

Compression et estimation en bandelettes

Erwan LE PENNEC et Stéphane MALLAT
CMAP / École Polytechnique

Représentation géométrique des images

Représentation géométrique des images

- La plupart des applications du traitement du signal nécessite la construction de représentation creuse : compression, restauration, . . .

Représentation géométrique des images

- La plupart des applications du traitement du signal nécessite la construction de représentation creuse : compression, restauration, . . .
- Besoin de tirer parti de la régularité géométrique des images pour améliorer les représentations.

Représentation géométrique des images

- La plupart des applications du traitement du signal nécessite la construction de représentation creuse : compression, restauration, . . .
- Besoin de tirer parti de la régularité géométrique des images pour améliorer les représentations.
- Rêve du codeur de seconde génération : un pont entre le *traitement du signal* et la *vision par ordinateur*.

Représentation géométrique des images

- La plupart des applications du traitement du signal nécessite la construction de représentation creuse : compression, restauration, . . .
- Besoin de tirer parti de la régularité géométrique des images pour améliorer les représentations.
- Rêve du codeur de seconde génération : un pont entre le *traitement du signal* et la *vision par ordinateur*.
- Construire des représentations d'analyse harmonique adaptées à des *géométries* complexes.

Détection de contours

Détection de contours

- Un problème mal posé.

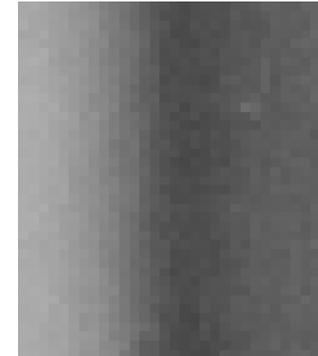
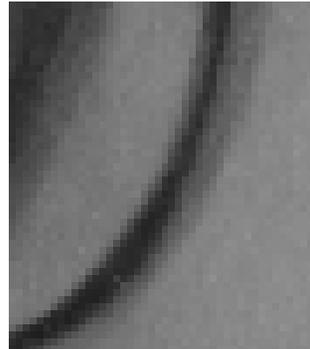
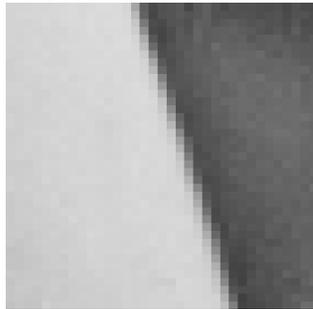


Détection de contours

- Un problème mal posé.



- Les contours sont des singularités lissées.

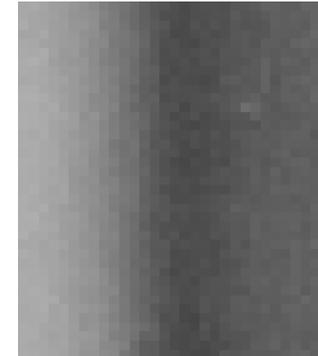
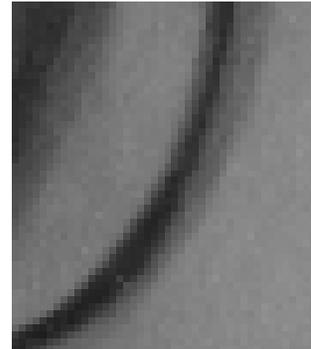
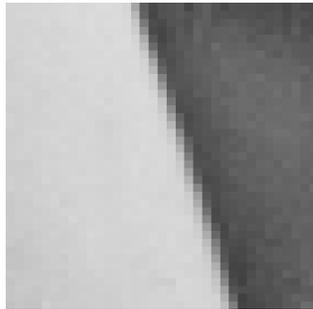


Détection de contours

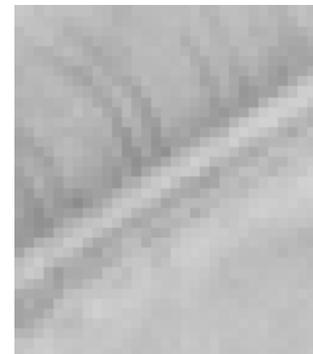
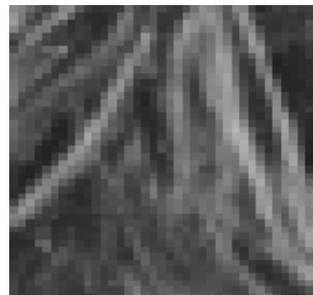
- Un problème mal posé.



