

Représentation géométrique des images en bandelettes

Erwan LE PENNEC

Stéphane MALLAT – Charles DOSSAL

CMAP / École Polytechnique

Représentation géométrique des images

Représentation géométrique des images

- La plupart des applications du traitement du signal nécessite la construction de représentation creuse : compression, restauration, . . .

Représentation géométrique des images

- La plupart des applications du traitement du signal nécessite la construction de représentation creuse : compression, restauration, . . .
- Besoin de tirer parti de la régularité géométrique des images pour améliorer les représentations.

Représentation géométrique des images

- La plupart des applications du traitement du signal nécessite la construction de représentation creuse : compression, restauration, . . .
- Besoin de tirer parti de la régularité géométrique des images pour améliorer les représentations.
- Rêve du codeur de seconde génération : un pont entre le *traitement du signal* et la *vision par ordinateur*.

Représentation géométrique des images

- La plupart des applications du traitement du signal nécessite la construction de représentation creuse : compression, restauration, . . .
- Besoin de tirer parti de la régularité géométrique des images pour améliorer les représentations.
- Rêve du codeur de seconde génération : un pont entre le *traitement du signal* et la *vision par ordinateur*.
- Construire des représentations d'analyse harmonique adaptées à des *géométries* complexes.

Détection de contours

Détection de contours

- Un problème mal posé.

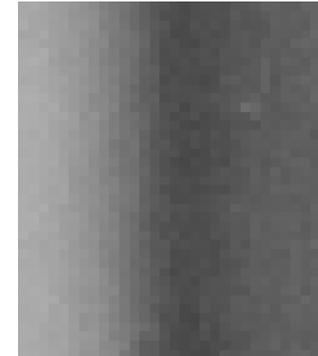
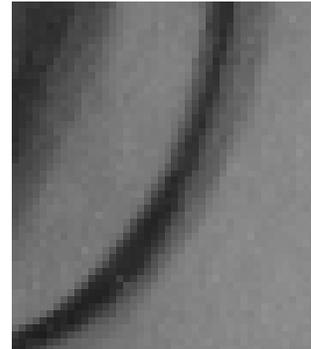
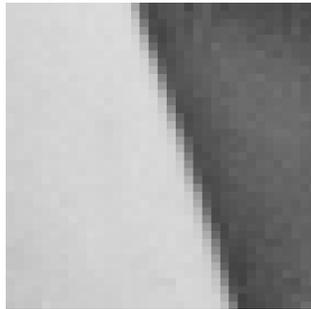


Détection de contours

- Un problème mal posé.



- Les contours sont des singularités lissées.

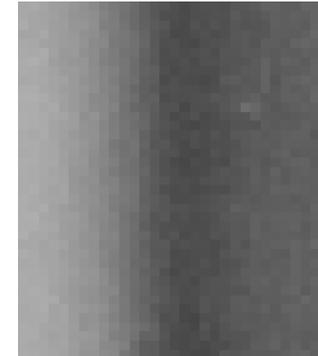
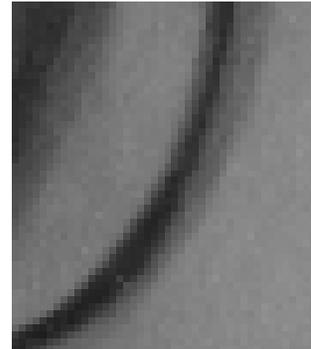
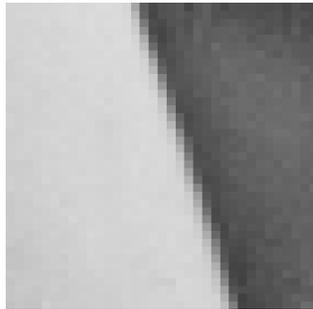


Détection de contours

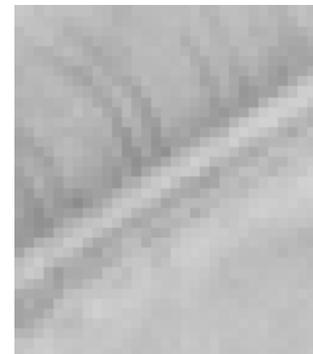
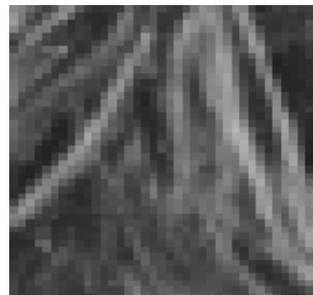
- Un problème mal posé.



- Les contours sont des singularités lissées.



- Où sont les contours ?

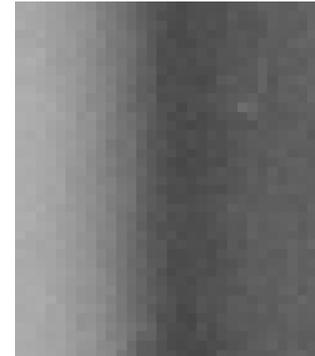
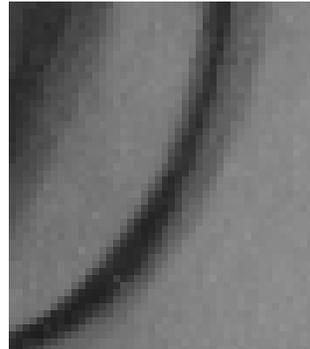
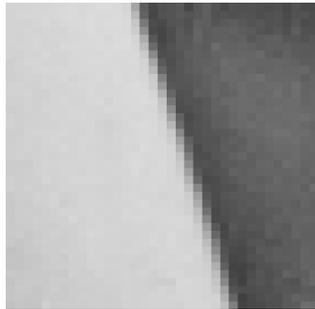


Détection de contours

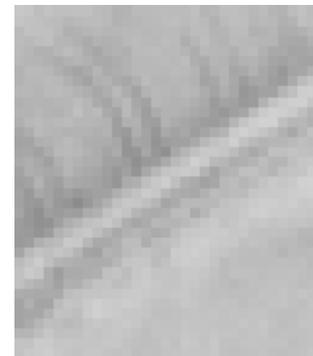
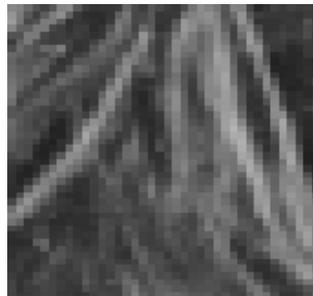
- Un problème mal posé.



- Les contours sont des singularités lissées.



- Où sont les contours ?



- Comment l'estimation de la géométrie peut-elle être *bien posée* ?

Plan

Plan

- Représentations creuses et ondelettes.

Plan

- Représentations creuses et ondelettes.
- Flot géométrique et bases de bandelettes.

Plan

- Représentations creuses et ondelettes.
- Flot géométrique et bases de bandelettes.
- Approximation dans les bases de bandelettes.

Plan

- Représentations creuses et ondelettes.
- Flot géométrique et bases de bandelettes.
- Approximation dans les bases de bandelettes.
- Application à la compression.

Plan

- Représentations creuses et ondelettes.
- Flot géométrique et bases de bandelettes.
- Approximation dans les bases de bandelettes.
- Application à la compression.
- Estimation et sélection de modèle.

Représentation creuse dans une base

Représentation creuse dans une base

- Décomposition dans une base orthonormée $\mathcal{B} = \{g_m\}_{m \in \mathbb{N}}$

$$f = \sum_{m \in \mathbb{N}} \langle f, g_m \rangle g_m .$$

Représentation creuse dans une base

- Décomposition dans une base orthonormée $\mathcal{B} = \{g_m\}_{m \in \mathbb{N}}$

$$f = \sum_{m \in \mathbb{N}} \langle f, g_m \rangle g_m .$$

- Approximation avec M vecteurs choisis adaptativement

$$f_M = \sum_{m \in I_M} \langle f, g_m \rangle g_m .$$

Représentation creuse dans une base

- Décomposition dans une base orthonormée $\mathcal{B} = \{g_m\}_{m \in \mathbb{N}}$

$$f = \sum_{m \in \mathbb{N}} \langle f, g_m \rangle g_m .$$

- Approximation avec M vecteurs choisis adaptativement

$$f_M = \sum_{m \in I_M} \langle f, g_m \rangle g_m .$$

- Pour minimiser $\|f - f_M\|^2 = \sum_{m \notin I_M} |\langle f, g_m \rangle|^2$,

sélection des M plus grands produits scalaires :

$$I_M = \{m, |\langle f, g_m \rangle| > T_M\} : \text{seuillage.}$$

Représentation creuse dans une base

- Décomposition dans une base orthonormée $\mathcal{B} = \{g_m\}_{m \in \mathbb{N}}$

$$f = \sum_{m \in \mathbb{N}} \langle f, g_m \rangle g_m .$$

- Approximation avec M vecteurs choisis adaptativement

$$f_M = \sum_{m \in I_M} \langle f, g_m \rangle g_m .$$

- Pour minimiser $\|f - f_M\|^2 = \sum_{m \notin I_M} |\langle f, g_m \rangle|^2$,

sélection des M plus grands produits scalaires :

$$I_M = \{m, |\langle f, g_m \rangle| > T_M\} : \text{seuillage.}$$

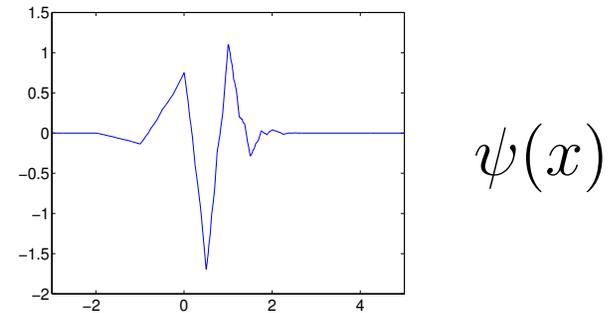
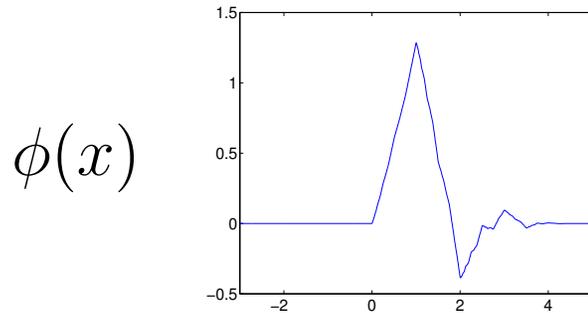
- **Problème** : Comment choisir la base \mathcal{B} de sorte que

$$\|f - f_M\|^2 \leq CM^{-\alpha} \text{ avec un grand } \alpha ?$$

Base d'ondelettes 1D de $L^2[0, 1]$

Base d'ondelettes 1D de $L^2[0, 1]$

- Construite à partir d'une fonction d'échelle $\phi(x)$ et d'une ondelette mère $\psi(x)$

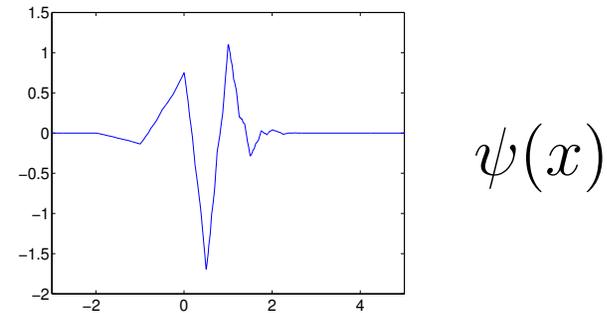
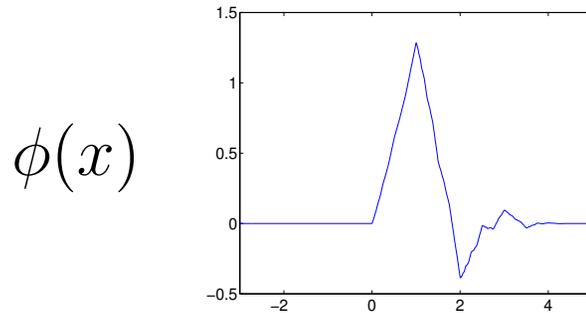


qui sont dilatées par 2^j et translatées de $2^j n$

$$\phi_{j,n}(x) = \frac{1}{\sqrt{2^j}} \phi\left(\frac{x - 2^j n}{2^j}\right) \quad , \quad \psi_{j,n}(x) = \frac{1}{\sqrt{2^j}} \psi\left(\frac{x - 2^j n}{2^j}\right)$$

Base d'ondelettes 1D de $\mathbf{L}^2[0, 1]$

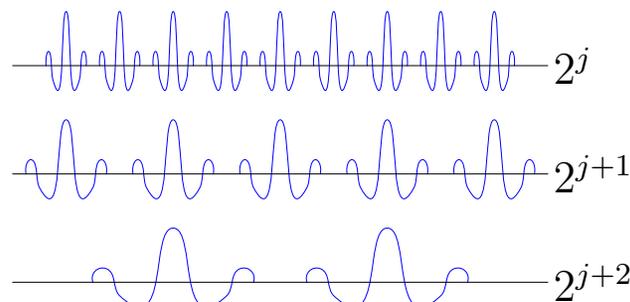
- Construite à partir d'une fonction d'échelle $\phi(x)$ et d'une ondelette mère $\psi(x)$



qui sont dilatées par 2^j et translatées de $2^j n$

$$\phi_{j,n}(x) = \frac{1}{\sqrt{2^j}} \phi\left(\frac{x - 2^j n}{2^j}\right) \quad , \quad \psi_{j,n}(x) = \frac{1}{\sqrt{2^j}} \psi\left(\frac{x - 2^j n}{2^j}\right)$$

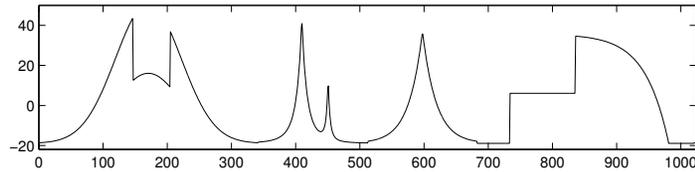
- $\mathcal{B} = \left\{ \psi_{j,n} \right\}_{j \in \mathbb{N}, 2^j n \in [0,1]}$ est une base orthonormale de $\mathbf{L}^2[0, 1]$.



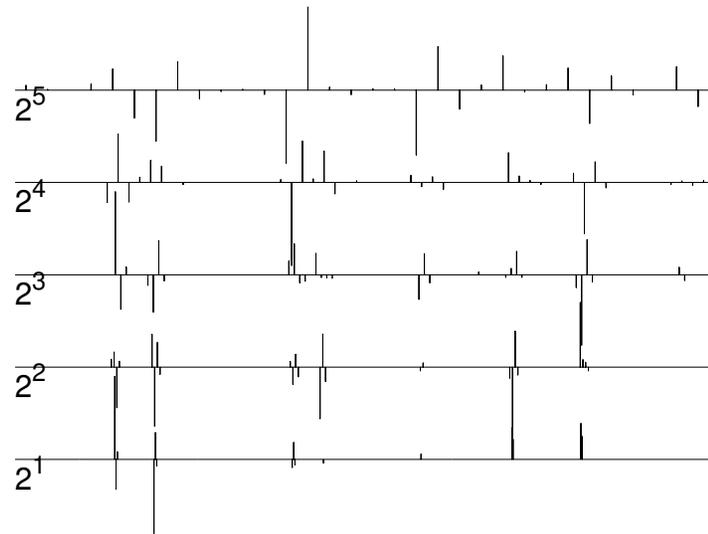
Approximation non linéaire en ondelettes

