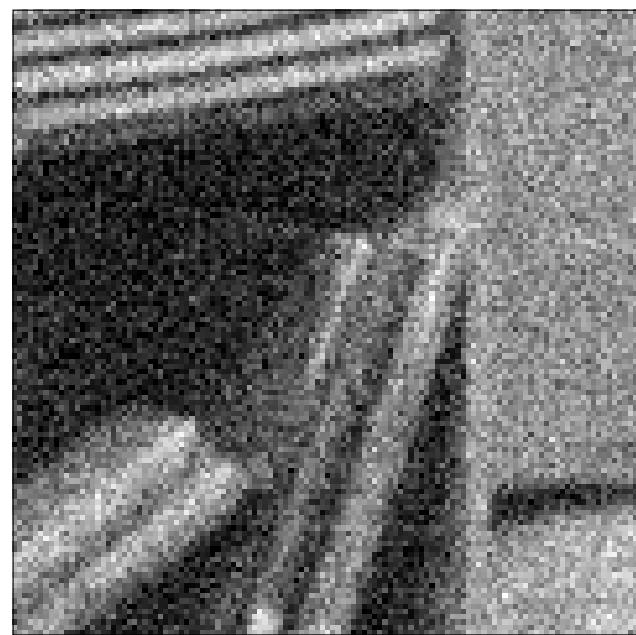
Bandelettes (27,68 dB)



Ondelettes (25,79 dB)



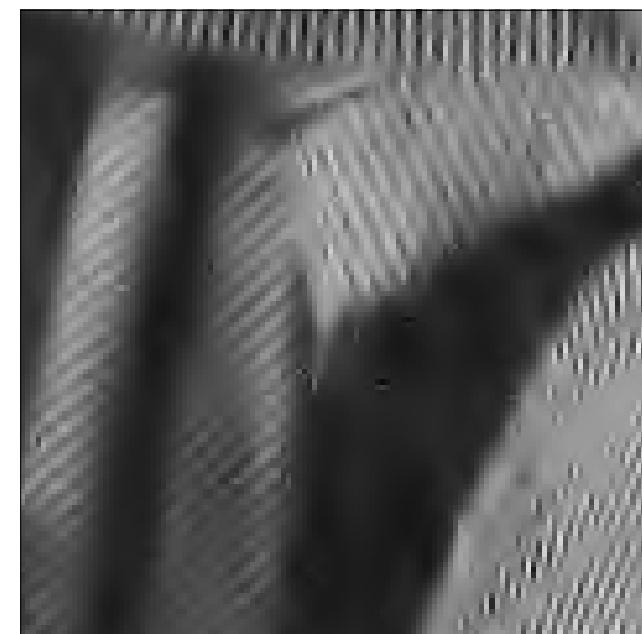
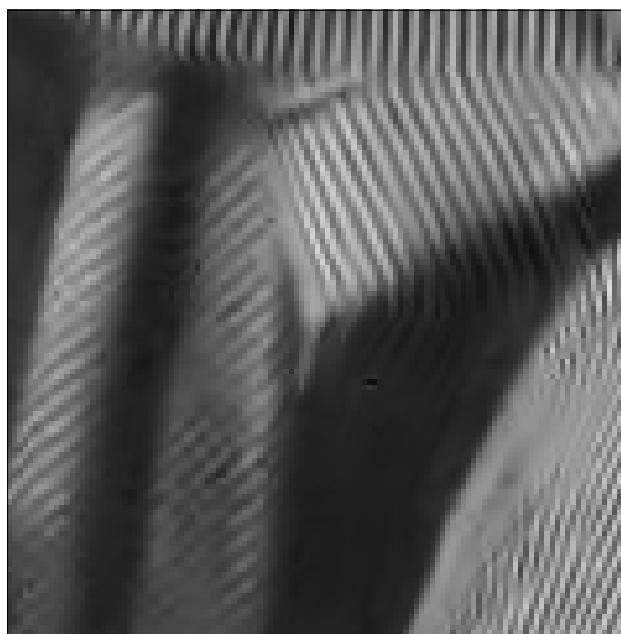
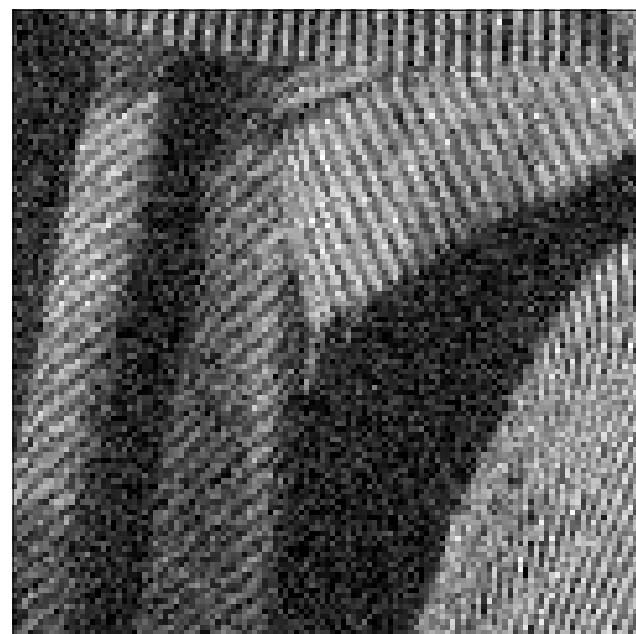
Bruité