- Les contours sont des singularités lissées.



- Où sont les contours ?

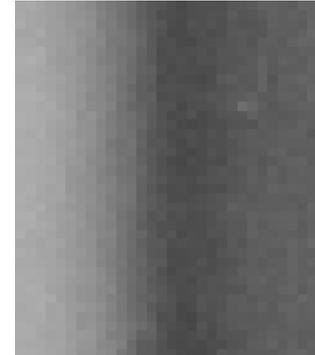
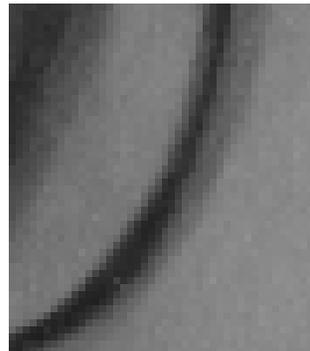
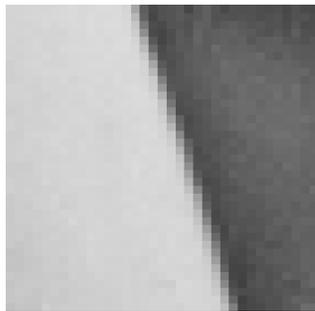


Détection de contours

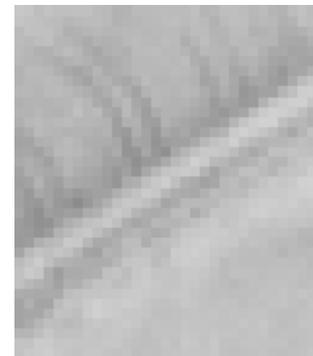
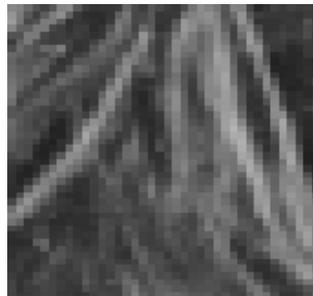
- Un problème mal posé.



- Les contours sont des singularités lissées.



- Où sont les contours ?



- Comment l'estimation de la géométrie peut-elle être *bien posée* ?

Plan

Plan

- Représentations creuses et ondelettes.

Plan

- Représentations creuses et ondelettes.
- Flot géométrique et bases de bandelettes.

Plan

- Représentations creuses et ondelettes.
- Flot géométrique et bases de bandelettes.
- Approximation dans les bases de bandelettes.

Plan

- Représentations creuses et ondelettes.
- Flot géométrique et bases de bandelettes.
- Approximation dans les bases de bandelettes.
- Applications à la compression et l'estimation.

Représentation creuse dans une base

Représentation creuse dans une base

- Décomposition dans une base orthonormée $\mathcal{B} = \{g_m\}_{m \in \mathbb{N}}$

$$f = \sum_{m \in \mathbb{N}} \langle f, g_m \rangle g_m .$$

Représentation creuse dans une base

- Décomposition dans une base orthonormée $\mathcal{B} = \{g_m\}_{m \in \mathbb{N}}$

$$f = \sum_{m \in \mathbb{N}} \langle f, g_m \rangle g_m .$$

- Approximation avec M vecteurs choisis adaptativement

$$f_M = \sum_{m \in I_M} \langle f, g_m \rangle g_m .$$

Représentation creuse dans une base

- Décomposition dans une base orthonormée $\mathcal{B} = \{g_m\}_{m \in \mathbb{N}}$

$$f = \sum_{m \in \mathbb{N}} \langle f, g_m \rangle g_m .$$

- Approximation avec M vecteurs choisis adaptativement

$$f_M = \sum_{m \in I_M} \langle f, g_m \rangle g_m .$$

- Pour minimiser $\|f - f_M\|^2 = \sum_{m \notin I_M} |\langle f, g_m \rangle|^2$,

sélection des M plus grands produits scalaires :