Approximation non linéaire en ondelettes

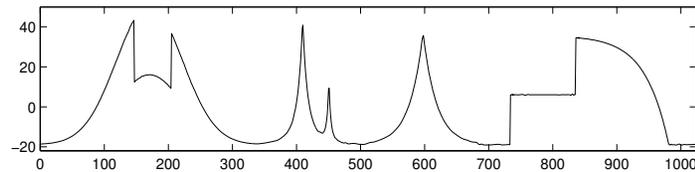
f



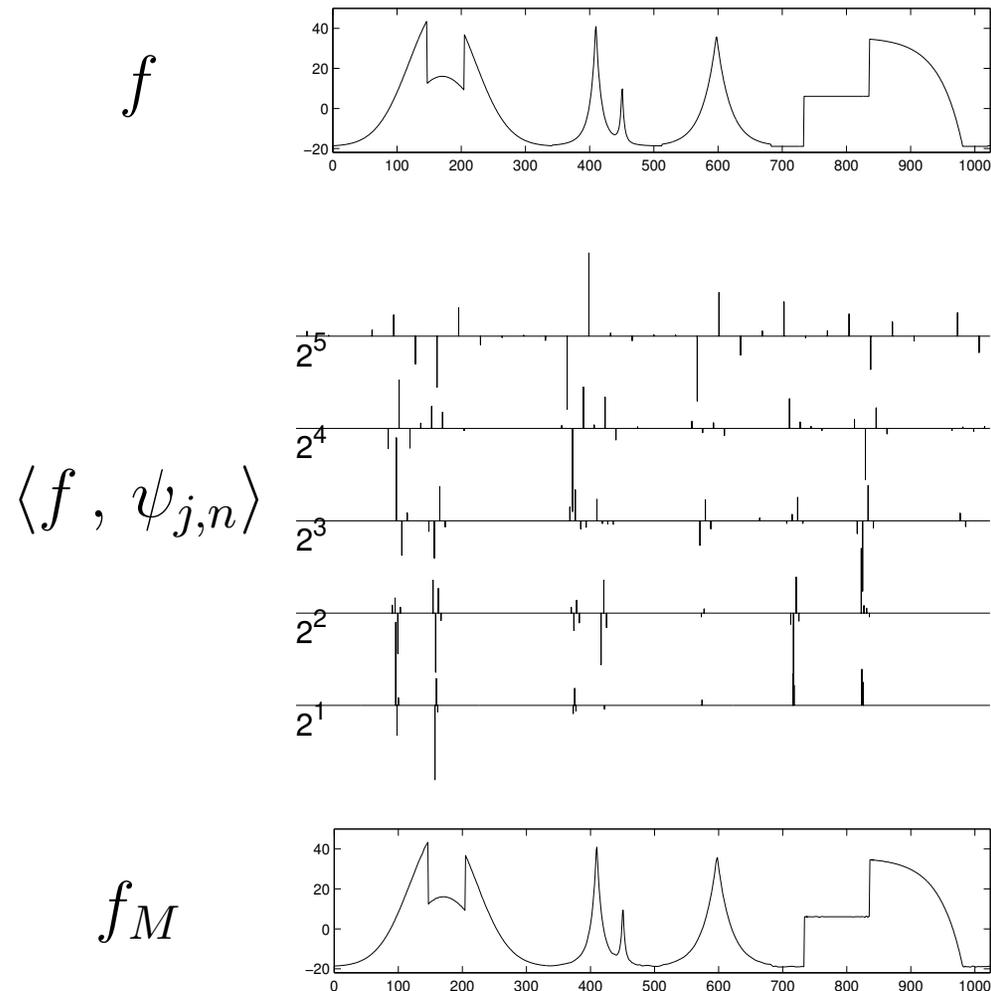
$\langle f, \psi_{j,n} \rangle$



f_M



Approximation non linéaire en ondelettes



- Si f est C^α par morceaux et ψ a $p > \alpha$ moments nuls alors

$$\|f - f_M\|^2 = O(M^{-2\alpha}) .$$

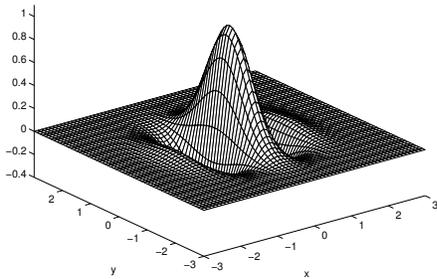
Base d'ondelettes 2D séparables

Base d'ondelettes 2D séparables

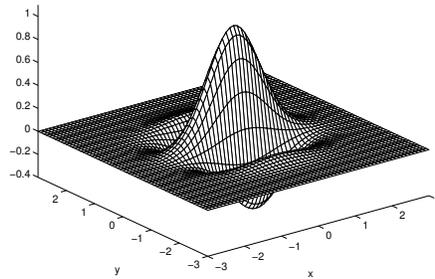
● La famille

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi_{j,n_1}(x_1) \psi_{j,n_2}(x_2) \quad , \quad \psi_{j,n_1}(x_1) \phi_{j,n_2}(x_2) \\ \psi_{j,n_1}(x_1) \psi_{j,n_2}(x_2) \end{array} \right\}_{(j,n_1,n_2) \in \mathbb{Z}^3}$$

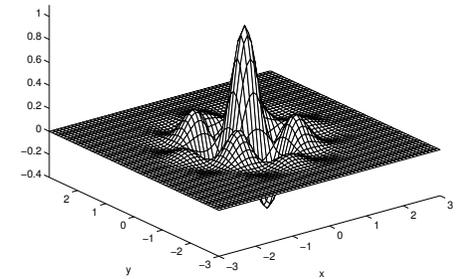
forme une base orthonormée de $\mathbf{L}^2[0, 1]^2$.



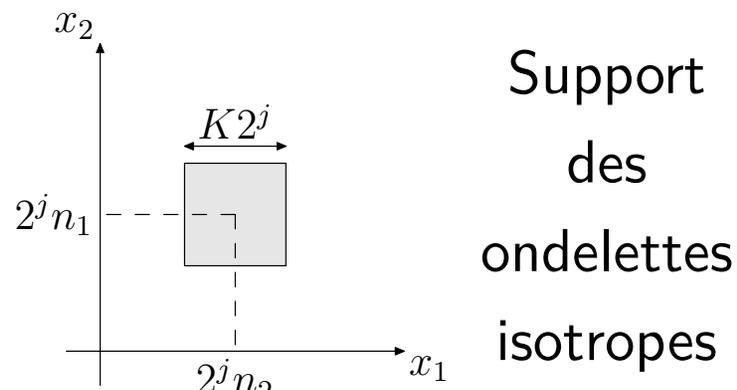
$$\phi_{j,n_1}(x_1) \psi_{j,n_2}(x_2)$$



$$\psi_{j,n_1}(x_1) \phi_{j,n_2}(x_2)$$



$$\psi_{j,n_1}(x_1) \psi_{j,n_2}(x_2)$$



Succès et échecs des bases d'ondelettes

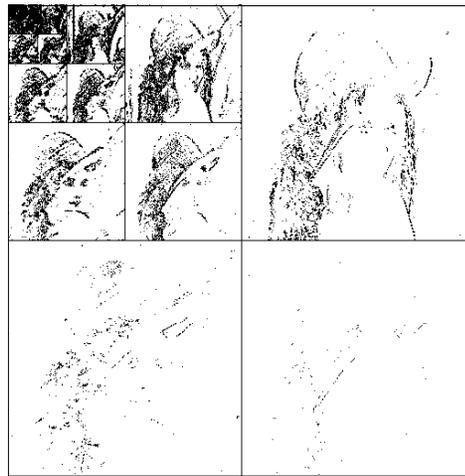
Succès et échecs des bases d'ondelettes

- Les images sont décomposées dans une base d'ondelettes 2D et les coefficients les plus grands sont conservés (JPEG-2000).

f



M plus grands coeff.

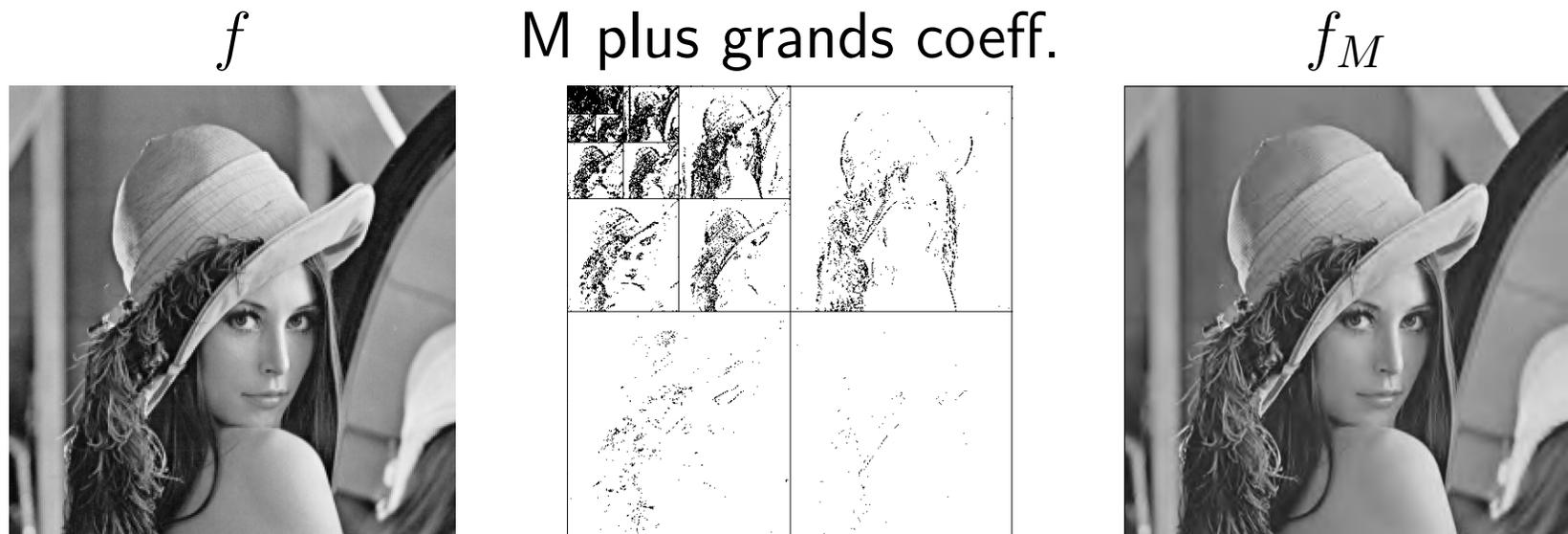


f_M



Succès et échecs des bases d'ondelettes

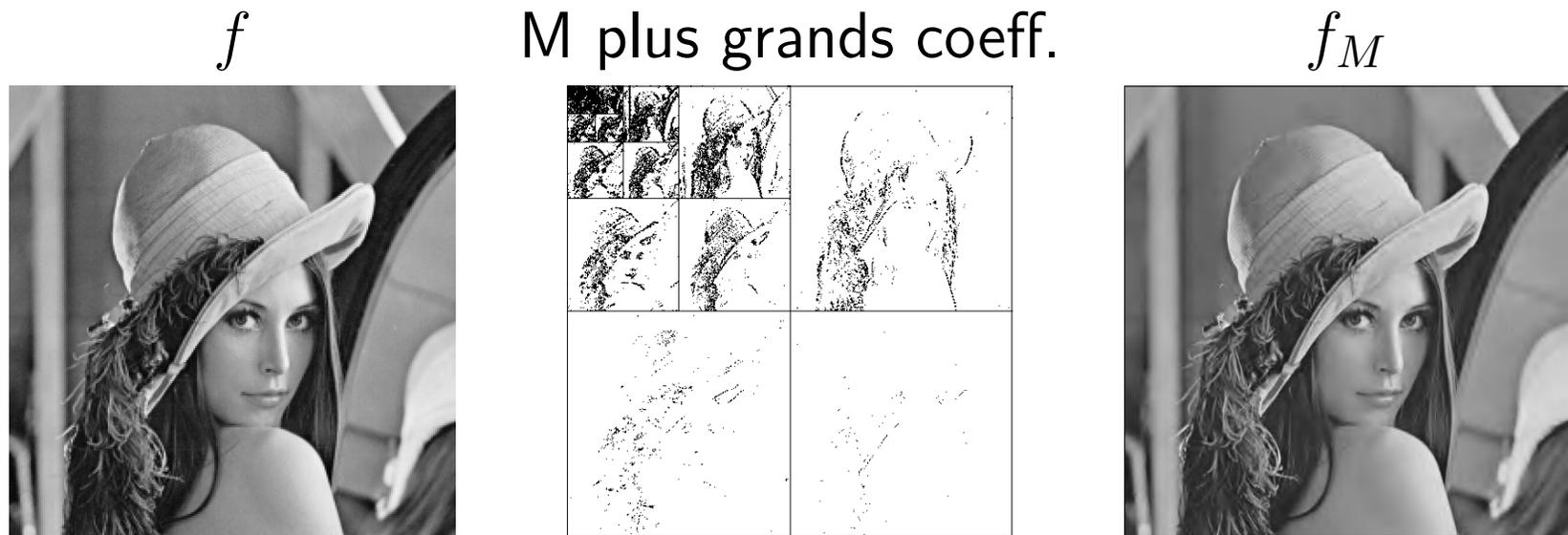
- Les images sont décomposées dans une base d'ondelettes 2D et les coefficients les plus grands sont conservés (JPEG-2000).



- (Cohen, DeVore, Petrushev, Xue) : Optimal pour les fonctions à variation bornée : $\|f - f_M\|^2 \leq C \|f\|_{TV} M^{-1}$.

Succès et échecs des bases d'ondelettes

- Les images sont décomposées dans une base d'ondelettes 2D et les coefficients les plus grands sont conservés (JPEG-2000).

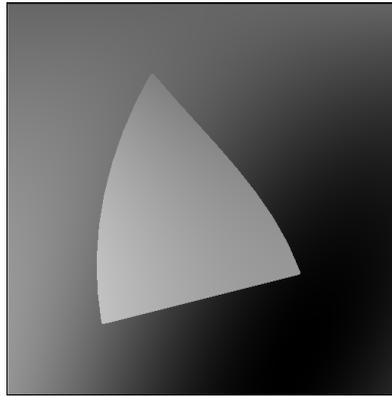


- (Cohen, DeVore, Petrushev, Xue) : Optimal pour les fonctions à variation bornée : $\|f - f_M\|^2 \leq C \|f\|_{TV} M^{-1}$.
- Mais ne prend avantage d'aucune sorte de régularité géométrique.

Utiliser la régularité géométrique

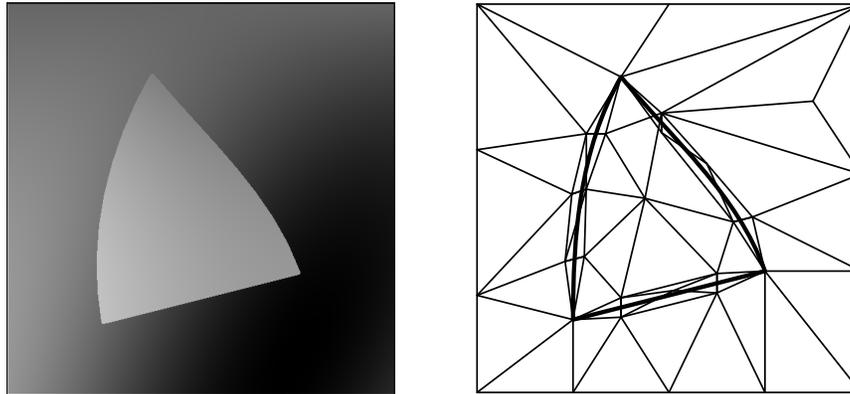
Utiliser la régularité géométrique

- Approximations de f qui est C^α en dehors de “contours” qui sont C^α par morceaux ($\alpha \geq 2$) :

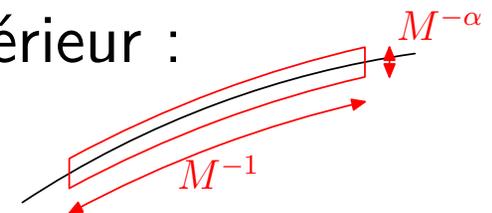
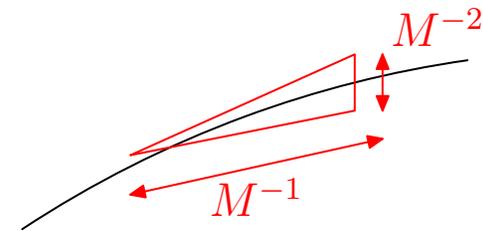


Utiliser la régularité géométrique

- Approximations de f qui est C^α en dehors de “contours” qui sont C^α par morceaux ($\alpha \geq 2$) :



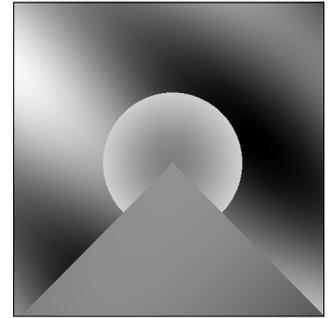
- avec M ondelettes : $\|f - f_M\|^2 \leq C M^{-1}$,
- avec M triangles : $\|f - f_M\|^2 \leq C M^{-2}$,
- avec M curvelets (*Candes, Donoho*) :
 $\|f - f_M\|^2 \leq C (\log M)^3 M^{-2}$,
- autres approches : (*Cohen, Matei*), (*Froment*), (*Taubman, Zakhor*), (*Romberg, Baraniuk*), (*Dragotti, Vetterli, Do*)...
- avec M éléments géométriques d'ordre supérieur :
 $\|f - f_M\|^2 \leq C M^{-\alpha}$



Modèle de la géométrie

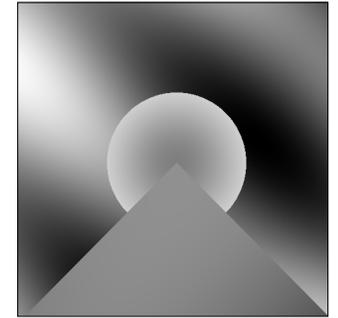
Modèle de la géométrie

- Fonction régulière par morceaux avec des discontinuités le long de courbes régulières :