Bandelettes



Ondelettes



Estimateurs à pénalité

Chapitre 10

Statistique appliquée à l'ingénierie

Université de Montréal

Éric Marchand

éric.marchand@umontreal.ca

http://www.math.蒙特利尔.ca/~marchan/

Version 1.0 (2018)

Édition électronique

Édition papier

Édition PDF

Édition LaTeX

Édition R

Édition Python

Édition MATLAB

Édition SPSS

Édition SAS

Édition R

Édition Python

Édition MATLAB

Estimateurs à pénalité

- Sélection de modèle.

Estimateurs à pénalité

- Sélection de modèle.
- Classe d'estimateurs F_γ .

Estimateurs à pénalité

- Sélection de modèle.
- Classe d'estimateurs F_γ .
- MDL : $F_\gamma(Y) = \sum Q_T(\langle Y, g_n \rangle)g_n$ (géométrie et seuil T).

Estimateurs à pénalité

- Sélection de modèle.
- Classe d'estimateurs F_γ .
- MDL : $F_\gamma(Y) = \sum Q_T(\langle Y, g_n \rangle)g_n$ (géométrie et seuil T).
- Estimateur choisi par minimisation d'une fonctionnelle

$$\|Y - F_\gamma(Y)\|^2 + \sigma^2 \text{pen}(\gamma, Y) \quad .$$

Estimateurs à pénalité

- Sélection de modèle.
- Classe d'estimateurs F_γ .
- MDL : $F_\gamma(Y) = \sum Q_T(\langle Y, g_n \rangle)g_n$ (géométrie et seuil T).
- Estimateur choisi par minimisation d'une fonctionnelle

$$\|Y - F_\gamma(Y)\|^2 + \sigma^2 \text{pen}(\gamma, Y) \quad .$$

- MDL : $\text{pen}(\gamma, Y) = \lambda^2 R(F_\gamma)$.

Estimateurs à pénalité

- Sélection de modèle.
- Classe d'estimateurs F_γ .
- MDL : $F_\gamma(Y) = \sum Q_T(\langle Y, g_n \rangle)g_n$ (géométrie et seuil T).
- Estimateur choisi par minimisation d'une fonctionnelle

$$\|Y - F_\gamma(Y)\|^2 + \sigma^2 \text{pen}(\gamma, Y) \quad .$$

- MDL : $\text{pen}(\gamma, Y) = \lambda^2 R(F_\gamma)$.
- Objectif : risque de l'estimateur ainsi défini proche du risque oracle = minimum du risque sur tous les estimateurs de la famille.

Estimateurs par seuillage

• Méthode de l'estimation par seuillage

Estimateurs par seuillage

- Famille \mathcal{B} de bases orthonormées comportant au total ν fonctions de base différentes (différent du nombre total de bases).

Estimateurs par seuillage

- Famille \mathcal{B} de bases orthonormées comportant au total ν fonctions de base différentes (différent du nombre total de bases).
- Classe des estimateurs par projection sur certaines coordonnées :

$$F = \sum_{n \in I_M} \langle Y, g_n \rangle g_n \quad .$$

Estimateurs par seuillage

- Famille \mathcal{B} de bases orthonormées comportant au total ν fonctions de base différentes (différent du nombre total de bases).
- Classe des estimateurs par projection sur certaines coordonnées :

$$F = \sum_{n \in I_M} \langle Y, g_n \rangle g_n \quad .$$

- Estimateur par seuillage ($I_M = \{n, |\langle Y, g_n \rangle|^2 \geq \lambda^2 \log \nu \sigma^2\}$) :

$$F = \operatorname{argmin}_{\mathbf{B} \in \mathcal{B}} \|Y - Y_M\|^2 + \lambda^2 \log \nu \sigma^2 M \quad .$$

Estimateurs par seuillage

- Famille \mathcal{B} de bases orthonormées comportant au total ν fonctions de base différentes (différent du nombre total de bases).
- Classe des estimateurs par projection sur certaines coordonnées :

$$F = \sum_{n \in I_M} \langle Y, g_n \rangle g_n \quad .$$

- Estimateur par seuillage ($I_M = \{n, |\langle Y, g_n \rangle|^2 \geq \lambda^2 \log \nu \sigma^2\}$) :

$$F = \operatorname{argmin}_{\mathbf{B} \in \mathcal{B}} \|Y - Y_M\|^2 + \lambda^2 \log \nu \sigma^2 M \quad .$$

- M uniquement le nombre de coefficients dans la base.