$$I_M = \{m, |\langle f, g_m \rangle| > T_M\} : \text{seuillage.}$$

Représentation creuse dans une base

- Décomposition dans une base orthonormée $\mathcal{B} = \{g_m\}_{m \in \mathbb{N}}$

$$f = \sum_{m \in \mathbb{N}} \langle f, g_m \rangle g_m .$$

- Approximation avec M vecteurs choisis adaptativement

$$f_M = \sum_{m \in I_M} \langle f, g_m \rangle g_m .$$

- Pour minimiser $\|f - f_M\|^2 = \sum_{m \notin I_M} |\langle f, g_m \rangle|^2$,

sélection des M plus grands produits scalaires :

$$I_M = \{m, |\langle f, g_m \rangle| > T_M\} : \text{seuillage.}$$

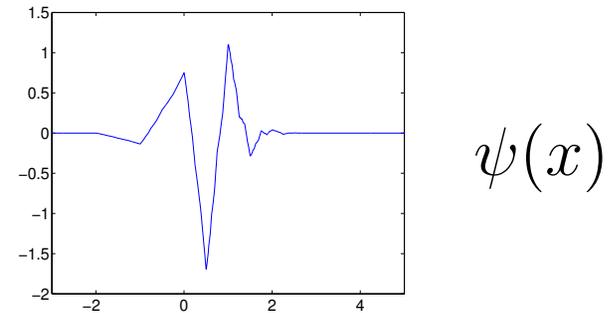
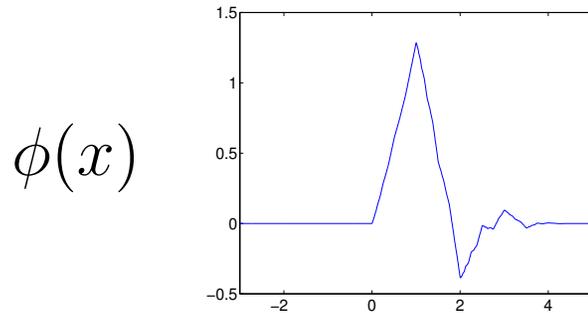
- **Problème** : Comment choisir la base \mathcal{B} de sorte que

$$\|f - f_M\|^2 \leq CM^{-\alpha} \text{ avec un grand } \alpha ?$$

Base d'ondelettes 1D de $L^2[0, 1]$

Base d'ondelettes 1D de $L^2[0, 1]$

- Construite à partir d'une fonction d'échelle $\phi(x)$ et d'une ondelette mère $\psi(x)$

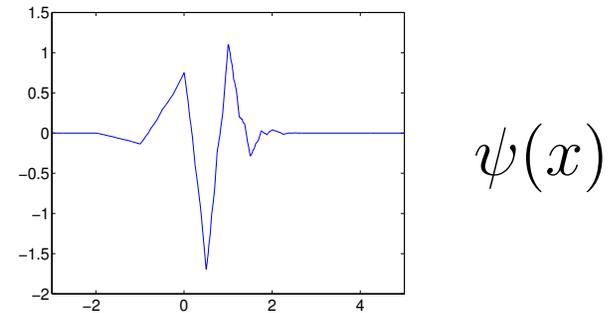
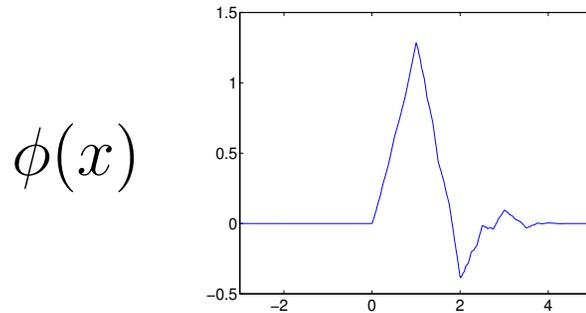


qui sont dilatées par 2^j et translatées de $2^j n$

$$\phi_{j,n}(x) = \frac{1}{\sqrt{2^j}} \phi\left(\frac{x - 2^j n}{2^j}\right) \quad , \quad \psi_{j,n}(x) = \frac{1}{\sqrt{2^j}} \psi\left(\frac{x - 2^j n}{2^j}\right)$$