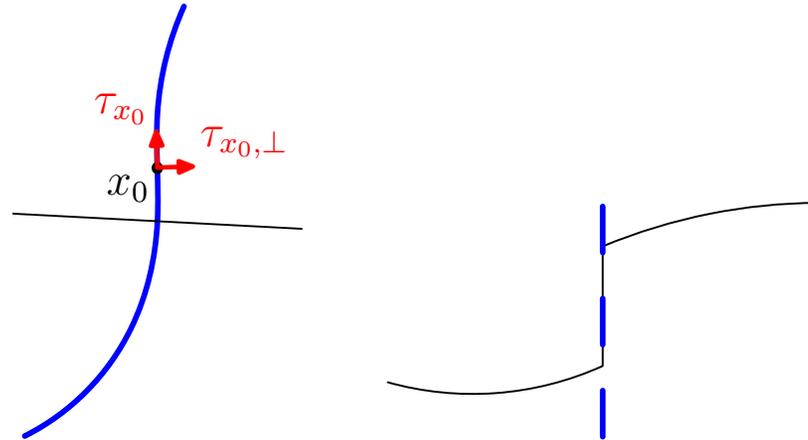


Modèle de la géométrie

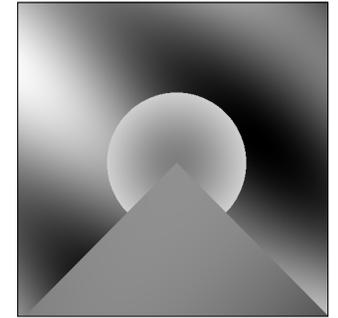
- Fonction régulière par morceaux avec des discontinuités le long de courbes régulières :



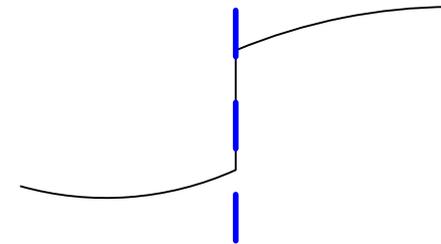
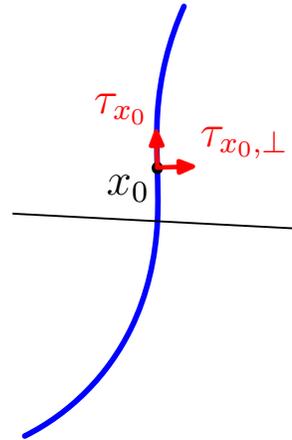
- Vraies discontinuités :



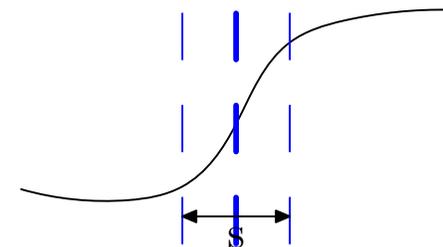
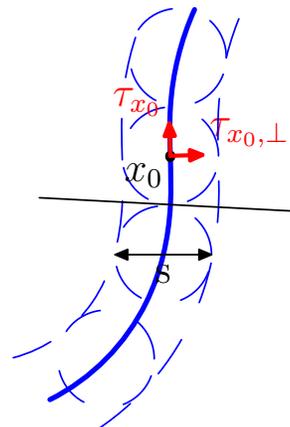
Modèle de la géométrie



- Fonction régulière par morceaux avec des discontinuités le long de courbes régulières :



- Vraies discontinuités :



- Discontinuités lissées :

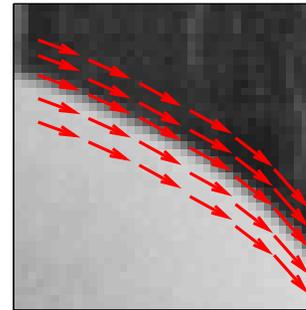
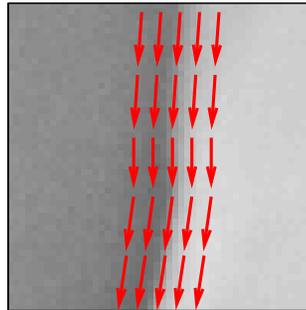
Flot géométrique segmenté

Flot géométrique segmenté

- Flot géométrique : champ de vecteurs $\vec{\tau}(x_1, x_2)$ donnant des directions dans lesquelles l'image est localement régulière.

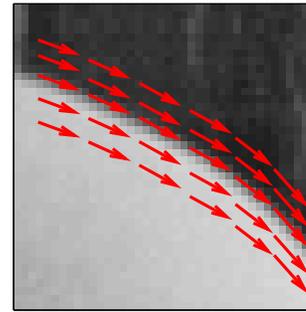
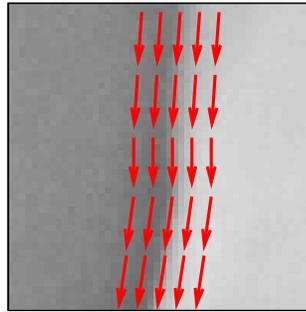
Flot géométrique segmenté

- Flot géométrique : champ de vecteurs $\vec{\tau}(x_1, x_2)$ donnant des directions dans lesquelles l'image est localement régulière.
- Dans une région, le flot est constant horizontalement ou verticalement.

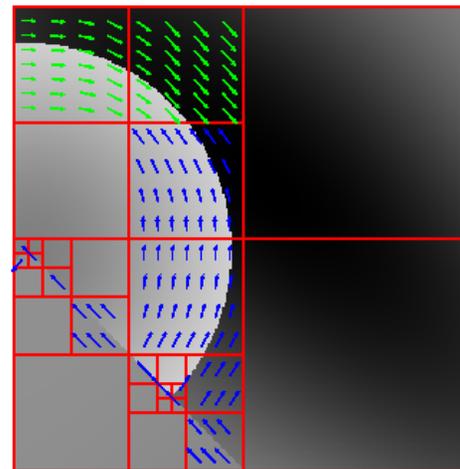
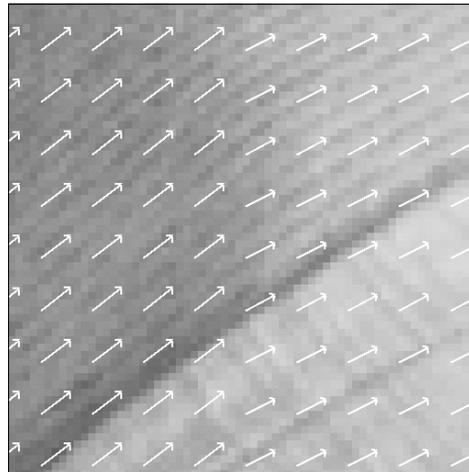


Flot géométrique segmenté

- Flot géométrique : champ de vecteurs $\vec{\tau}(x_1, x_2)$ donnant des directions dans lesquelles l'image est localement régulière.
- Dans une région, le flot est constant horizontalement ou verticalement.



- L'image est segmentée en telles régions.

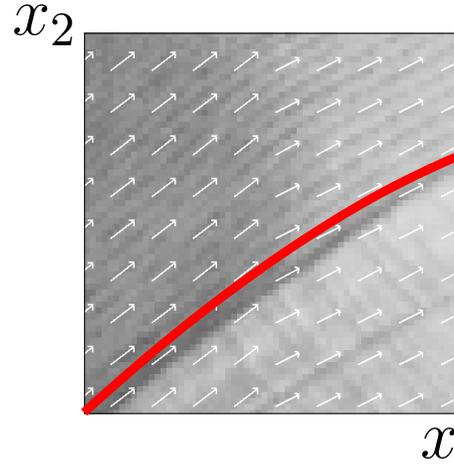


Base d'ondelettes déformées

Base d'ondelettes déformées

- Supposons le flot constant verticalement dans Ω :

$$\vec{\tau}(x_1, x_2) = (1, c'(x_1)) .$$

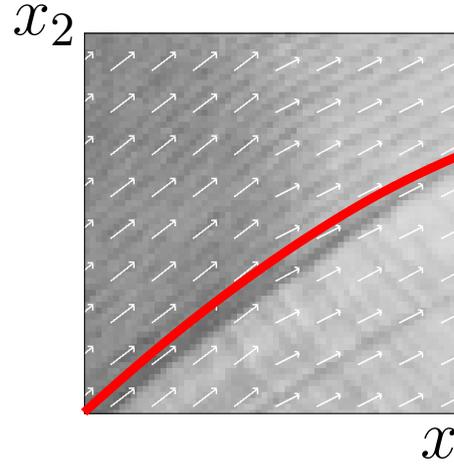


$$c(x_1) = \int_{x_{1,\min}}^{x_1} c'(u) du$$

Base d'ondelettes déformées

- Supposons le flot constant verticalement dans Ω :

$$\vec{\tau}(x_1, x_2) = (1, c'(x_1)) .$$



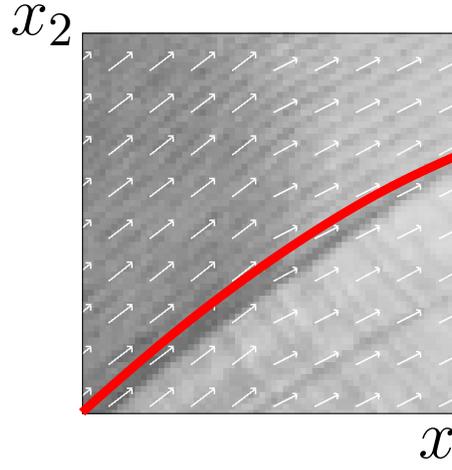
$$c(x_1) = \int_{x_{1,\min}}^{x_1} c'(u) du$$

- À x_2 fixé, $f(x_1, x_2 + c(x_1))$ est une fonction régulière de x_1 .

Base d'ondelettes déformées

- Supposons le flot constant verticalement dans Ω :

$$\vec{\tau}(x_1, x_2) = (1, c'(x_1)) .$$



$$c(x_1) = \int_{x_{1,\min}}^{x_1} c'(u) du$$

- À x_2 fixé, $f(x_1, x_2 + c(x_1))$ est une fonction régulière de x_1 .

- $$\langle f(x_1, x_2 + c(x_1)), \Psi(x_1, x_2) \rangle = \langle f(x_1, x_2), \Psi(x_1, x_2 - c(x_1)) \rangle .$$

Bandelettisation

Bandelettisation

- Les fonctions de la base doivent avoir des moments nuls selon x_1 (direction du flot).

Bandelettisation

- Les fonctions de la base doivent avoir des moments nuls selon x_1 (direction du flot).

Bandelettisation

- Les fonctions de la base doivent avoir des moments nuls selon x_1 (direction du flot).
- Bandelettisation : remplace $\{\phi_{j,m_1}(x_1)\}_{m_1}$ par une famille d'ondelettes $\{\psi_{l,m_1}(x_1)\}_{l>j, m_1}$ qui génère le même espace.
- Base d'ondelettes déformées de $\mathbf{L}^2(\Omega)$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi_{j,m_1}(x_1) \psi_{j,m_2}(x_2 - c(x_1)) \quad , \quad \psi_{j,m_1}(x_1) \phi_{j,m_2}(x_2 - c(x_1)) \\ \psi_{j,m_1}(x_1) \psi_{j,m_2}(x_2 - c(x_1)) \end{array} \right\}_j$$

Bandelettisation

- Les fonctions de la base doivent avoir des moments nuls selon x_1 (direction du flot).
- Bandelettisation : remplace $\{\phi_{j,m_1}(x_1)\}_{m_1}$ par une famille d'ondelettes $\{\psi_{l,m_1}(x_1)\}_{l>j, m_1}$ qui génère le même espace.
- Obtention d'une *base de bandelettes* de $\mathbf{L}^2(\Omega)$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi_{l,m_1}(x_1) \psi_{j,m_2}(x_2 - c(x_1)) \quad , \quad \psi_{j,m_1}(x_1) \phi_{j,m_2}(x_2 - c(x_1)) \\ \psi_{j,m_1}(x_1) \psi_{j,m_2}(x_2 - c(x_1)) \end{array} \right\}_{\substack{j,l>j \\ m_1,m_2}} .$$

Anisotrope

Base segmentée de bandelettes

Base segmentée de bandelettes

- Le support de l'image est segmenté en régions munies soit
 - d'une base de bandelettes à flot constant verticalement,
 - d'une base de bandelettes à flot constant horizontalement,
 - d'une base d'ondelettes sans flot (régularité isotrope).



Base segmentée de bandelettes

- Le support de l'image est segmenté en régions munies soit
 - d'une base de bandelettes à flot constant verticalement,
 - d'une base de bandelettes à flot constant horizontalement,
 - d'une base d'ondelettes sans flot (régularité isotrope).



- Transformée rapide en bandelettes ($O(N^2)$) :
 - rééchantillonnage, transformée en ondelettes déformées, bandelettisation.

Base segmentée de bandelettes

- Le support de l'image est segmenté en régions munies soit
 - d'une base de bandelettes à flot constant verticalement,
 - d'une base de bandelettes à flot constant horizontalement,
 - d'une base d'ondelettes sans flot (régularité isotrope).

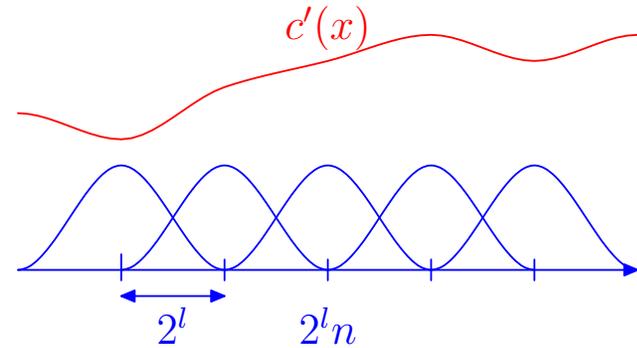


- Transformée rapide en bandelettes ($O(N^2)$) :
 - rééchantillonnage, transformée en ondelettes déformées, bandelettisation.
- Pas de discontinuités aux frontières grâce à un schéma de lifting

Détermination d'un flot paramétré

- # Détermination d'un flot paramétré
- Un flot constant verticalement $\vec{v}(x_1, x_2) = (1, c'(x_1))$ dans Ω est paramétré par

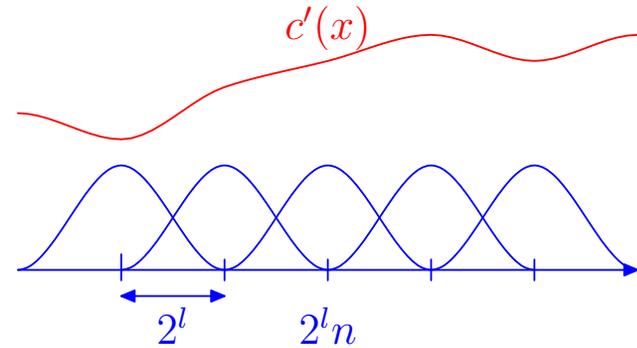
$$c'(x) = \sum_{n=1}^{L2^{-l}} \alpha_n \phi(2^{-l}x - n)$$



et les $L 2^{-l}$ paramètres α_n .

- # Détermination d'un flot paramétré
- Un flot constant verticalement $\vec{\tau}(x_1, x_2) = (1, c'(x_1))$ dans Ω est paramétré par

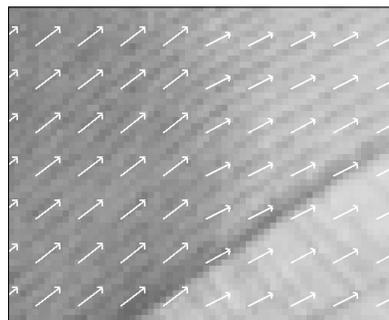
$$c'(x) = \sum_{n=1}^{L2^{-l}} \alpha_n \phi(2^{-l}x - n)$$



et les $L 2^{-l}$ paramètres α_n .