Estimateurs par seuillage

- Famille \mathcal{B} de bases orthonormées comportant au total ν fonctions de base différentes (différent du nombre total de bases).
- Classe des estimateurs par projection sur certaines coordonnées :

$$F = \sum_{n \in I_M} \langle Y, g_n \rangle g_n \quad .$$

- Estimateur par seuillage ($I_M = \{n, |\langle Y, g_n \rangle|^2 \geq \lambda^2 \log \nu \sigma^2\}$) :

$$F = \underset{\mathbf{B} \in \mathcal{B}}{\operatorname{argmin}} \|Y - Y_M\|^2 + \lambda^2 \log \nu \sigma^2 M \quad .$$

- M uniquement le nombre de coefficients dans la base.
- Risque oracle :

$$R_{\text{opt}} = \underset{\mathbf{B} \in \mathcal{B}}{\min} \|f - f_M\|^2 + \sigma^2 M \quad .$$

Estimateurs par seuillage

- Famille \mathcal{B} de bases orthonormées comportant au total ν fonctions de base différentes (différent du nombre total de bases).
- Classe des estimateurs par projection sur certaines coordonnées :

$$F = \sum_{n \in I_M} \langle Y, g_n \rangle g_n \quad .$$

- Estimateur par seuillage ($I_M = \{n, |\langle Y, g_n \rangle|^2 \geq \lambda^2 \log \nu \sigma^2\}$) :

$$F = \underset{\mathbf{B} \in \mathcal{B}}{\operatorname{argmin}} \|Y - Y_M\|^2 + \lambda^2 \log \nu \sigma^2 M \quad .$$

- M uniquement le nombre de coefficients dans la base.
- Risque oracle :

$$R_{\text{opt}} = \underset{\mathbf{B} \in \mathcal{B}}{\min} \|f - f_M\|^2 + \sigma^2 M \quad .$$

- Optimalité de l'estimateur ?

Quasi optimalité

Quasi optimalité

- **Théorème (Donoho)** : Avec une probabilité supérieure à $1 - e/\nu$

$$\|f - F\|^2 + \lambda^2 \log \nu \sigma^2 M_F \leq C_\lambda \lambda^2 \log \nu R_{\text{opt}} .$$

Quasi optimalité

- **Théorème (Donoho)** : Avec une probabilité supérieure à $1 - e/\nu$

$$\|f - F\|^2 + \lambda^2 \log \nu \sigma^2 M_F \leq C_\lambda \lambda^2 \log \nu R_{\text{opt}} .$$

- Cas intéressant : $\nu = N^\delta$.

Quasi optimalité

- **Théorème (Donoho)** : Avec une probabilité supérieure à $1 - e/\nu$

$$\|f - F\|^2 + \lambda^2 \log \nu \sigma^2 M_F \leq C_\lambda \lambda^2 \log \nu R_{\text{opt}} \quad .$$

- Cas intéressant : $\nu = N^\delta$.
- Risque R de l'estimateur satisfait :

$$R = E(\|f - F\|^2) \leq C_\lambda \lambda^2 \log \nu (R_{\text{opt}} + \sigma^2) \quad .$$

Quasi optimalité

- **Théorème (Donoho)** : Avec une probabilité supérieure à $1 - e/\nu$

$$\|f - F\|^2 + \lambda^2 \log \nu \sigma^2 M_F \leq C_\lambda \lambda^2 \log \nu R_{\text{opt}} .$$

- Cas intéressant : $\nu = N^\delta$.
- Risque R de l'estimateur satisfait :

$$R = E(\|f - F\|^2) \leq C_\lambda \lambda^2 \log \nu (R_{\text{opt}} + \sigma^2) .$$

- Sous les hypothèses du théorème, avec $P \geq 1 - e/\nu$

$$\|f - F\|^2 + \lambda^2 \log \nu \sigma^2 M_F \leq C_\lambda \operatorname{argmin} \|f - f_M\|^2 + \lambda^2 \log \nu \sigma^2 M$$

$$\|f - F\|^2 + \lambda^2 \log \nu \sigma^2 M_F \leq C_\lambda \lambda^2 \log \nu R_{\text{opt}}$$

Preuve – 1

Preuve – 1

- $f_\lambda = \operatorname{argmin} \|f - f_M\|^2 + \lambda^2 \log \nu \sigma^2 M$ avec M_λ coefficients.