Base d'ondelettes 1D de $L^2[0, 1]$

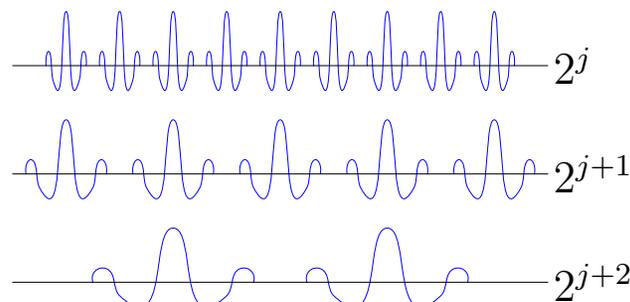
- Construite à partir d'une fonction d'échelle $\phi(x)$ et d'une ondelette mère $\psi(x)$



qui sont dilatées par 2^j et translatées de $2^j n$

$$\phi_{j,n}(x) = \frac{1}{\sqrt{2^j}} \phi\left(\frac{x - 2^j n}{2^j}\right) \quad , \quad \psi_{j,n}(x) = \frac{1}{\sqrt{2^j}} \psi\left(\frac{x - 2^j n}{2^j}\right)$$

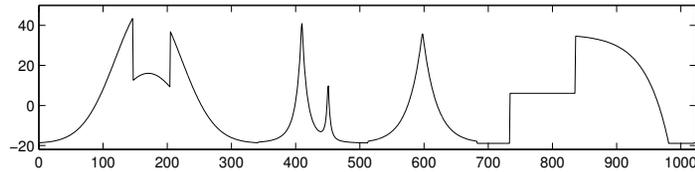
- $\mathcal{B} = \left\{ \psi_{j,n} \right\}_{j \in \mathbb{N}, 2^j n \in [0,1]}$ est une base orthormale de $L^2[0, 1]$.



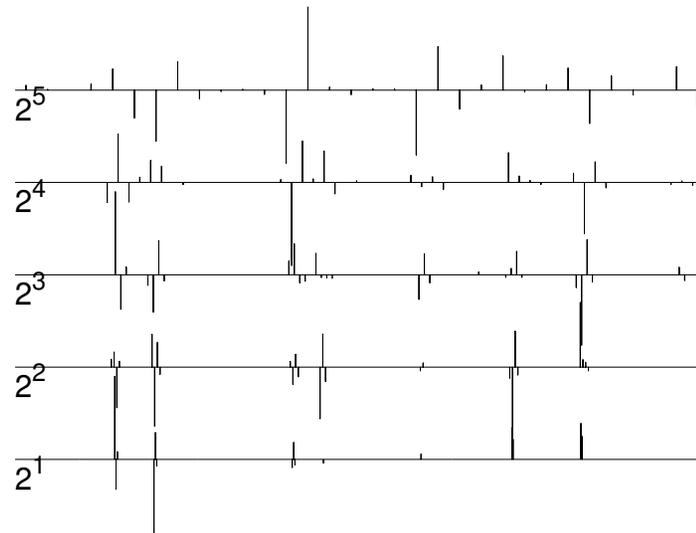
Approximation non linéaire en ondelettes