- Minimisation de

$$\int_{\Omega} \left| \vec{\nabla} f(x_1, x_2) \cdot \vec{\tau}(x_1, x_2) \right|^2 dx_1 dx_2 = \int_{\Omega} \left| \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial \vec{\tau}(x_1, x_2)} \right|^2 dx_1 dx_2 .$$



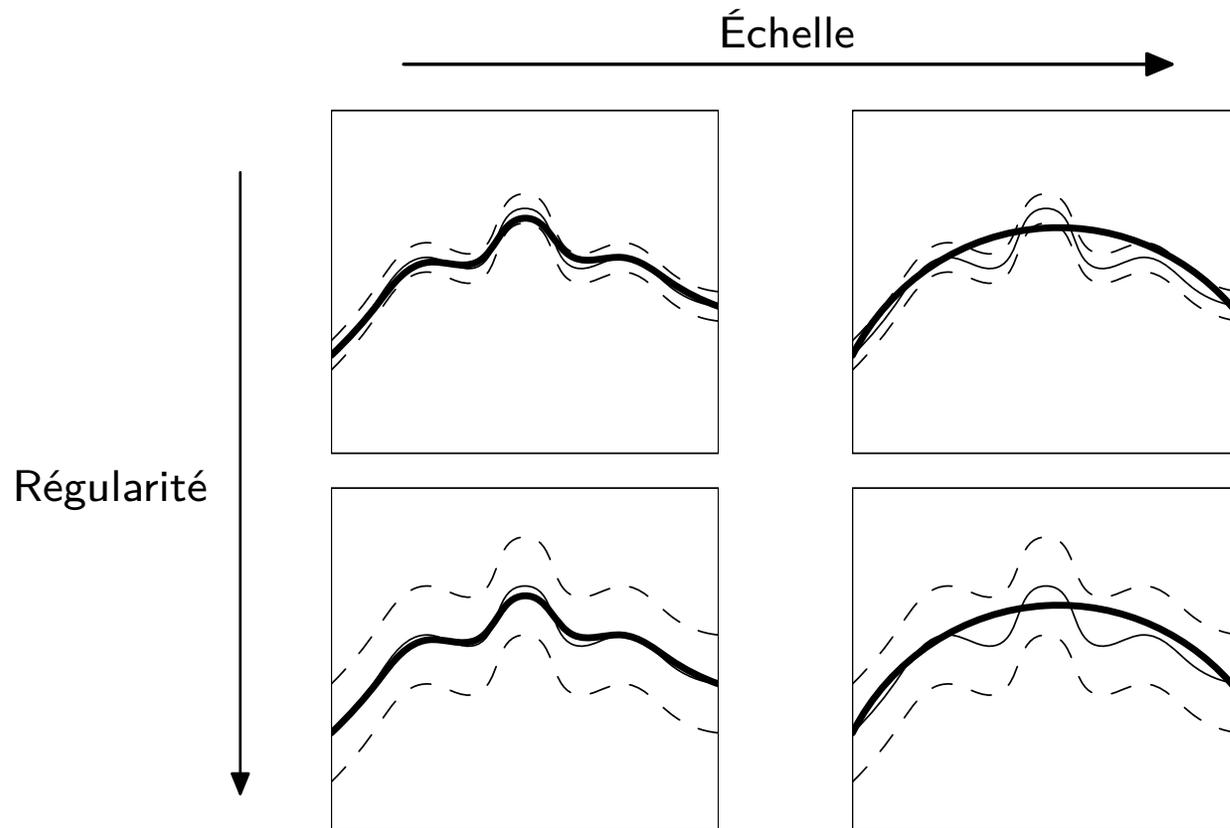
Choix de l'échelle de paramétrisation du flot

Choix de l'échelle de paramétrisation du flot

- Adaptation de l'échelle 2^l à la régularité du signal le long du flot :

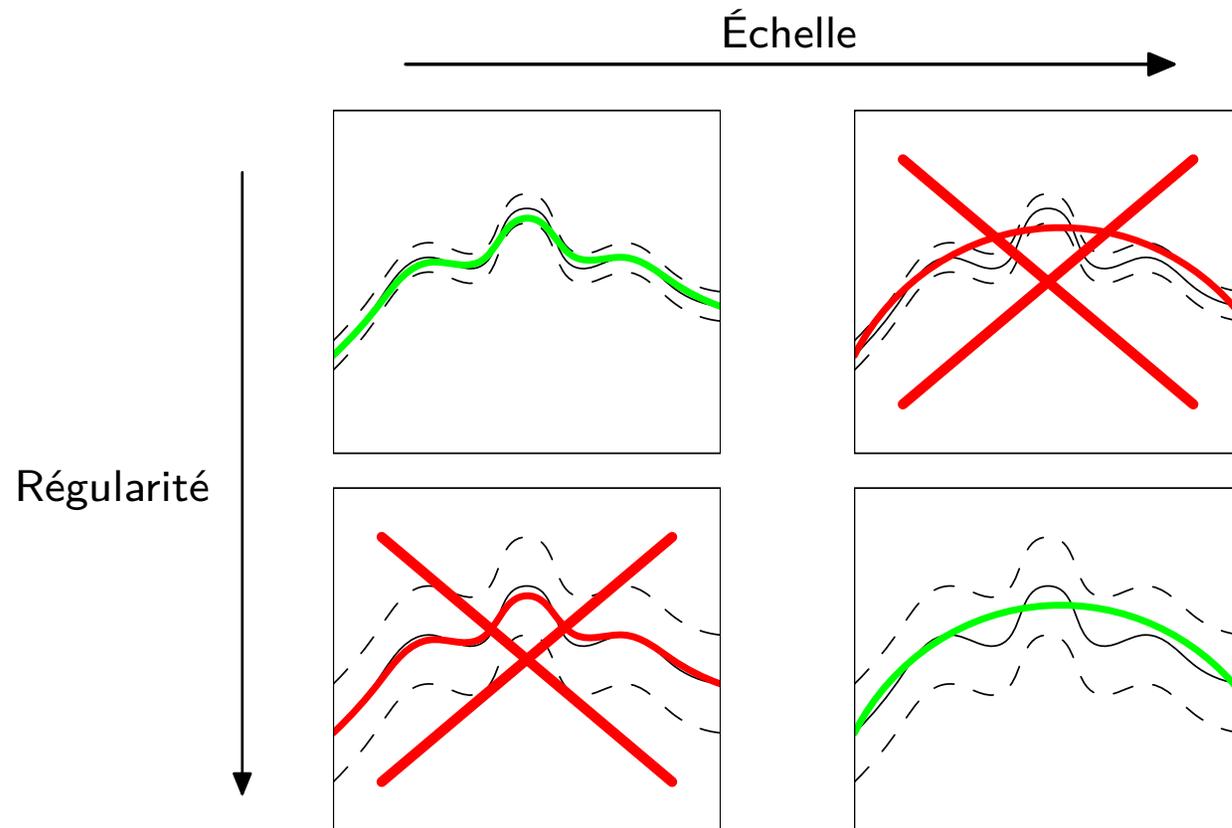
Choix de l'échelle de paramétrisation du flot

- Adaptation de l'échelle 2^l à la régularité du signal le long du flot :



Choix de l'échelle de paramétrisation du flot

- Adaptation de l'échelle 2^l à la régularité du signal le long du flot :



Approximation M termes

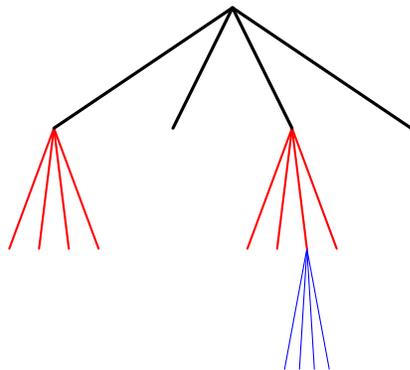
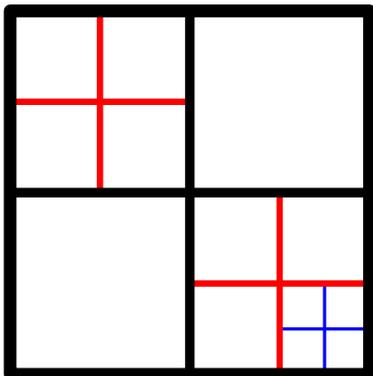
Approximation M termes

- Une approximation en bandelettes est donnée par :
 - une segmentation en carrés dyadiques, représentée par les M_s nœuds intérieurs de l'arbre quaternaire de la segmentation,
 - à l'intérieur de chaque carré Ω_i de la segmentation par :
 - $M_{g,i}$ coefficients du flot géométrique,
 - $M_{b,i}$ coefficients de bandelettes au dessus d'un seuil T .

Approximation M termes

- Une approximation en bandelettes est donnée par :
 - une segmentation en carrés dyadiques, représentée par les M_s nœuds intérieurs de l'arbre quaternaire de la segmentation,
 - à l'intérieur de chaque carré Ω_i de la segmentation par :
 - $M_{g,i}$ coefficients du flot géométrique,
 - $M_{b,i}$ coefficients de bandelettes au dessus d'un seuil T .
- Nombre total de paramètres :

$$M = M_s + \sum_i \left(M_{g,i} + M_{b,i} \right) .$$



Optimisation de l'approximation

Optimisation de l'approximation

- Minimiser $\|f - f_M\|^2$ pour un nombre fixé M de paramètres.

Optimisation de l'approximation

- Minimiser $\|f - f_M\|^2$ pour un nombre fixé M de paramètres.
- Approche lagrangienne : trouver le meilleur flot géométrique segmenté qui minimise

$$\|f - f_M\|^2 + T^2 M .$$

Optimisation de l'approximation

- Minimiser $\|f - f_M\|^2$ pour un nombre fixé M de paramètres.
- Approche lagrangienne : trouver le meilleur flot géométrique segmenté qui minimise

$$\|f - f_M\|^2 + T^2 M .$$

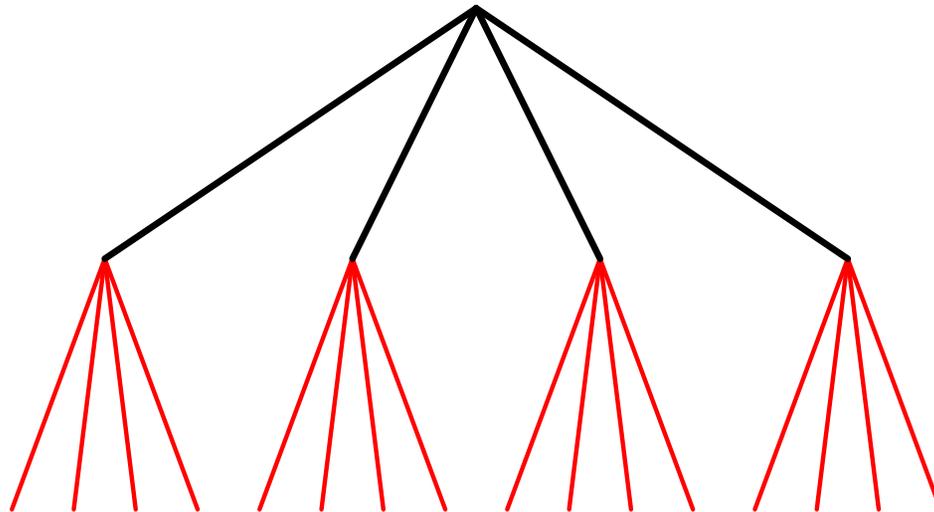
- Algorithme rapide (CART) : programmation dynamique de bas en haut sur la segmentation en arbre quaternaire.

Optimisation de l'approximation

- Minimiser $\|f - f_M\|^2$ pour un nombre fixé M de paramètres.
- Approche lagrangienne : trouver le meilleur flot géométrique segmenté qui minimise

$$\|f - f_M\|^2 + T^2 M .$$

- Algorithme rapide (CART) : programmation dynamique de bas en haut sur la segmentation en arbre quaternaire.
- Complexité : $O(N^2 (\log N)^2)$ pour N^2 pixels.



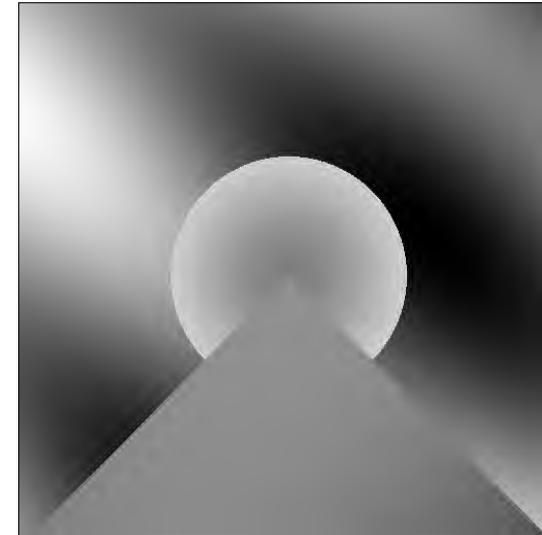
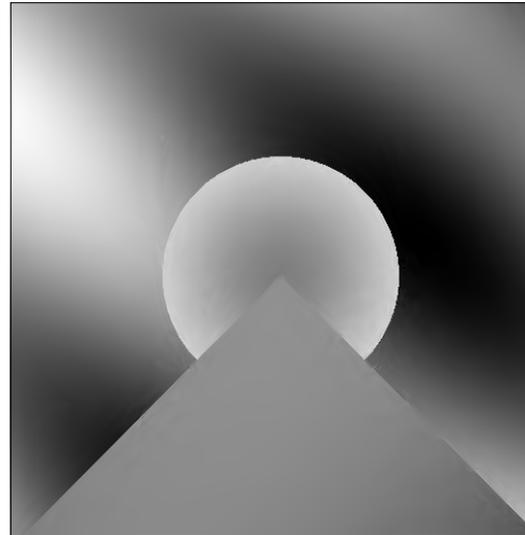
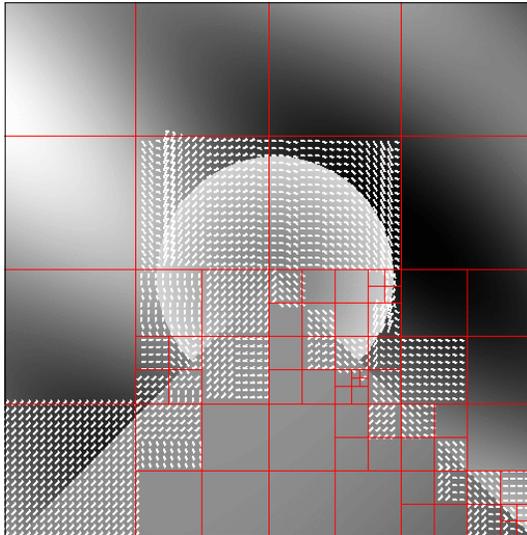
Fonction régulière par morceaux

Fonction régulière par morceaux

M=2650

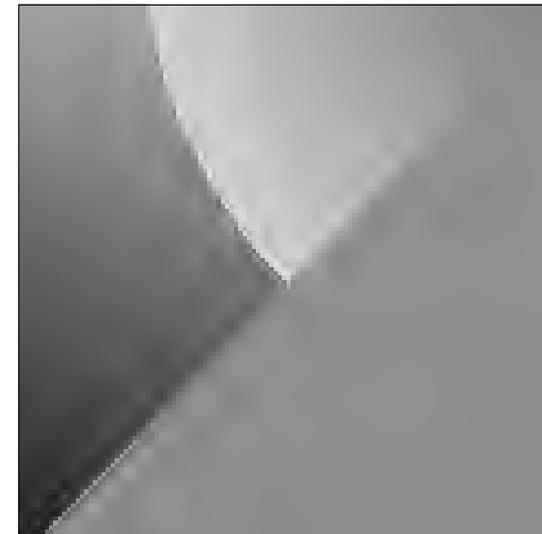
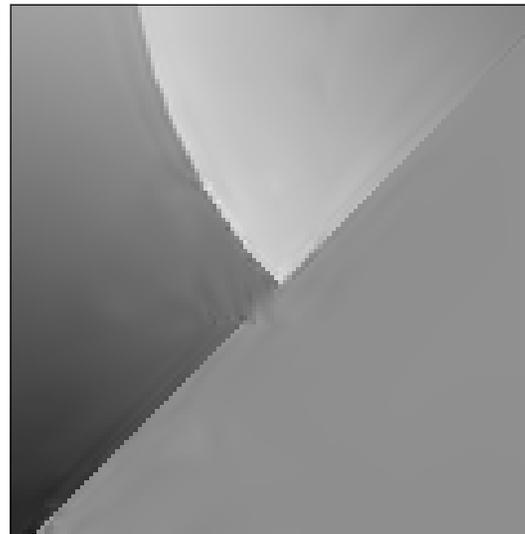
PSNR = 45,97 dB

PSNR = 40,17 dB



Bandelettes

Ondelettes

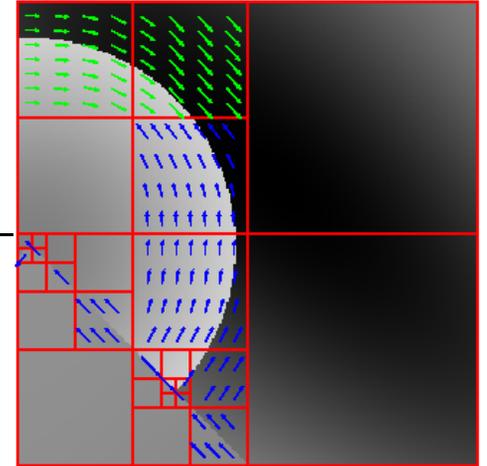


Théorème d'approximation

Théorème d'approximation

- Théorème : Si \tilde{f} est C^α en dehors de "contours" qui sont C^α par morceaux et non tangents, alors pour $f = \tilde{f}$ ou $f = \tilde{f} \star g$ (lissage).

$$\|f - f_M\|^2 \leq C M^{-\alpha} .$$

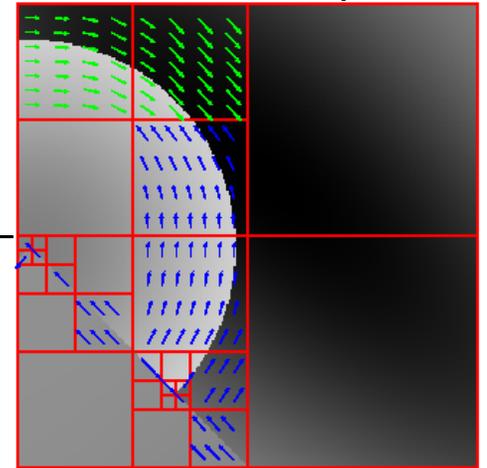


Théorème d'approximation

- Théorème : Si \tilde{f} est C^α en dehors de "contours" qui sont C^α par morceaux et non tangents, alors pour $f = \tilde{f}$ ou $f = \tilde{f} \star g$ (lissage).

$$\|f - f_M\|^2 \leq C M^{-\alpha} .$$

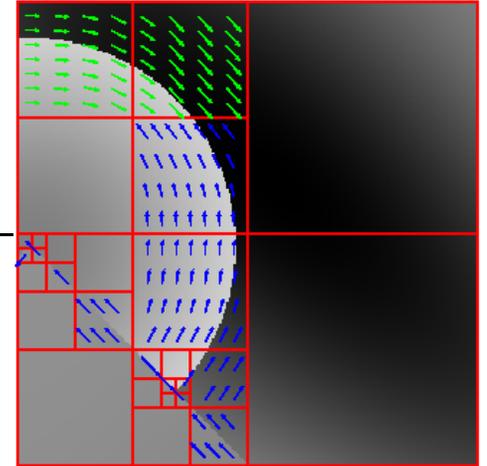
- Degré de régularité α inconnu.