Preuve – 1

- $f_\lambda = \operatorname{argmin} \|f - f_M\|^2 + \lambda^2 \log \nu \sigma^2 M$ avec M_λ coefficients.
- $F = \operatorname{argmin} \|Y - Y_M\|^2 + \lambda^2 \log \nu \sigma^2 M$ avec M_F coefficients.

Preuve – 1

- $f_\lambda = \operatorname{argmin} \|f - f_M\|^2 + \lambda^2 \log \nu \sigma^2 M$ avec M_λ coefficients.
- $F = \operatorname{argmin} \|Y - Y_M\|^2 + \lambda^2 \log \nu \sigma^2 M$ avec M_F coefficients.
- $\|Y - g\|^2 = \|Y - f\|^2 + 2\langle Y - f, f - g \rangle + \|f - g\|^2.$

Preuve – 1

- $f_\lambda = \operatorname{argmin} \|f - f_M\|^2 + \lambda^2 \log \nu \sigma^2 M$ avec M_λ coefficients.
- $F = \operatorname{argmin} \|Y - Y_M\|^2 + \lambda^2 \log \nu \sigma^2 M$ avec M_F coefficients.
- $\|Y - g\|^2 = \|Y - f\|^2 + 2\langle Y - f, f - g \rangle + \|f - g\|^2.$
- En insérant ceci dans

$$\|Y - F\|^2 + \lambda^2 \log \nu \sigma^2 M_F \leq \|Y - f_\lambda\|^2 + \lambda^2 \log \nu \sigma^2 M_\lambda$$

on obtient

$$\begin{aligned} \|f - F\|^2 + \lambda^2 \log \nu \sigma^2 M_F &\leq \|f - f_\lambda\|^2 + \lambda^2 \log \nu \sigma^2 M_\lambda \\ &\quad + 2\langle Y - f, f_\lambda - F \rangle . \end{aligned}$$

Preuve – 1

- $f_\lambda = \operatorname{argmin} \|f - f_M\|^2 + \lambda^2 \log \nu \sigma^2 M$ avec M_λ coefficients.
- $F = \operatorname{argmin} \|Y - Y_M\|^2 + \lambda^2 \log \nu \sigma^2 M$ avec M_F coefficients.
- $\|Y - g\|^2 = \|Y - f\|^2 + 2\langle Y - f, f - g \rangle + \|f - g\|^2.$
- En insérant ceci dans

$$\|Y - F\|^2 + \lambda^2 \log \nu \sigma^2 M_F \leq \|Y - f_\lambda\|^2 + \lambda^2 \log \nu \sigma^2 M_\lambda$$

on obtient

$$\begin{aligned} \|f - F\|^2 + \lambda^2 \log \nu \sigma^2 M_F &\leq \|f - f_\lambda\|^2 + \lambda^2 \log \nu \sigma^2 M_\lambda \\ &\quad + 2\langle Y - f, f_\lambda - F \rangle . \end{aligned}$$

- On conclut en prouvant qu'avec grande probabilité,

$$|\langle Y - f, f_\lambda - F \rangle| \leq (C/\lambda)(\|f - F\|^2 + \lambda^2 \log \nu \sigma^2 M_F) .$$

qui implique $C_\lambda = (1 - 2C/\lambda)^{-1}$.

Preuve – 2

Preuve – 2

- $|\langle Y - f, f_\lambda - Fp \rangle| \leq \|P_{\mathcal{M}_\lambda \cup \mathcal{M}_F} W\| \|f_\lambda - F\| \quad .$

Preuve – 2

- $|\langle Y - f, f_\lambda - Fp \rangle| \leq \|P_{\mathcal{M}_\lambda \cup \mathcal{M}_F} W\| \|f_\lambda - F\| \quad .$
- $\|f_\lambda - F\| \leq \|f_\lambda - f\| + \|f - F\|$
 $\|f_\lambda - F\| \leq 2(\|f - F\|^2 + \lambda^2 \log \nu \sigma^2 M_F)^{1/2} \quad .$