Approximation non linéaire en ondelettes

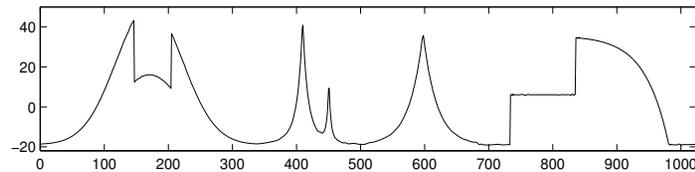
f



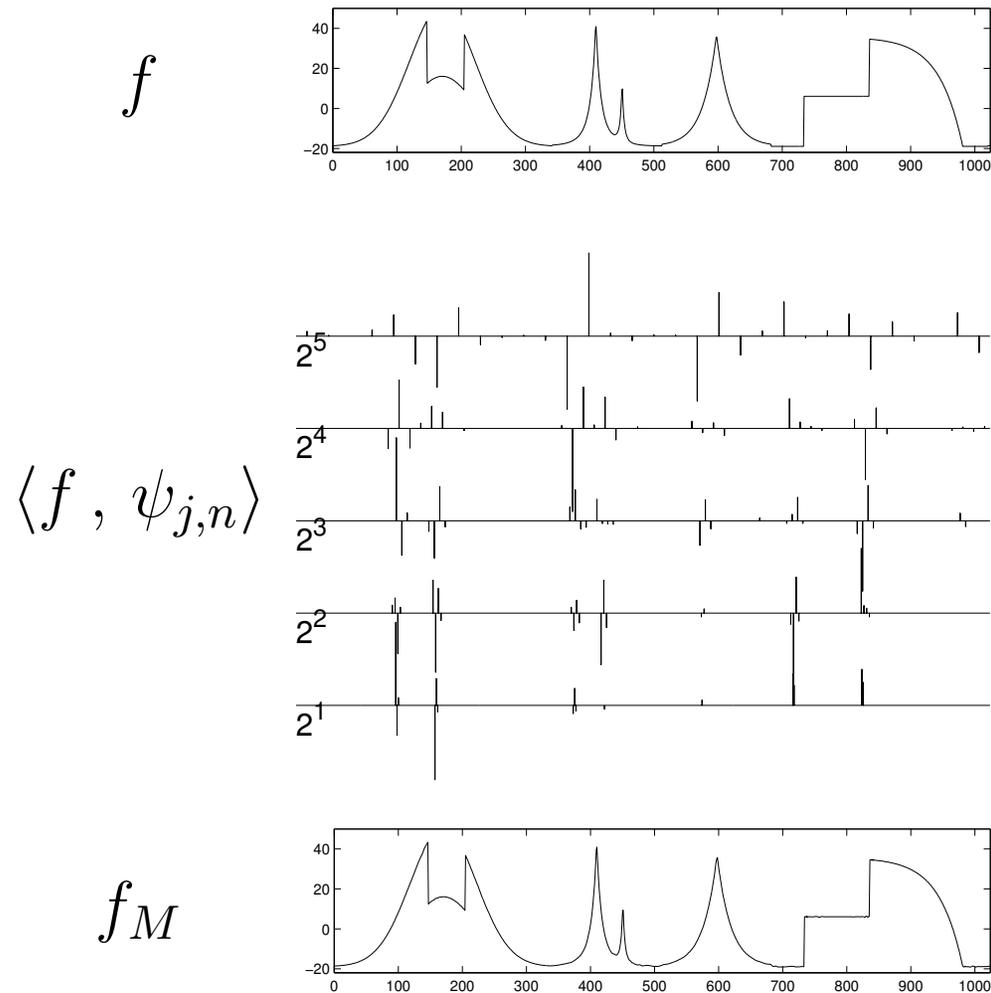
$\langle f, \psi_{j,n} \rangle$



f_M



Approximation non linéaire en ondelettes



- Si f est C^α par morceaux et ψ a $p > \alpha$ moments nuls alors

$$\|f - f_M\|^2 = O(M^{-2\alpha}) .$$

Base d'ondelettes 2D séparables

Succès et échecs des bases d'ondelettes

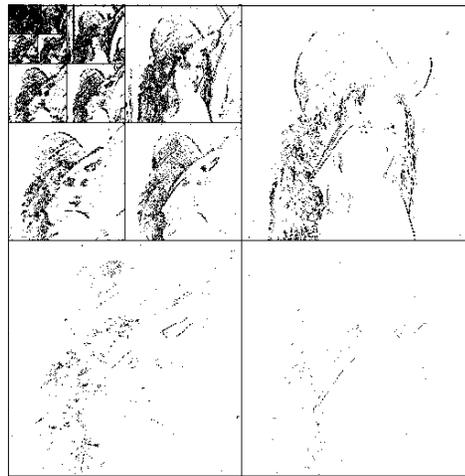
Succès et échecs des bases d'ondelettes

- Les images sont décomposées dans une base d'ondelettes 2D et les coefficients les plus grands sont conservés (JPEG-2000).

f



M plus grands coeff.