Théorème d'approximation

- Théorème : Si \tilde{f} est C^α en dehors de "contours" qui sont C^α par morceaux et non tangents, alors pour $f = \tilde{f}$ ou $f = \tilde{f} \star g$ (lissage).

$$\|f - f_M\|^2 \leq C M^{-\alpha} .$$

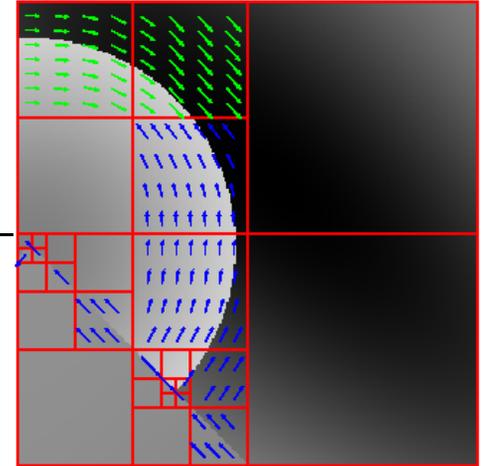


- Degré de régularité α inconnu.
- Exposant de décroissance α optimal.

Théorème d'approximation

- Théorème : Si \tilde{f} est C^α en dehors de "contours" qui sont C^α par morceaux et non tangents, alors pour $f = \tilde{f}$ ou $f = \tilde{f} \star g$ (lissage).

$$\|f - f_M\|^2 \leq C M^{-\alpha} .$$



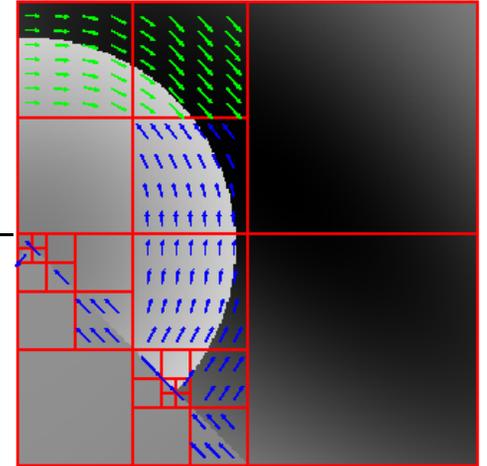
- Degré de régularité α inconnu.
- Exposant de décroissance α optimal.
- Amélioration par rapport aux ondelettes séparables pour lesquelles

$$\|f - f_M\|^2 \leq C M^{-1} .$$

Théorème d'approximation

- Théorème : Si \tilde{f} est C^α en dehors de "contours" qui sont C^α par morceaux et non tangents, alors pour $f = \tilde{f}$ ou $f = \tilde{f} \star g$ (lissage).

$$\|f - f_M\|^2 \leq C M^{-\alpha} .$$



- Degré de régularité α inconnu.
- Exposant de décroissance α optimal.
- Amélioration par rapport aux ondelettes séparables pour lesquelles

$$\|f - f_M\|^2 \leq C M^{-1} .$$

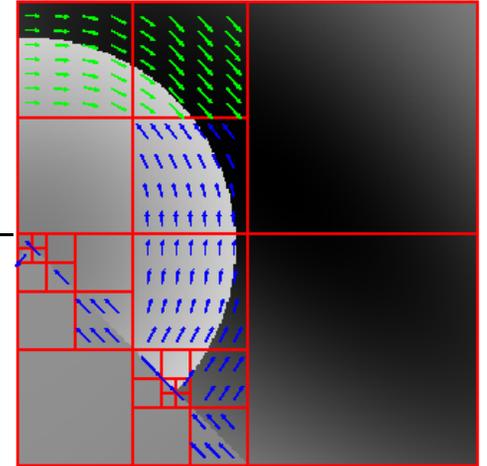
- Amélioration par rapport aux curvelets pour lesquelles

$$\|f - f_M\|^2 \leq C (\log M)^3 M^{-2} .$$

Théorème d'approximation

- Théorème : Si \tilde{f} est C^α en dehors de "contours" qui sont C^α par morceaux et non tangents, alors pour $f = \tilde{f}$ ou $f = \tilde{f} \star g$ (lissage).

$$\|f - f_M\|^2 \leq C M^{-\alpha} .$$



- Degré de régularité α inconnu.
- Exposant de décroissance α optimal.
- Amélioration par rapport aux ondelettes séparables pour lesquelles

$$\|f - f_M\|^2 \leq C M^{-1} .$$

- Amélioration par rapport aux curvelets pour lesquelles

$$\|f - f_M\|^2 \leq C (\log M)^3 M^{-2} .$$

- Bandelettes légèrement modifiées.

Frame de bandelettes

Frame de bandelettes

- Frame au lieu de base :

Frame de bandelettes

- Frame au lieu de base :
 - Familles orthonormées de bandelettes débordent des carrés associés : redondance.

Frame de bandelettes

- Frame au lieu de base :
 - Familles orthonormées de bandelettes débordent des carrés associés : redondance.
- Choix de la géométrie :

Frame de bandelettes

- Frame au lieu de base :
 - Familles orthonormées de bandelettes débordent des carrés associés : redondance.
- Choix de la géométrie :
 - Estimation de la géométrie possible uniquement si les sauts des discontinuités de \tilde{f} ne tendent pas vers 0.

Frame de bandelettes

- Frame au lieu de base :
 - Familles orthonormées de bandelettes débordent des carrés associés : redondance.
- Choix de la géométrie :
 - Estimation de la géométrie possible uniquement si les sauts des discontinuités de \tilde{f} ne tendent pas vers 0.
 - Cas général : exploration exhaustive de toutes les géométries sur un carré à une précision ϵ près

$$c'(x) = \sum_{n=1}^{L2^{-l}} \alpha_n \phi(2^{-l}x - n) \quad \forall \alpha_n \in \epsilon\mathbb{Z} \cap [-2, 2]$$

Frame de bandelettes

- Frame au lieu de base :
 - Familles orthonormées de bandelettes débordent des carrés associés : redondance.
- Choix de la géométrie :
 - Estimation de la géométrie possible uniquement si les sauts des discontinuités de \tilde{f} ne tendent pas vers 0.
 - Cas général : exploration exhaustive de toutes les géométries sur un carré à une précision ϵ près

$$c'(x) = \sum_{n=1}^{L2^{-l}} \alpha_n \phi(2^{-l}x - n) \quad \forall \alpha_n \in \epsilon\mathbb{Z} \cap [-2, 2]$$

- Complexité exponentielle !

Flot polynomial par morceaux

Flot polynomial par morceaux

- Réduction de la complexité par une diminution du nombre de géométries.

Flot polynomial par morceaux

- Réduction de la complexité par une diminution du nombre de géométries.

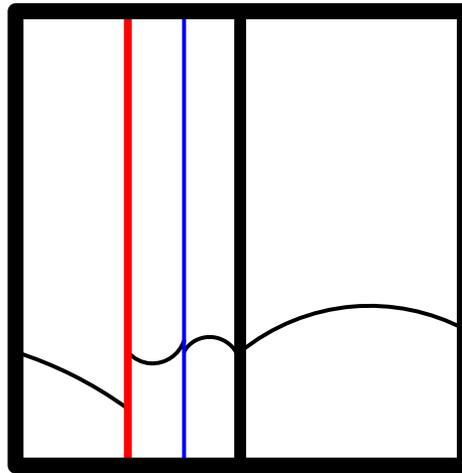
- Flot polynomial :
$$c'(x) = \sum_{n=0}^p \alpha_n x^n \quad .$$

Flot polynomial par morceaux

- Réduction de la complexité par une diminution du nombre de géométries.

- Flot polynomial :
$$c'(x) = \sum_{n=0}^p \alpha_n x^n \quad .$$

- Redécoupage des carrés dyadiques en rectangles dyadiques.

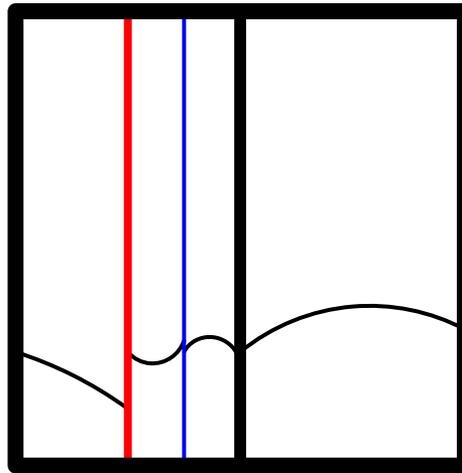


Flot polynomial par morceaux

- Réduction de la complexité par une diminution du nombre de géométries.

- Flot polynomial :
$$c'(x) = \sum_{n=0}^p \alpha_n x^n \quad .$$

- Redécoupage des carrés dyadiques en rectangles dyadiques.



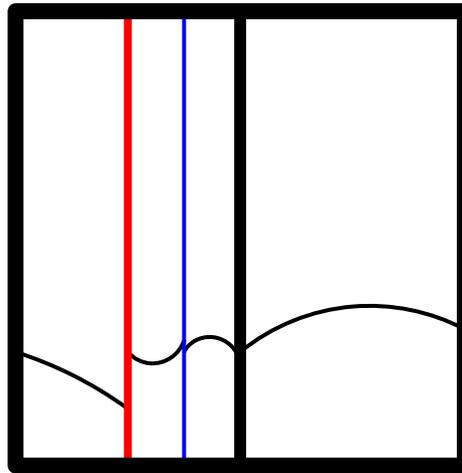
- Algorithme d'optimisation de complexité polynomiale.

Flot polynomial par morceaux

- Réduction de la complexité par une diminution du nombre de géométries.

- Flot polynomial :
$$c'(x) = \sum_{n=0}^p \alpha_n x^n \quad .$$

- Redécoupage des carrés dyadiques en rectangles dyadiques.



- Algorithme d'optimisation de complexité polynomiale.
- Apparition d'un facteur logarithmique dans la décroissance :

$$\|f - f_M\|^2 \leqslant CM^{-\alpha} \log M$$

Compression d'image

Compression d'image

- Lien entre la compression et l'approximation non linéaire.

Compression d'image

- Lien entre la compression et l'approximation non linéaire.
- Une image comprimée \tilde{f} est obtenue à partir de f en :
 - choisissant une segmentation et un flot quantifié,
 - quantifiant uniformément les coefficients de bandelettes avec un pas de taille Δ .
 - effectuant le codage entropique de tous les paramètres avec un total de R bits.

Compression d'image

- Lien entre la compression et l'approximation non linéaire.
- Une image comprimée \tilde{f} est obtenue à partir de f en :
 - choisissant une segmentation et un flot quantifié,
 - quantifiant uniformément les coefficients de bandelettes avec un pas de taille Δ .
 - effectuant le codage entropique de tous les paramètres avec un total de R bits.
- Optimisation de la géométrie (segmentation et flot) pour minimiser le lagrangien :

$$\|f - \tilde{f}\|^2 + \lambda \Delta^2 R$$

Compression d'image

- Lien entre la compression et l'approximation non linéaire.
- Une image comprimée \tilde{f} est obtenue à partir de f en :
 - choisissant une segmentation et un flot quantifié,
 - quantifiant uniformément les coefficients de bandelettes avec un pas de taille Δ .
 - effectuant le codage entropique de tous les paramètres avec un total de R bits.
- Optimisation de la géométrie (segmentation et flot) pour minimiser le lagrangien :

$$\|f - \tilde{f}\|^2 + \lambda \Delta^2 R$$

- $O(N^2 (\log N)^2)$ opérations.

Compression d'image

- Lien entre la compression et l'approximation non linéaire.
- Une image comprimée \tilde{f} est obtenue à partir de f en :
 - choisissant une segmentation et un flot quantifié,
 - quantifiant uniformément les coefficients de bandelettes avec un pas de taille Δ .
 - effectuant le codage entropique de tous les paramètres avec un total de R bits.
- Optimisation de la géométrie (segmentation et flot) pour minimiser le lagrangien :

$$\|f - \tilde{f}\|^2 + \lambda \Delta^2 R$$

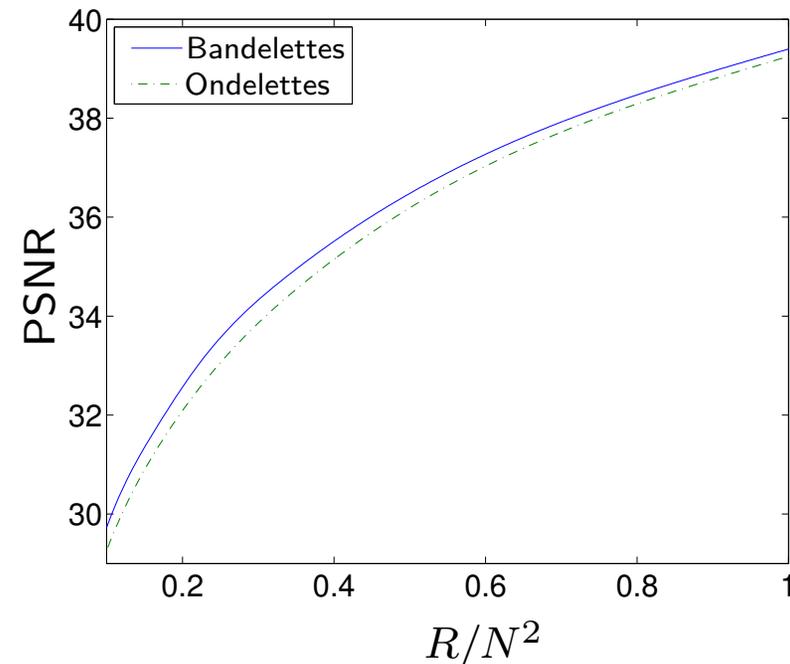
- $O(N^2 (\log N)^2)$ opérations.
- Résultat théorique :

$$\|f - \tilde{f}\|^2 \leq C R^{-\alpha} |\log R|^\alpha$$

Originale



Distorsion-Débit



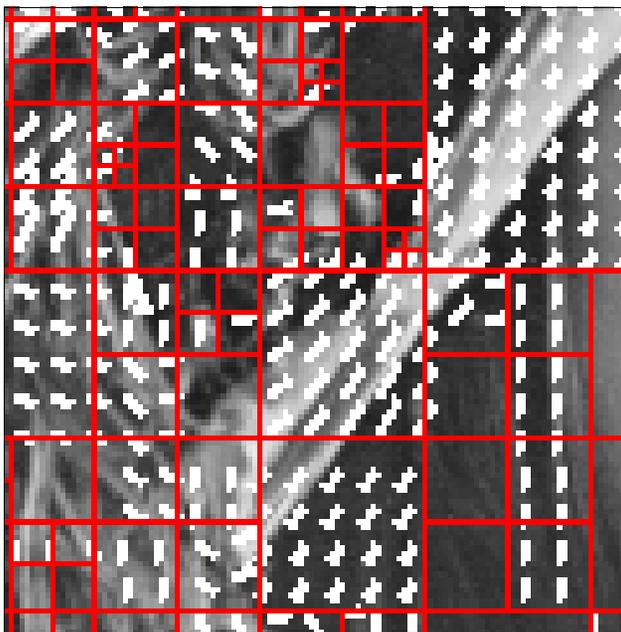
$R/N^2 = 0,22$ bpp

Bandelettes (33,05 db)

Ondelettes (32,54 db)