Preuve – 2

- $|\langle Y - f, f_\lambda - Fp \rangle| \leq \|P_{\mathcal{M}_\lambda \cup \mathcal{M}_F} W\| \|f_\lambda - F\| \quad .$
- $\|f_\lambda - F\| \leq \|f_\lambda - f\| + \|f - F\|$
- $\|f_\lambda - F\| \leq 2(\|f - F\|^2 + \lambda^2 \log \nu \sigma^2 M_F)^{1/2} \quad .$
- Inégalité de concentration :

$$P \left(\forall \mathcal{M}, \quad \|P_{\mathcal{M}} W\| \leq \sqrt{5 \log \nu \sigma^2 \dim(\mathcal{M})} \right) \geq 1 - e/\nu \quad .$$

Preuve – 2

- $|\langle Y - f, f_\lambda - Fp \rangle| \leq \|P_{\mathcal{M}_\lambda \cup \mathcal{M}_F} W\| \|f_\lambda - F\| \quad .$
- $\|f_\lambda - F\| \leq \|f_\lambda - f\| + \|f - F\|$
 $\|f_\lambda - F\| \leq 2(\|f - F\|^2 + \lambda^2 \log \nu \sigma^2 M_F)^{1/2} \quad .$
- Inégalité de concentration :

$$P \left(\forall \mathcal{M}, \quad \|P_{\mathcal{M}} W\| \leq \sqrt{5 \log \nu \sigma^2 \dim(\mathcal{M})} \right) \geq 1 - e/\nu \quad .$$

- Avec $P \geq 1 - e/\nu$,

$$\|P_{\mathcal{M}_\lambda \cup \mathcal{M}_F} W\| \leq \sqrt{5 \log \nu \sigma^2 (M_\lambda + M_F)}$$

$$\|P_{\mathcal{M}_\lambda \cup \mathcal{M}_F} W\| \leq \sqrt{10/\lambda} (\|f - F\|^2 + \lambda^2 \log \nu \sigma^2 M_F)^{1/2} \quad .$$

Preuve – 2

- $|\langle Y - f, f_\lambda - Fp \rangle| \leq \|P_{\mathcal{M}_\lambda \cup \mathcal{M}_F} W\| \|f_\lambda - F\| \quad .$
- $\|f_\lambda - F\| \leq \|f_\lambda - f\| + \|f - F\|$
 $\|f_\lambda - F\| \leq 2(\|f - F\|^2 + \lambda^2 \log \nu \sigma^2 M_F)^{1/2} \quad .$
- Inégalité de concentration :

$$P \left(\forall \mathcal{M}, \quad \|P_{\mathcal{M}} W\| \leq \sqrt{5 \log \nu \sigma^2 \dim(\mathcal{M})} \right) \geq 1 - e/\nu \quad .$$

- Avec $P \geq 1 - e/\nu$,

$$\|P_{\mathcal{M}_\lambda \cup \mathcal{M}_F} W\| \leq \sqrt{5 \log \nu \sigma^2 (M_\lambda + M_F)}$$

$$\|P_{\mathcal{M}_\lambda \cup \mathcal{M}_F} W\| \leq \sqrt{10/\lambda} (\|f - F\|^2 + \lambda^2 \log \nu \sigma^2 M_F)^{1/2} \quad .$$

- $|\langle Y - f, f_\lambda - Fp \rangle| \leq \sqrt{40/\lambda^2} (\|f - F\|^2 + \lambda^2 \log \nu \sigma^2 M_F) \quad .$

Preuve – 3

Preuve – 3

- Pour chaque sous-espace $\mathcal{M} = \text{vect}\{g_{\gamma_n}\}$,

$$P(\|P_{\mathcal{M}}W\| \geq E\|P_{\mathcal{M}}W\| + t) \leq e^{-t^2/(2\sigma^2)}$$

Preuve – 3

- Pour chaque sous-espace $\mathcal{M} = \text{vect}\{g_{\gamma_n}\}$,

$$P(\|P_{\mathcal{M}}W\| \geq E\|P_{\mathcal{M}}W\| + t) \leq e^{-t^2/(2\sigma^2)}$$

- $E\|P_{\mathcal{M}}W\| \leq (E(\|P_{\mathcal{M}}W\|^2))^{1/2} \leq \sqrt{M\sigma^2}$ avec $M = \dim(\mathcal{M})$.