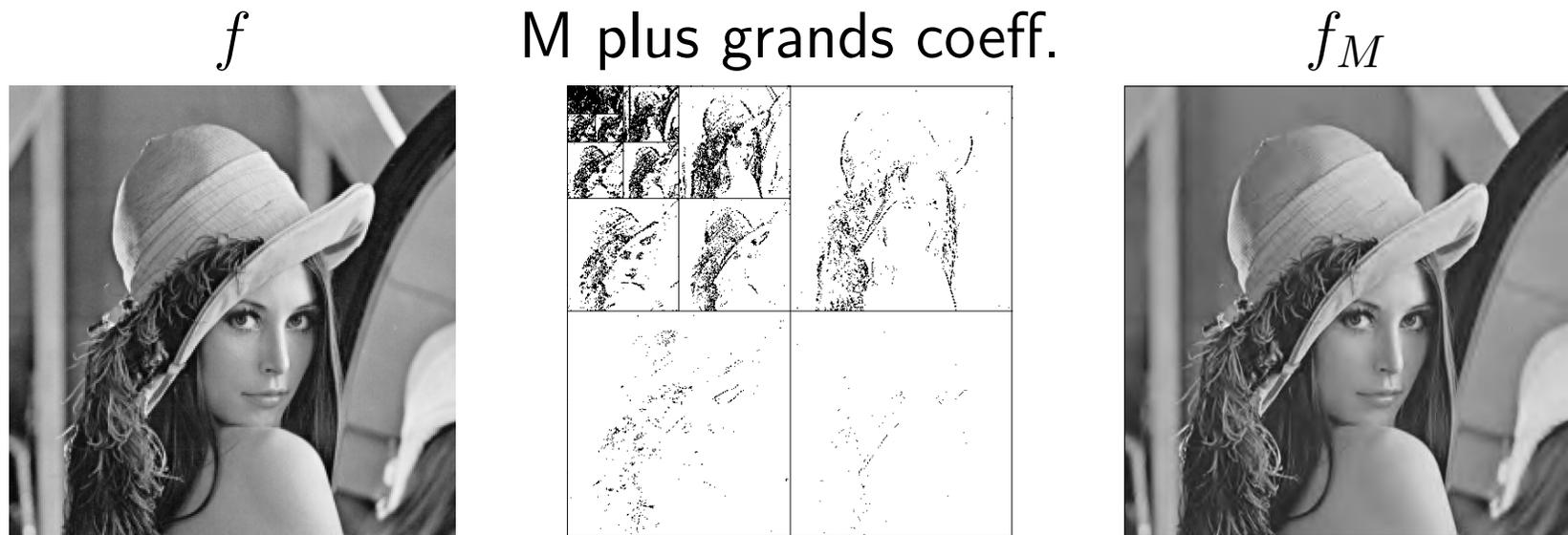


f_M



Succès et échecs des bases d'ondelettes

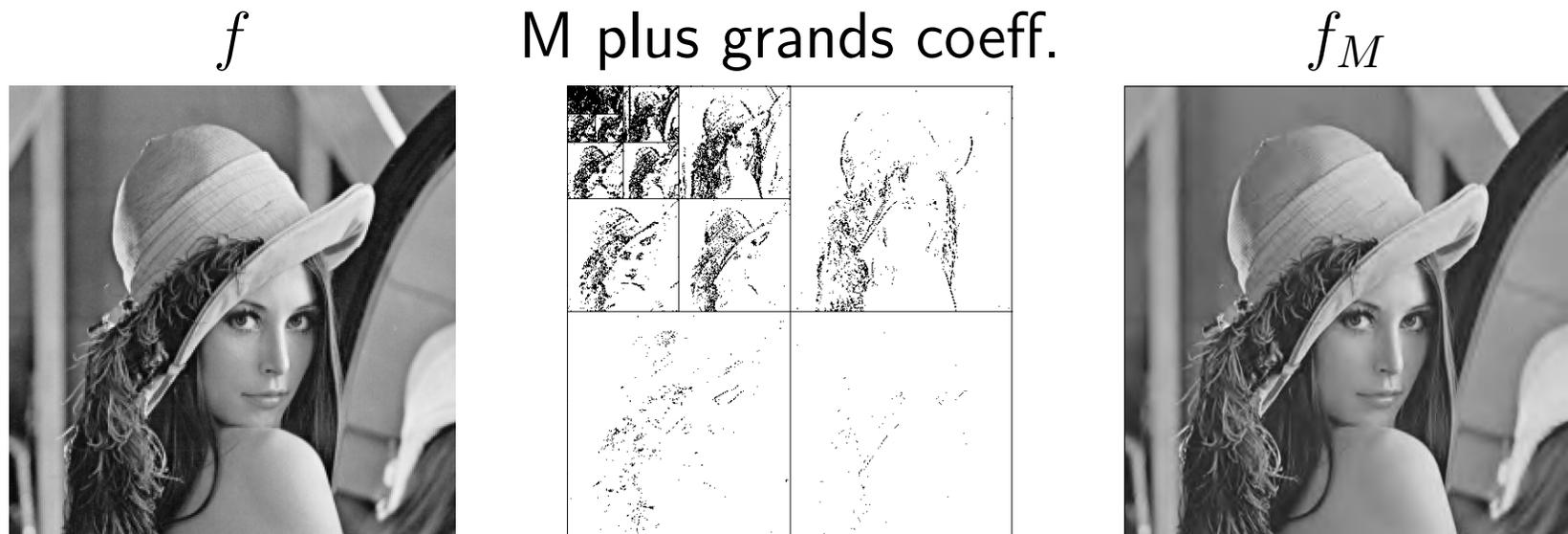
- Les images sont décomposées dans une base d'ondelettes 2D et les coefficients les plus grands sont conservés (JPEG-2000).