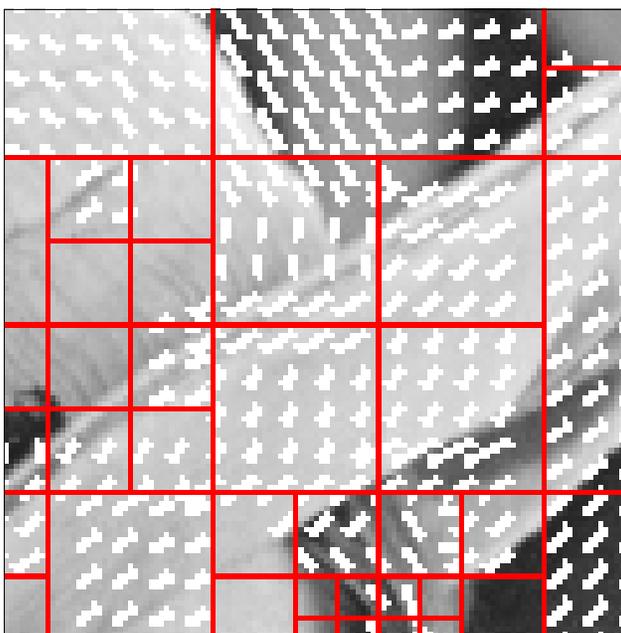
Originale



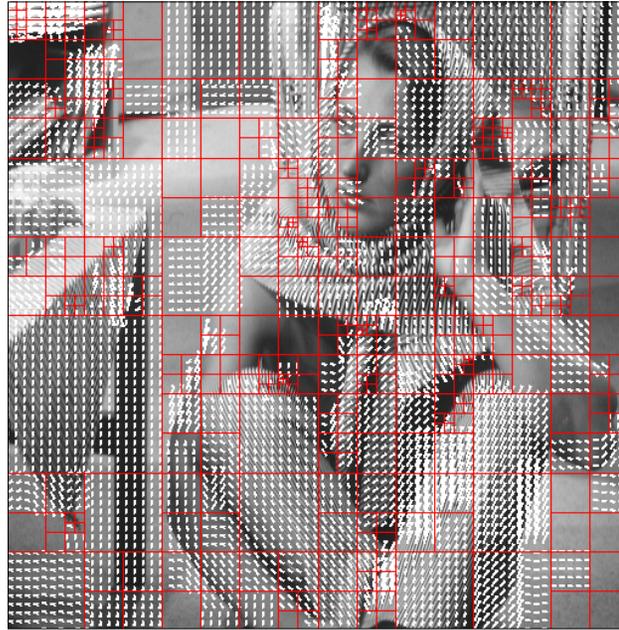
Bandelettes



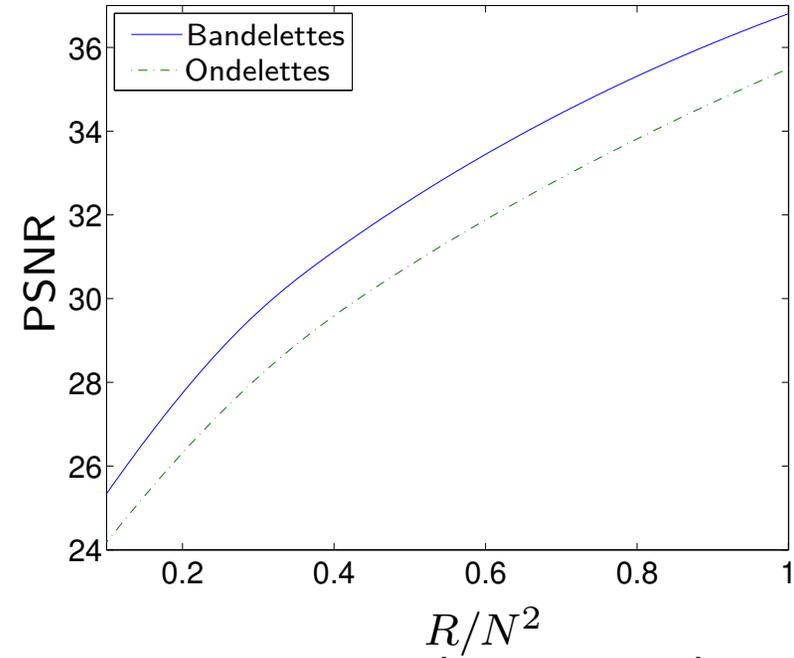
Ondelettes



Originale



Distorsion-Débit



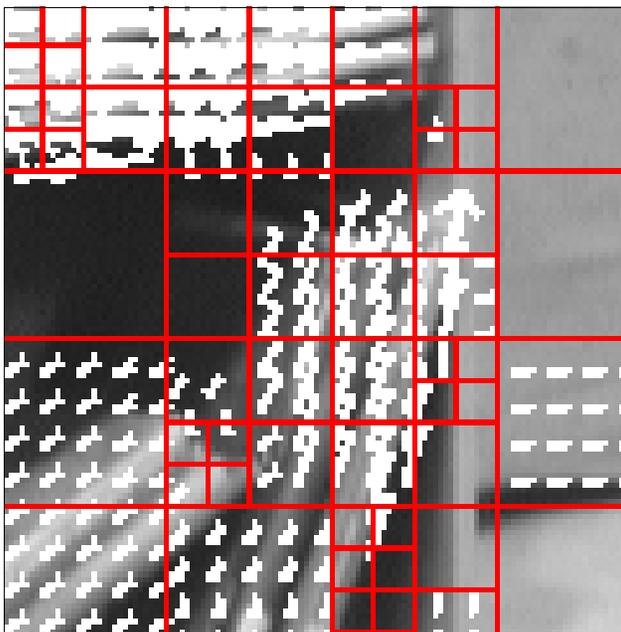
$R/N^2 = 0,40$ bpp

Bandelettes (31,22 db)

Ondelettes (29,68 db)



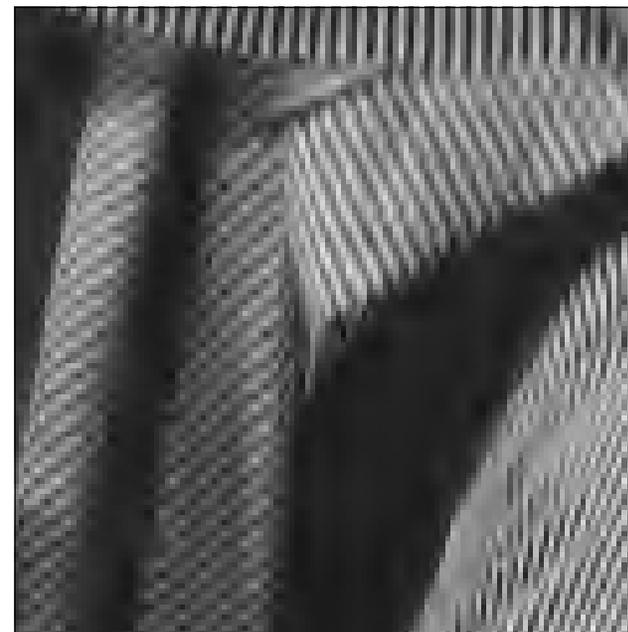
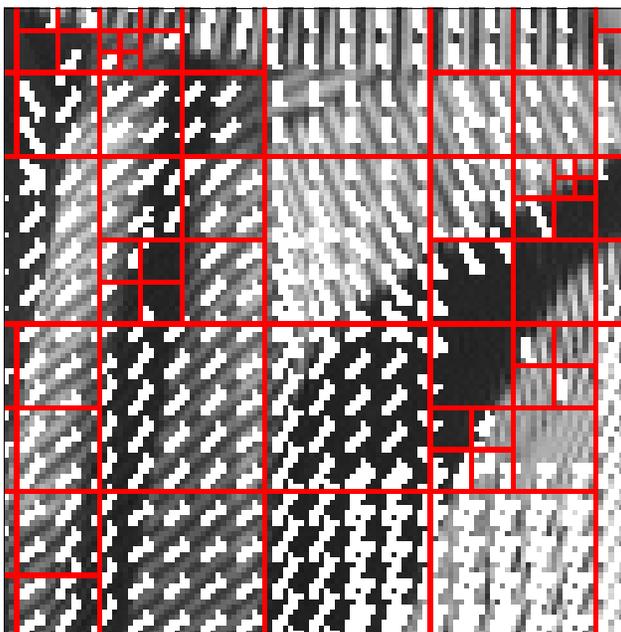
Originale



Bandelettes



Ondelettes



Débruitage

Débruitage

- Estimer une image f à partir de données bruitées

$$X = f + W \quad \text{où } W \text{ est un bruit Gaussien de variance } \sigma^2.$$

Débruitage

- Estimer une image f à partir de données bruitées

$$X = f + W \quad \text{où } W \text{ est un bruit Gaussien de variance } \sigma^2.$$

- Estimateur par seuillage dans une base $\mathcal{B} = \{g_m\}_{1 \leq m \leq N^2}$:

$$F = \sum_{|\langle X, g_m \rangle| > T} \langle X, g_m \rangle \tilde{g}_m = P_{\mathcal{M}}(X) .$$

Débruitage

- Estimer une image f à partir de données bruitées

$$X = f + W \quad \text{où } W \text{ est un bruit Gaussien de variance } \sigma^2.$$

- Estimateur par seuillage dans une base $\mathcal{B} = \{g_m\}_{1 \leq m \leq N^2}$:

$$F = \sum_{|\langle X, g_m \rangle| > T} \langle X, g_m \rangle \tilde{g}_m = P_{\mathcal{M}}(X) .$$

- Modèle : sous-espace de frame de bandelettes associé à une géométrie.

Débruitage

- Estimer une image f à partir de données bruitées

$$X = f + W \quad \text{où } W \text{ est un bruit Gaussien de variance } \sigma^2.$$

- Estimateur par seuillage dans une base $\mathcal{B} = \{g_m\}_{1 \leq m \leq N^2}$:

$$F = \sum_{|\langle X, g_m \rangle| > T} \langle X, g_m \rangle \tilde{g}_m = P_{\mathcal{M}}(X).$$

- Modèle : sous-espace de frame de bandelettes associé à une géométrie.
- Le *modèle oracle* minimise le risque $E\{\|F - f\|^2\}$.

Débruitage

- Estimer une image f à partir de données bruitées

$$X = f + W \quad \text{où } W \text{ est un bruit Gaussien de variance } \sigma^2.$$

- Estimateur par seuillage dans une base $\mathcal{B} = \{g_m\}_{1 \leq m \leq N^2}$:

$$F = \sum_{|\langle X, g_m \rangle| > T} \langle X, g_m \rangle \tilde{g}_m = P_{\mathcal{M}}(X).$$

- Modèle : sous-espace de frame de bandelettes associé à une géométrie.
- Le *modèle oracle* minimise le risque $E\{\|F - f\|^2\}$.
- Utilisation d'estimateurs à pénalité.

Approche MDL

Approche MDL

- Principe du MDL : approche bayésienne.

Approche MDL

- Principe du MDL : approche bayésienne.
- A priori sur les fonctions : $P(f) \propto \exp(-R)$ où R est le nombre de bits nécessaires pour spécifier la fonction.

Approche MDL

- Principe du MDL : approche bayésienne.
- A priori sur les fonctions : $P(f) \propto \exp(-R)$ où R est le nombre de bits nécessaires pour spécifier la fonction.
- Estimation par maximum de vraisemblance.

Approche MDL

- Principe du MDL : approche bayésienne.
- A priori sur les fonctions : $P(f) \propto \exp(-R)$ où R est le nombre de bits nécessaires pour spécifier la fonction.
- Estimation par maximum de vraisemblance.
- Estimateur sélectionne le modèle qui minimise

$$\|X - F\|^2 + \lambda \sigma^2 R$$

Approche MDL

- Principe du MDL : approche bayésienne.
- A priori sur les fonctions : $P(f) \propto \exp(-R)$ où R est le nombre de bits nécessaires pour spécifier la fonction.
- Estimation par maximum de vraisemblance.
- Estimateur sélectionne le modèle qui minimise

$$\|X - F\|^2 + \lambda \sigma^2 R$$

- Permet d'utiliser directement les travaux précédents.

Approche MDL

- Principe du MDL : approche bayésienne.
- A priori sur les fonctions : $P(f) \propto \exp(-R)$ où R est le nombre de bits nécessaires pour spécifier la fonction.
- Estimation par maximum de vraisemblance.
- Estimateur sélectionne le modèle qui minimise

$$\|X - F\|^2 + \lambda \sigma^2 R$$

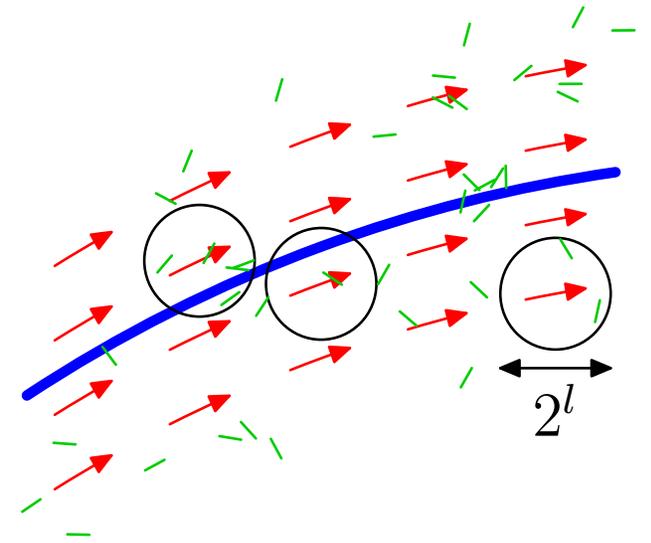
- Permet d'utiliser directement les travaux précédents.
- Pas de résultat théorique mais algorithme pratique.

Détermination d'un flot avec du bruit

Détermination d'un flot avec du bruit

- Régularisation de l'image à l'échelle 2^l : $f \star \theta_l$ avec

$$\theta_l(x_1, x_2) = 2^{-2l} \theta(2^{-l}x_1, 2^{-l}x_2) .$$



Détermination d'un flot avec du bruit

- Régularisation de l'image à l'échelle 2^l : $f \star \theta_l$ avec

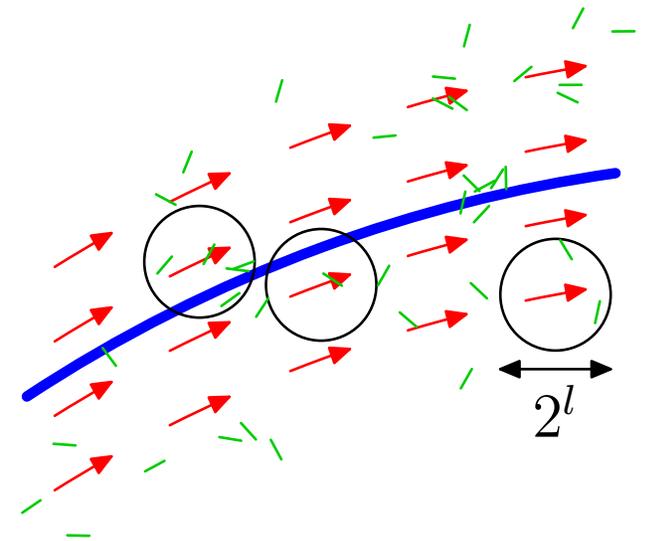
$$\theta_l(x_1, x_2) = 2^{-2l} \theta(2^{-l}x_1, 2^{-l}x_2) .$$

- Flot paramétré à l'échelle 2^l :

$$c'(x) = \sum_{n=1}^{L2^{-l}} \alpha_n \phi(2^{-l}x - n) ,$$

où les α_n minimisent

$$\int_{\Omega} \left| \vec{\nabla}(f \star \theta_l)(x_1, x_2) \cdot \vec{\tau}(x_1, x_2) \right|^2 dx_1 dx_2 = \int_{\Omega} \left| \frac{\partial(f \star \theta_l)(x_1, x_2)}{\partial \vec{\tau}(x_1, x_2)} \right|^2 dx_1 dx_2$$



Détermination d'un flot avec du bruit

- Régularisation de l'image à l'échelle 2^l : $f \star \theta_l$ avec

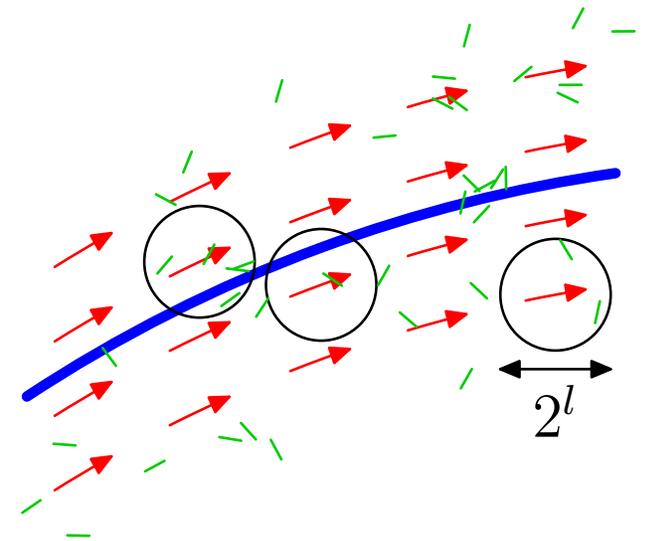
$$\theta_l(x_1, x_2) = 2^{-2l} \theta(2^{-l}x_1, 2^{-l}x_2) .$$