Preuve – 3

- Pour chaque sous-espace $\mathcal{M} = \text{vect}\{g_{\gamma_n}\}$,

$$P(\|P_{\mathcal{M}}W\| \geq E\|P_{\mathcal{M}}W\| + t) \leq e^{-t^2/(2\sigma^2)}$$

- $E\|P_{\mathcal{M}}W\| \leq (E(\|P_{\mathcal{M}}W\|^2))^{1/2} \leq \sqrt{M\sigma^2}$ avec $M = \dim(\mathcal{M})$.
- $t = \sqrt{4 \log \nu \sigma^2 M}$, $P\left(\|P_{\mathcal{M}}W\| \geq \sqrt{5 \log \nu \sigma^2 M}\right) \leq \nu^{-2M}$

Preuve – 3

- Pour chaque sous-espace $\mathcal{M} = \text{vect}\{g_{\gamma_n}\}$,

$$P(\|P_{\mathcal{M}}W\| \geq E\|P_{\mathcal{M}}W\| + t) \leq e^{-t^2/(2\sigma^2)}$$

- $E\|P_{\mathcal{M}}W\| \leq (E(\|P_{\mathcal{M}}W\|^2))^{1/2} \leq \sqrt{M\sigma^2}$ avec $M = \dim(\mathcal{M})$.
- $t = \sqrt{4 \log \nu \sigma^2 M}$, $P\left(\|P_{\mathcal{M}}W\| \geq \sqrt{5 \log \nu \sigma^2 M}\right) \leq \nu^{-2M}$
- Contrôle sur le nombre de sous-espaces possibles :

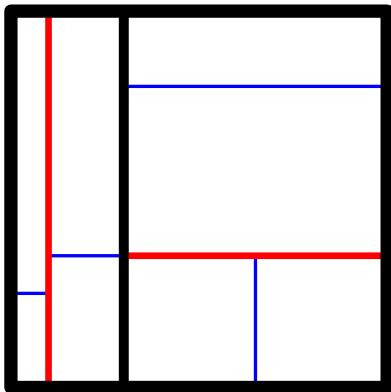
$$\begin{aligned} P\left(\forall \mathcal{M}, \quad \|P_{\mathcal{M}}W\| \geq \sqrt{5 \log \nu \sigma^2 M}\right) \\ &\leq \sum_M \sum_{\mathcal{M}, \dim \mathcal{M} = M} P\left(\|P_{\mathcal{M}}W\| \geq \sqrt{5 \log \nu \sigma^2 M}\right) \\ &\leq \sum_M \binom{\nu}{M} \nu^{-2M} \leq \sum_M 1/(M!) \nu^{-M} \leq e\nu^{-1} \end{aligned}$$

Base orthonormée de bandelettes

Base orthonormée de bandelettes

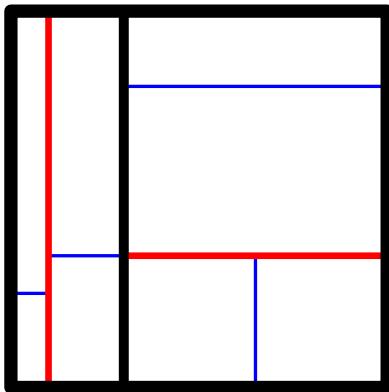
- Rectangle : Base orthogonale de bandelettes à l'intérieur d'une bande et base orthogonale d'ondelettes pour le complémentaire.

Base orthonormée de bandelettes



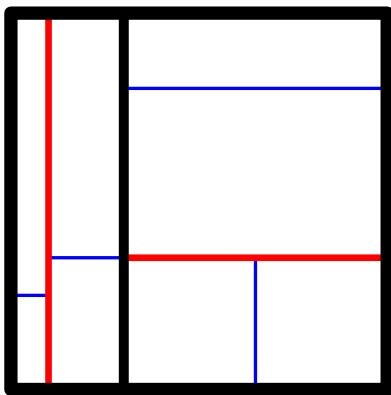
- Rectangle : Base orthogonale de bandelettes à l'intérieur d'une bande et base orthogonale d'ondelettes pour le complémentaire.
- Découpage en rectangle avec des flots polynomiaux.

Base orthonormée de bandelettes



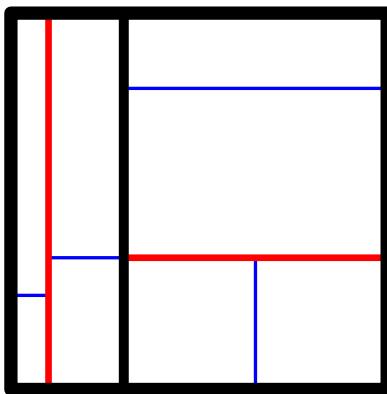
- Rectangle : Base orthogonale de bandelettes à l'intérieur d'une bande et base orthogonale d'ondelettes pour le complémentaire.
- Découpage en rectangle avec des flots polynomiaux.
- Structure hiérarchique préservée.