- Flot paramétré à l'échelle 2^l :

$$c'(x) = \sum_{n=1}^{L2^{-l}} \alpha_n \phi(2^{-l}x - n) ,$$

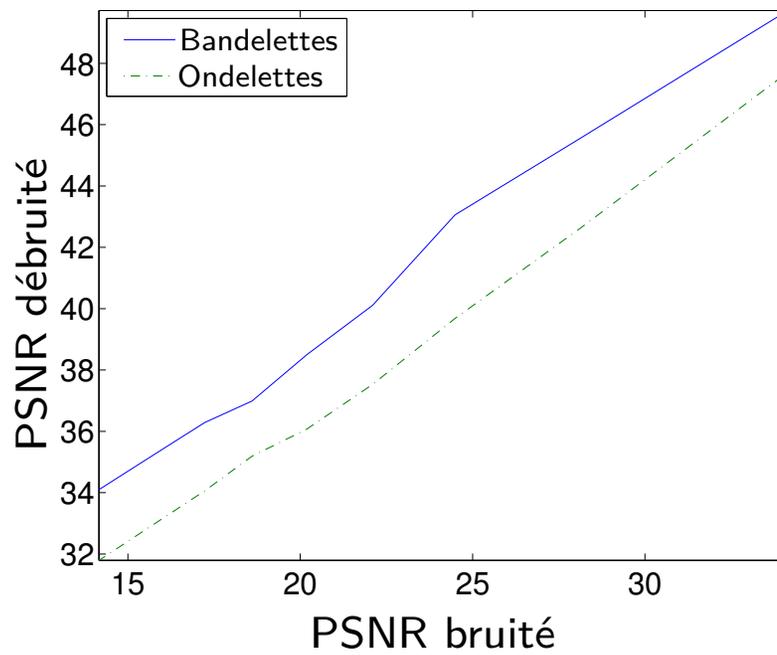
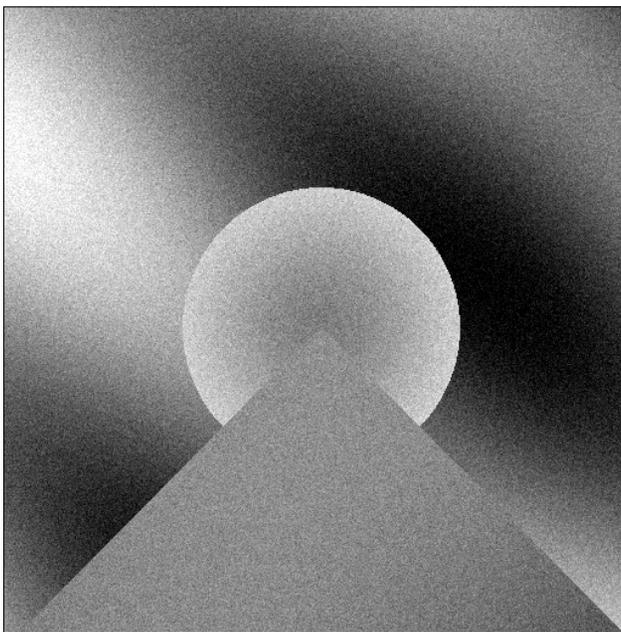
où les α_n minimisent

$$\int_{\Omega} \left| \vec{\nabla}(f \star \theta_l)(x_1, x_2) \cdot \vec{\tau}(x_1, x_2) \right|^2 dx_1 dx_2 = \int_{\Omega} \left| \frac{\partial(f \star \theta_l)(x_1, x_2)}{\partial \vec{\tau}(x_1, x_2)} \right|^2 dx_1 dx_2$$

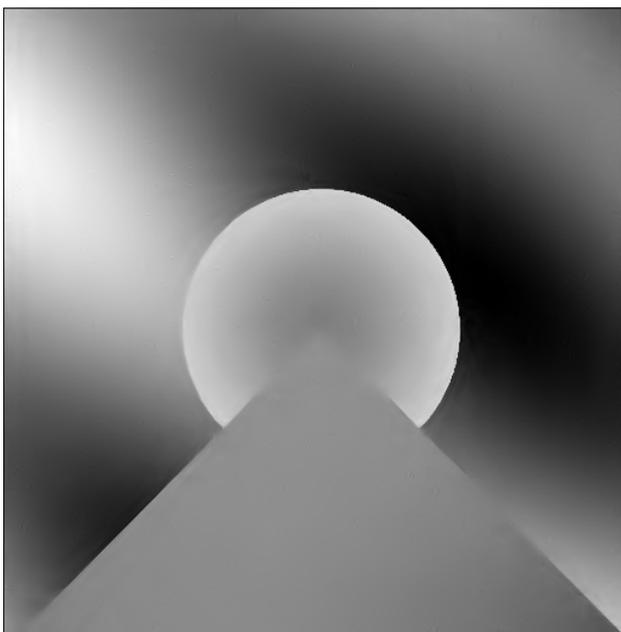


- L'échelle 2^l est ajustée à la variance du bruit et à la régularité locale du signal via la minimisation pénalisée.

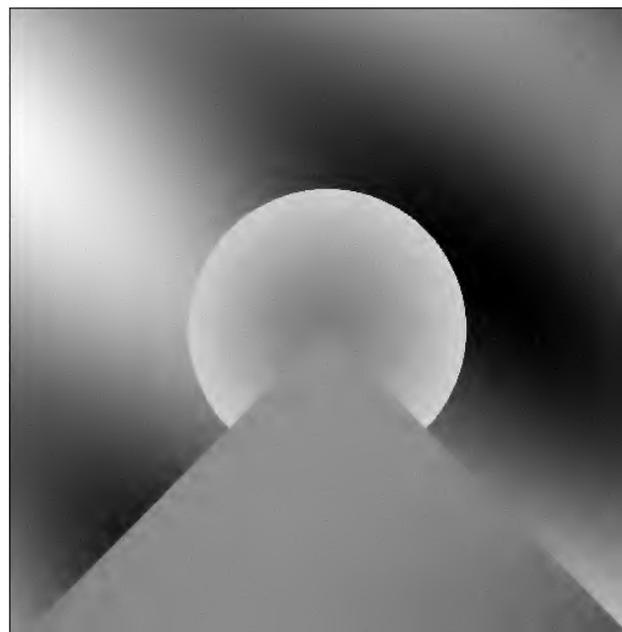
Bruité (20,19 dB)



Bandelettes (30,29 dB)



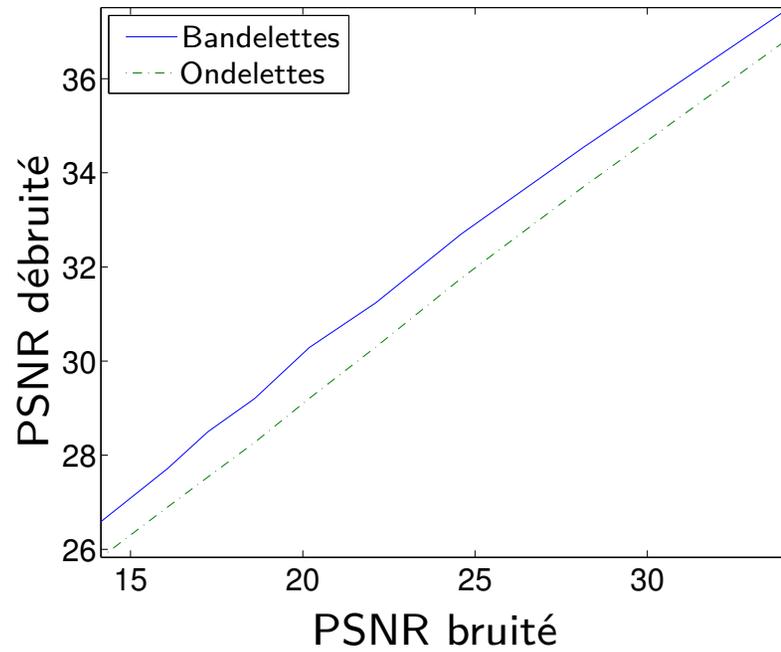
Ondelettes (28,21 dB)



Bruité (20,19 dB)



Bandelettes (30,29 dB)



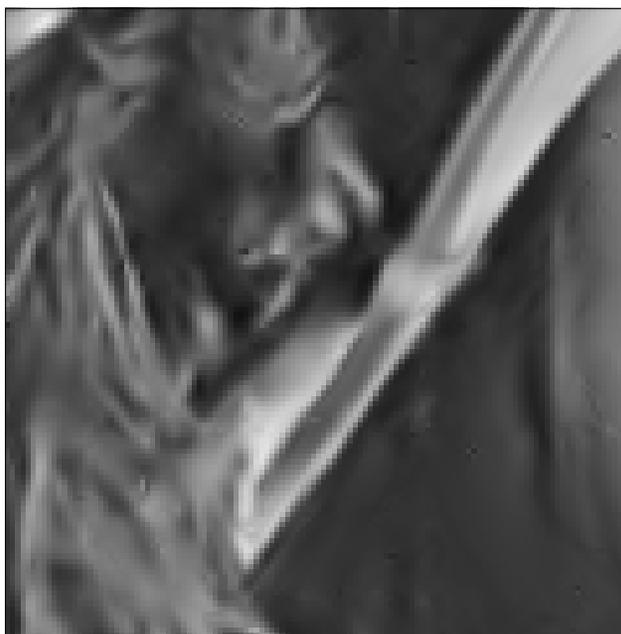
Ondelettes (28,21 dB)



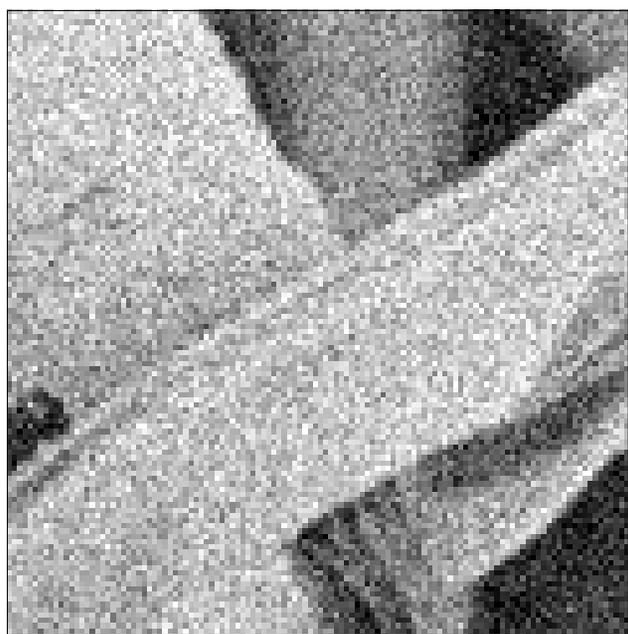
Bruité



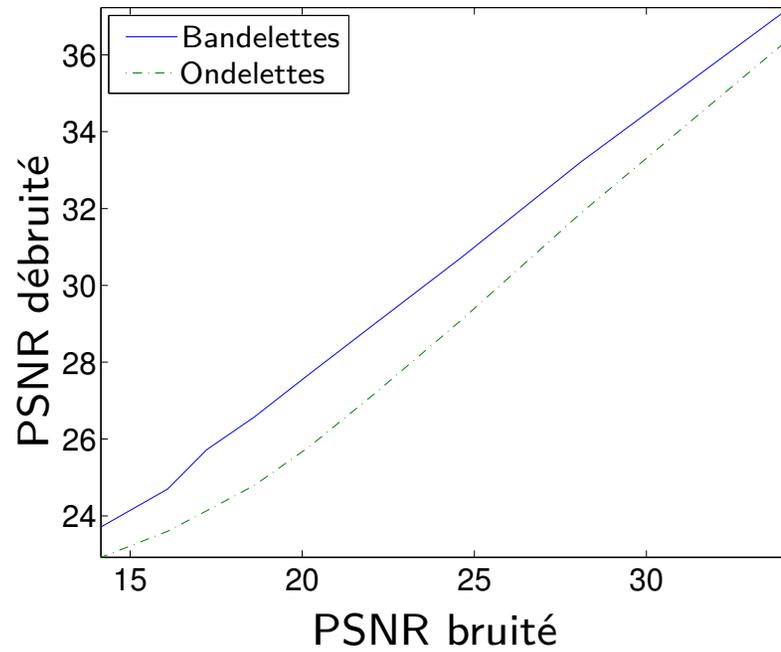
Bandelettes



Ondelettes



Bruité (20,19 dB)



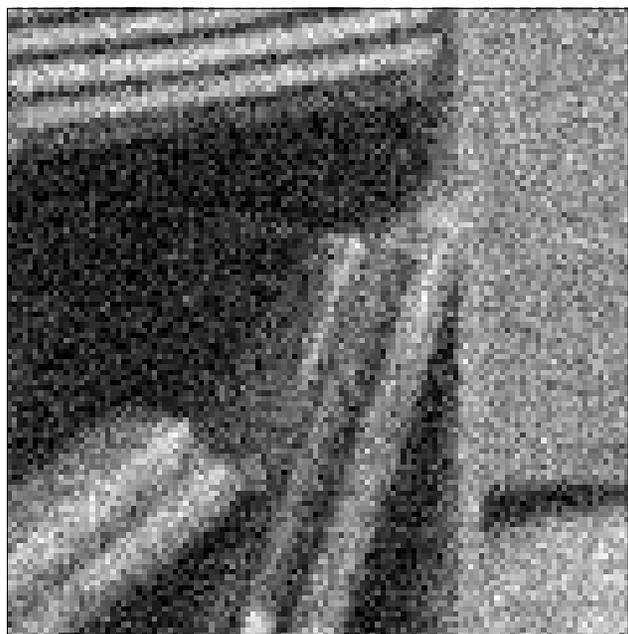
Bandelettes (27,68 dB)



Ondelettes (25,79 dB)



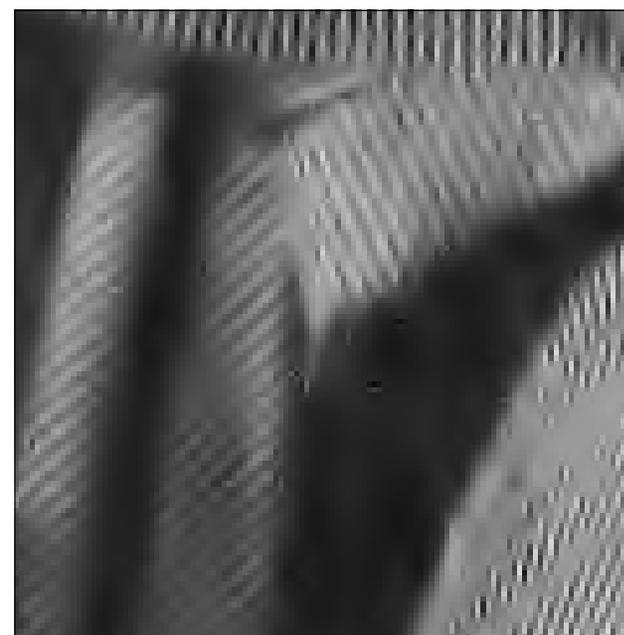
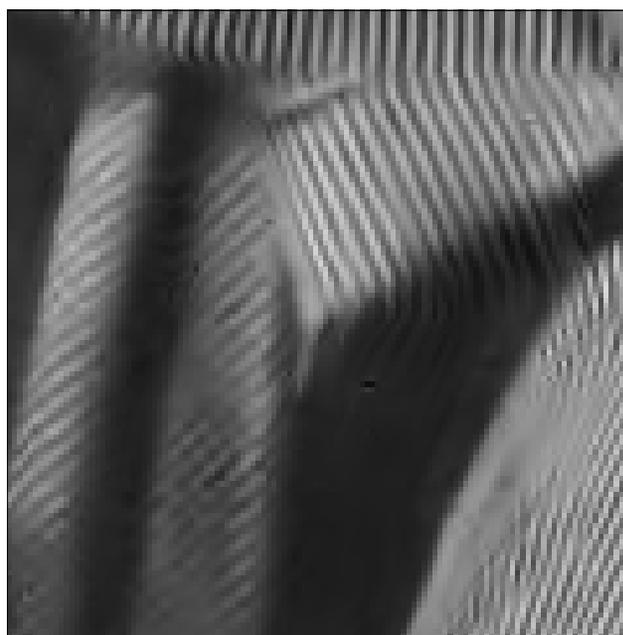
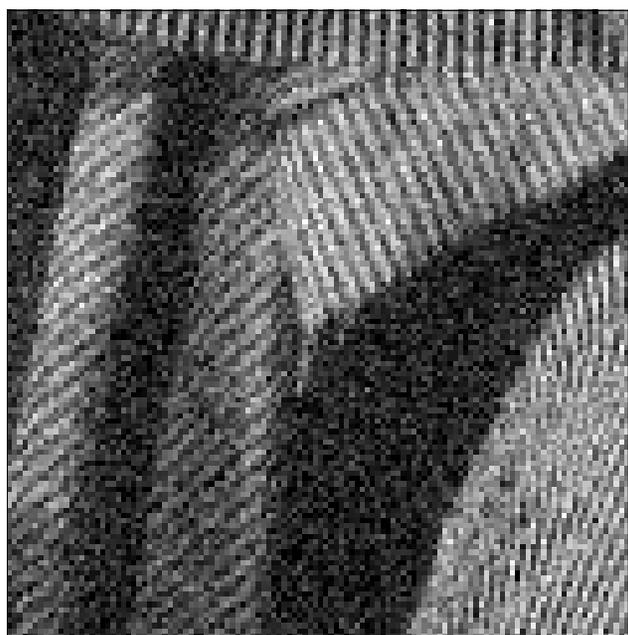
Bruité



Bandelettes



Ondelettes



Sélection de modèle

Sélection de modèle

- But : obtenir une convergence en probabilité d'un estimateur en bandelettes (*Ch. Dossal*).