Base orthonormée de bandelettes



- Rectangle : Base orthogonale de bandelettes à l'intérieur d'une bande et base orthogonale d'ondelettes pour le complémentaire.
- Découpage en rectangle avec des flots polynomiaux.
- Structure hiérarchique préservée.
- Nombre total ν de bandelettes contrôlé : $\nu \leq C N^{(p+5)}$.

Base orthonormée de bandelettes



- Rectangle : Base orthogonale de bandelettes à l'intérieur d'une bande et base orthogonale d'ondelettes pour le complémentaire.
- Découpage en rectangle avec des flots polynomiaux.
- Structure hiérarchique préservée.
- Nombre total ν de bandelettes contrôlé : $\nu \leq C N^{(p+5)}$.
- Théorème d'approximation non-linéaire pour les fonctions de régularité géométrique C^α :

$$\|f - f_M\|^2 \leq CM^{-\alpha} \log^{\alpha+2} M .$$

Estimation en bandelettes

Chapitre 10

Théorie et applications

Yves Méléard

Université Paris-Est Marne-la-Vallée

Centre de Mathématiques Appliquées

École des Ponts ParisTech

77455 Champs-sur-Marne Cedex 2

Téléphone : +33 1 45 57 46 46

Fax : +33 1 45 57 46 47

E-mail : yves.meléard@enpc.fr

http://cermics.enpc.fr/~meléard

http://cermics.enpc.fr/~meléard/estimation_en_bandelettes.html

http://cermics.enpc.fr/~meléard/estimation_en_bandelettes.pdf

http://cermics.enpc.fr/~meléard/estimation_en_bandelettes.ps

http://cermics.enpc.fr/~meléard/estimation_en_bandelettes.dvi

http://cermics.enpc.fr/~meléard/estimation_en_bandelettes.tex

http://cermics.enpc.fr/~meléard/estimation_en_bandelettes.bib

http://cermics.enpc.fr/~meléard/estimation_en_bandelettes.bbl

http://cermics.enpc.fr/~meléard/estimation_en_bandelettes.pdf.gz

http://cermics.enpc.fr/~meléard/estimation_en_bandelettes.ps.gz

http://cermics.enpc.fr/~meléard/estimation_en_bandelettes.dvi.gz

http://cermics.enpc.fr/~meléard/estimation_en_bandelettes.tex.gz

http://cermics.enpc.fr/~meléard/estimation_en_bandelettes.bib.gz

http://cermics.enpc.fr/~meléard/estimation_en_bandelettes.bbl.gz

Estimation en bandelettes

- Estimée F obtenue à partir de $Y = f + W$, où W est un bruit blanc centré de variance σ^2 , en minimisant

$$\|Y - F\|^2 + \lambda^2 \sigma^2 \log N M$$

sur l'ensemble des fonctions s'écrivant dans une base orthogonale de bandelettes \mathbf{B}

$$F = \sum_{n \in I_M} \langle Y, g_m \rangle g_m \quad .$$

Estimation en bandelettes

- Estimée F obtenue à partir de $Y = f + W$, où W est un bruit blanc centré de variance σ^2 , en minimisant

$$\|Y - F\|^2 + \lambda^2 \sigma^2 \log N M$$

sur l'ensemble des fonctions s'écrivant dans une base orthogonale de bandelettes \mathbf{B}

$$F = \sum_{n \in I_M} \langle Y, g_m \rangle g_m \quad .$$

- Algorithme de programmation dynamique (CART) permettant cette optimisation de complexité polynômiale.

Estimation en bandelettes

- Estimée F obtenue à partir de $Y = f + W$, où W est un bruit blanc centré de variance σ^2 , en minimisant

$$\|Y - F\|^2 + \lambda^2 \sigma^2 \log N M$$

sur l'ensemble des fonctions s'écrivant dans une base orthogonale de bandelettes \mathbf{B}

$$F = \sum_{n \in I_M} \langle Y, g_m \rangle g_m \quad .$$

- Algorithme de programmation dynamique (CART) permettant cette optimisation de complexité polynômiale.
- Ingrédient central : seuillage dur avec un seuil $\lambda \sqrt{\log N} \sigma$.

Estimation en bandelettes

- Estimée F obtenue à partir de $Y = f + W$, où W est un bruit blanc centré de variance σ^2 , en minimisant

$$\|Y - F\|^2 + \lambda^2 \sigma^2 \log N M$$

sur l'ensemble des fonctions s'écrivant dans une base orthogonale de bandelettes \mathbf{B}

$$F = \sum_{n \in I_M} \langle Y, g_m \rangle g_m \quad .$$

- Algorithme de programmation dynamique (CART) permettant cette optimisation de complexité polynômiale.
- Ingrédient central : seuillage dur avec un seuil $\lambda \sqrt{\log N} \sigma$.
- Richesse de la géométrie dans le terme $\lambda^2 \log N$ au lieu de M .

Résultat théorique

Résultat théorique

- **Théorème :** Si f est de régularité géométrique C^α ($f = \tilde{f}$ ou $f = \tilde{f} \star h$ avec $\tilde{f} C^\alpha$ en dehors de courbes C^α par morceaux avec des conditions de non tangence) alors l'estimée F satisfait

$$\|f - F\|^2 \leq C(\log \nu)^{\alpha/(\alpha+1)} (\log \log \nu)^{(\alpha+2)/(\alpha+1)}$$

$$\sigma^{2\alpha/(\alpha+1)} |\log \sigma|^{(\alpha+2)/(\alpha+1)}$$

avec une probabilité supérieure à $1 - 2\nu^{-1}$.

Résultat théorique

- **Théorème :** Si f est de régularité géométrique C^α ($f = \tilde{f}$ ou $f = \tilde{f} \star h$ avec $\tilde{f} C^\alpha$ en dehors de courbes C^α par morceaux avec des conditions de non tangence) alors l'estimée F satisfait

$$\|f - F\|^2 \leq C(\log \nu)^{\alpha/(\alpha+1)} (\log \log \nu)^{(\alpha+2)/(\alpha+1)}$$

$$\sigma^{2\alpha/(\alpha+1)} |\log \sigma|^{(\alpha+2)/(\alpha+1)}$$

avec une probabilité supérieure à $1 - 2\nu^{-1}$.

- Adaptativité et quasi optimalité en α .

Résultat théorique

- **Théorème :** Si f est de régularité géométrique C^α ($f = \tilde{f}$ ou $f = \tilde{f} \star h$ avec $\tilde{f} C^\alpha$ en dehors de courbes C^α par morceaux avec des conditions de non tangence) alors l'estimée F satisfait

$$\|f - F\|^2 \leq C(\log \nu)^{\alpha/(\alpha+1)} (\log \log \nu)^{(\alpha+2)/(\alpha+1)}$$

$$\sigma^{2\alpha/(\alpha+1)} |\log \sigma|^{(\alpha+2)/(\alpha+1)}$$

avec une probabilité supérieure à $1 - 2\nu^{-1}$.

- Adaptativité et quasi optimalité en α .
- En pratique $\log \nu \simeq \delta \log N \simeq 2\delta |\log \sigma|$.

Résultat théorique

- **Théorème :** Si f est de régularité géométrique C^α ($f = \tilde{f}$ ou $f = \tilde{f} \star h$ avec $\tilde{f} C^\alpha$ en dehors de courbes C^α par morceaux avec des conditions de non tangence) alors l'estimée F satisfait

$$\|f - F\|^2 \leq C(\log \nu)^{\alpha/(\alpha+1)} (\log \log \nu)^{(\alpha+2)/(\alpha+1)}$$

$$\sigma^{2\alpha/(\alpha+1)} |\log \sigma|^{(\alpha+2)/(\alpha+1)}$$

avec une probabilité supérieure à $1 - 2\nu^{-1}$.

- Adaptativité et quasi optimalité en α .
- En pratique $\log \nu \simeq \delta \log N \simeq 2\delta |\log \sigma|$.
- Échantillonage : $Y(x_i) = f(x_i) + \epsilon(x_i)$ avec ϵ bruit blanc centré de variance σ^2 :

$$\|f - F\|^2 \leq C \left(\frac{\log N}{N^2} \right)^{\alpha/(\alpha+1)} (\log N)^{(\alpha+2)/(\alpha+1)} (\log \log N)^{(\alpha+2)/(\alpha+1)}$$

Conclusion

Conclusion

- Les bandelettes permettent une représentation concise des images dans des bases adaptées à la géométrie de celles-ci.

Conclusion

- Les bandelettes permettent une représentation concise des images dans des bases adaptées à la géométrie de celles-ci.
- Applications pour le traitement du signal :
 - Codage d'image fixe.
 - Débruitage et restauration.

Conclusion

- Les bandelettes permettent une représentation concise des images dans des bases adaptées à la géométrie de celles-ci.
- Applications pour le traitement du signal :
 - Codage d'image fixe.
 - Débruitage et restauration.
- Questions mathématiques :
 - Théorèmes d'approximation sur des espaces fonctionnels adaptés.
 - Autres pénalisations (ℓ^1, \dots).
 - Introduction d'un modèle bayésien.
 - Problème inverse ?
 - Apprentissage ?