Sélection de modèle

- But : obtenir une convergence en probabilité d'un estimateur en bandelettes (*Ch. Dossal*).
- Contrôle du nombre total ν de bandelettes pour les différents modèles en fonction du nombre N^2 d'échantillons.

Sélection de modèle

- But : obtenir une convergence en probabilité d'un estimateur en bandelettes (*Ch. Dossal*).
- Contrôle du nombre total ν de bandelettes pour les différents modèles en fonction du nombre N^2 d'échantillons.
- Minimisation de

$$-\|F\|^2 + \lambda \sigma^2 (\log \nu) M$$

permet d'obtenir une convergence en probabilité de l'estimateur.

Sélection de modèle

- But : obtenir une convergence en probabilité d'un estimateur en bandelettes (*Ch. Dossal*).
- Contrôle du nombre total ν de bandelettes pour les différents modèles en fonction du nombre N^2 d'échantillons.

- Minimisation de

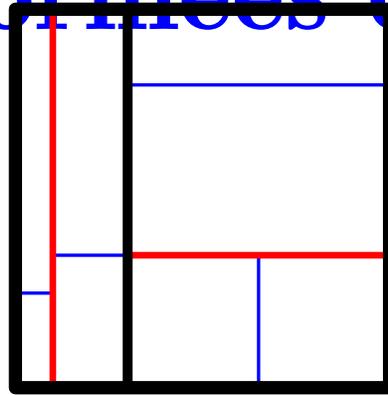
$$-\|F\|^2 + \lambda \sigma^2 (\log \nu) M$$

permet d'obtenir une convergence en probabilité de l'estimateur.

- Condition technique : obtenir, à la place des frames de bandelettes, des bases orthonormées ou des tight frames adaptés.

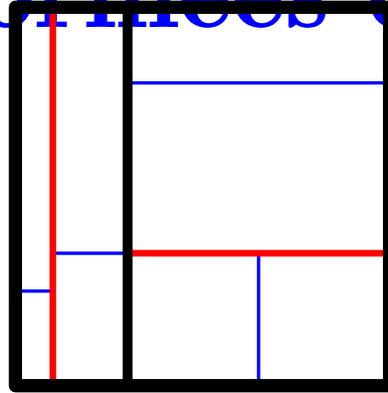
Bases orthonormées de bandelettes

Bases orthonormées de bandelettes



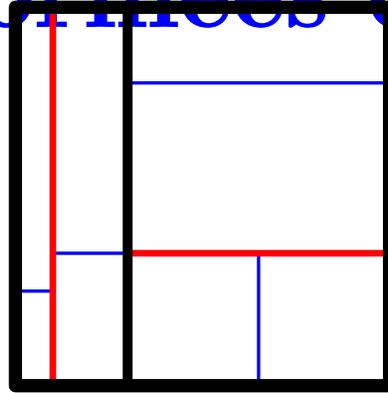
- Découpage en rectangles muni d'un flot polynomial avec conservation d'un algorithme de type CART.

Bases orthonormées de bandelettes



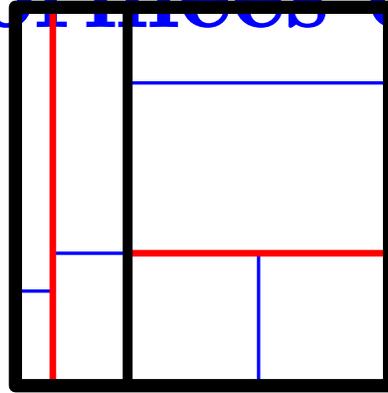
- Découpage en rectangles muni d'un flot polynomial avec conservation d'un algorithme de type CART.
- Modifications des bandelettes de bords pour obtenir des bases orthonormées avec de bonnes propriétés d'approximations.

Bases orthonormées de bandelettes



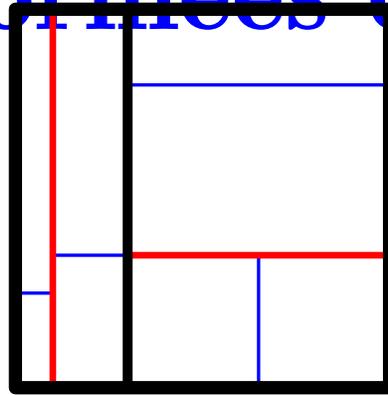
- Découpage en rectangles muni d'un flot polynomial avec conservation d'un algorithme de type CART.
- Modifications des bandelettes de bords pour obtenir des bases orthonormées avec de bonnes propriétés d'approximations.
- Nombre total de bandelettes : $\nu \leq C N^{(p+5)}$.

Bases orthonormées de bandelettes



- Découpage en rectangles muni d'un flot polynomial avec conservation d'un algorithme de type CART.
- Modifications des bandelettes de bords pour obtenir des bases orthonormées avec de bonnes propriétés d'approximations.
- Nombre total de bandelettes : $\nu \leq C N^{(p+5)}$.
- Complexité de l'optimisation accrue mais reste polynomiale.

Bases orthonormées de bandelettes

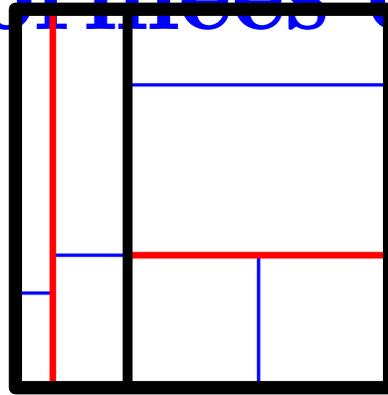


- Découpage en rectangles muni d'un flot polynomial avec conservation d'un algorithme de type CART.
- Modifications des bandelettes de bords pour obtenir des bases orthonormées avec de bonnes propriétés d'approximations.
- Nombre total de bandelettes : $\nu \leq C N^{(p+5)}$.
- Complexité de l'optimisation accrue mais reste polynomiale.
- Résultat théorique de convergence en probabilité pour la minimisation de

$$-\|F\| + \lambda \sigma^2 (\log \nu) M$$

avec $\log \nu \propto \log N$.

Bases orthonormées de bandelettes



- Découpage en rectangles muni d'un flot polynomial avec conservation d'un algorithme de type CART.
- Modifications des bandelettes de bords pour obtenir des bases orthonormées avec de bonnes propriétés d'approximations.
- Nombre total de bandelettes : $\nu \leq C N^{(p+5)}$.
- Complexité de l'optimisation accrue mais reste polynomiale.
- Résultat théorique de convergence en probabilité pour la minimisation de

$$-\|F\| + \lambda \sigma^2 (\log \nu) M$$

avec $\log \nu \propto \log N$.

Application à la compression de visage

Application à la compression de visage

- Problème : authentifier le porteur d'un document.

Application à la compression de visage

- Problème : authentifier le porteur d'un document.

- Solution simple : la photo d'identité.



Application à la compression de visage

- Problème : authentifier le porteur d'un document.
- Solution simple : la photo d'identité.
- Inconvénient : facile à modifier.



Application à la compression de visage

- Problème : authentifier le porteur d'un document.

- Solution simple : la photo d'identité.



- Inconvénient : facile à modifier.
- Solution sécurisée : photo numérisée, cryptée et signée numériquement.

Application à la compression de visage

- Problème : authentifier le porteur d'un document.

- Solution simple : la photo d'identité.



- Inconvénient : facile à modifier.
- Solution sécurisée : photo numérisée, cryptée et signée numériquement.
- Problème : capacité limitée de stockage.

Application à la compression de visage

- Problème : authentifier le porteur d'un document.

- Solution simple : la photo d'identité.



- Inconvénient : facile à modifier.
- Solution sécurisée : photo numérisée, cryptée et signée numériquement.
- Problème : capacité limitée de stockage.
- Cas du code barre 2D : 500-800 octets.

Application à la compression de visage

- Problème : authentifier le porteur d'un document.

- Solution simple : la photo d'identité.



- Inconvénient : facile à modifier.
- Solution sécurisée : photo numérisée, cryptée et signée numériquement.
- Problème : capacité limitée de stockage.
- Cas du code barre 2D : 500-800 octets.
- Solution : compression d'image utilisant la nature géométrique du visage (LET IT WAVE).

Photo d'identité

Photo d'identité

500 octets

Photo d'identité

500 octets

JPEG

Photo d'identité

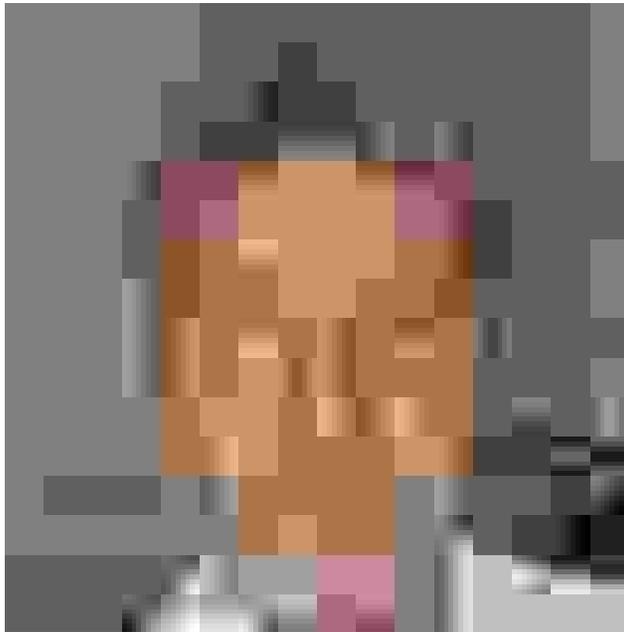
JPEG

500 octets

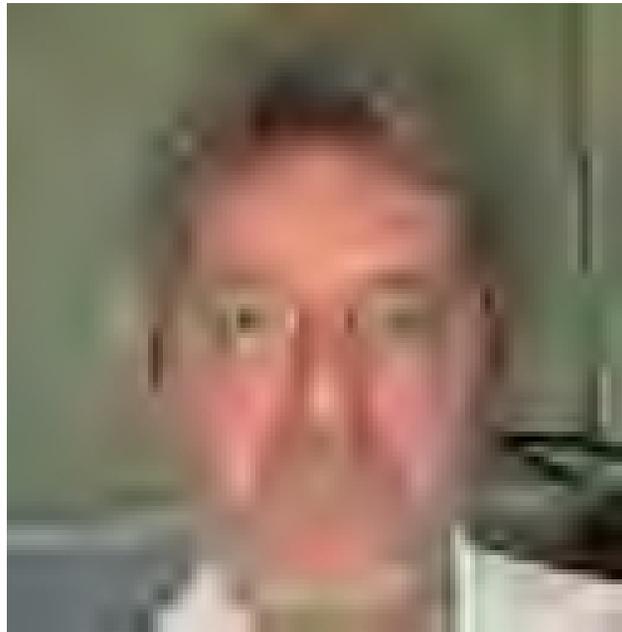
JPEG-2000

Photo d'identité

JPEG



500 octets
JPEG-2000



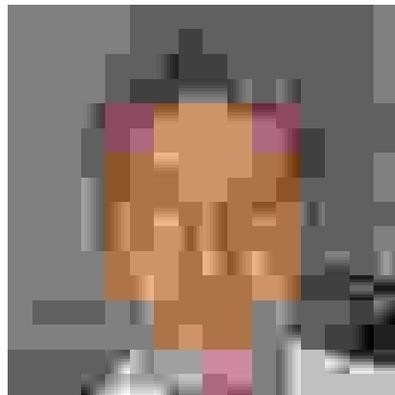
Bandelettes
LET IT WAVE



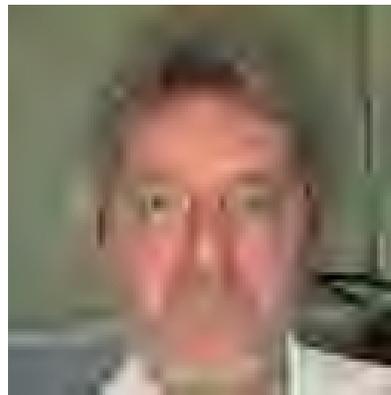
Photo d'identité

Photo d'identité

JPEG



JPEG-2000



LIW



500 octets

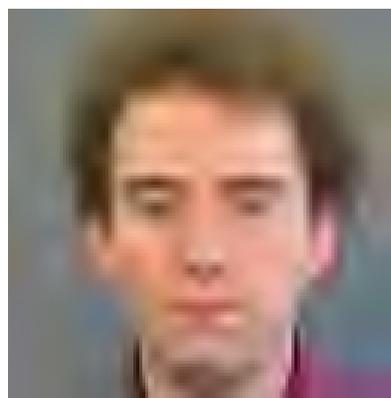


Photo d'identité

JPEG



JPEG-2000



LIW



800 octets



Photo d'identité

JPEG

JPEG-2000

LIW



1000 octets

Photo d'identité

Photo d'identité



Photo d'identité

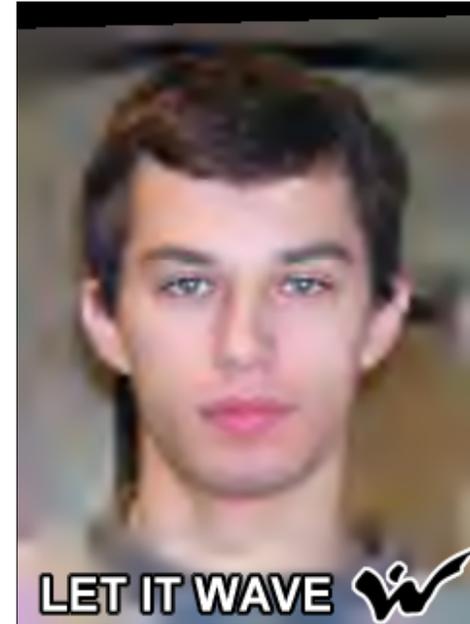


Photo d'identité



- Mise au point d'un système complet de la prise de vue à la compression en passant par le recadrage.
- Détection de la position du visage grâce aux yeux.
- Recadrage de la photographie

Photo d'identité



- Mise au point d'un système complet de la prise de vue à la compression en passant par le recadrage.
- Détection de la position du visage grâce aux yeux.
- Recadrage de la photographie
- Algorithme de compression utilisant les bandelettes et la structure géométrique du visage (750 octets).

Conclusion

Conclusion

- Les bandelettes permettent une représentation creuse des images dans des bases adaptées à la géométrie de celles-ci.

Conclusion

- Les bandelettes permettent une représentation creuse des images dans des bases adaptées à la géométrie de celles-ci.
- Applications pour le traitement du signal :
 - Codage d'image fixe.
 - Débruitage et restauration par seuillage.
 - Codage vidéo avec des régions.

Conclusion

- Les bandelettes permettent une représentation creuse des images dans des bases adaptées à la géométrie de celles-ci.
- Applications pour le traitement du signal :
 - Codage d'image fixe.
 - Débruitage et restauration par seuillage.
 - Codage vidéo avec des régions.
- Questions mathématiques :
 - Théorèmes d'approximation sur des espaces fonctionnels adaptés.
 - Convergences des estimateurs pour le débruitage.
 - Extension aux dimensions supérieures.

Conclusion

- Les bandelettes permettent une représentation creuse des images dans des bases adaptées à la géométrie de celles-ci.
- Applications pour le traitement du signal :
 - Codage d'image fixe.
 - Débruitage et restauration par seuillage.
 - Codage vidéo avec des régions.
- Questions mathématiques :
 - Théorèmes d'approximation sur des espaces fonctionnels adaptés.
 - Convergences des estimateurs pour le débruitage.
 - Extension aux dimensions supérieures.
- Articles :
<http://www.cmap.polytechnique.fr/~lepenne>

Conclusion

- Les bandelettes permettent une représentation creuse des images dans des bases adaptées à la géométrie de celles-ci.
- Applications pour le traitement du signal :
 - Codage d'image fixe.
 - Débruitage et restauration par seuillage.
 - Codage vidéo avec des régions.
- Questions mathématiques :
 - Théorèmes d'approximation sur des espaces fonctionnels adaptés.
 - Convergences des estimateurs pour le débruitage.
 - Extension aux dimensions supérieures.
- Articles :
<http://www.cmap.polytechnique.fr/~lepenec>
- Let It Wave (info@letitwave.fr) :
<http://www.letitwave.fr/>