- (Cohen, DeVore, Petrushev, Xue) : Optimal pour les fonctions à variation bornée : $\|f - f_M\|^2 \leq C \|f\|_{TV} M^{-1}$.

Succès et échecs des bases d'ondelettes

- Les images sont décomposées dans une base d'ondelettes 2D et les coefficients les plus grands sont conservés (JPEG-2000).

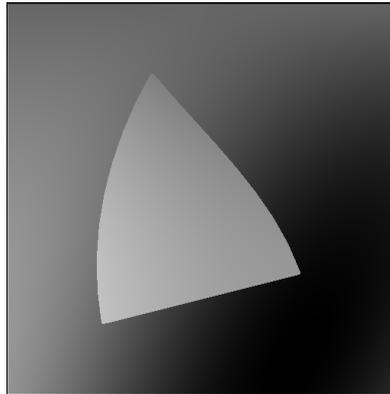


- (Cohen, DeVore, Petrushev, Xue) : Optimal pour les fonctions à variation bornée : $\|f - f_M\|^2 \leq C \|f\|_{TV} M^{-1}$.
- Mais ne prend avantage d'aucune sorte de régularité géométrique.

Utiliser la régularité géométrique

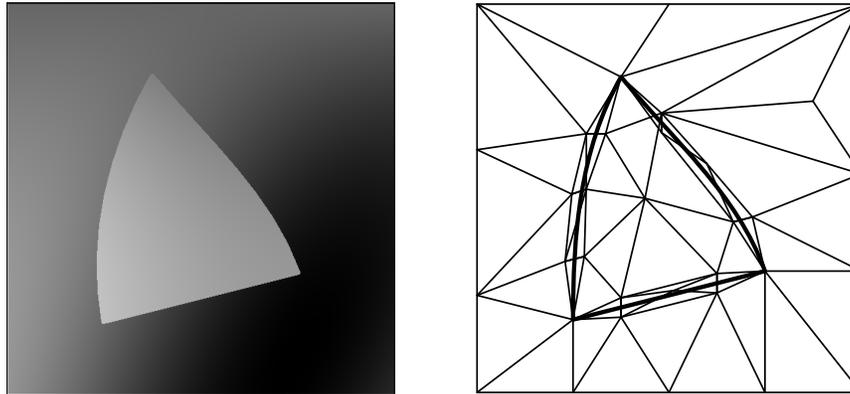
Utiliser la régularité géométrique

- Approximations de f qui est C^α en dehors de “contours” qui sont C^α par morceaux ($\alpha \geq 2$) :

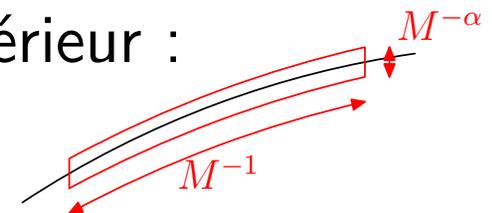
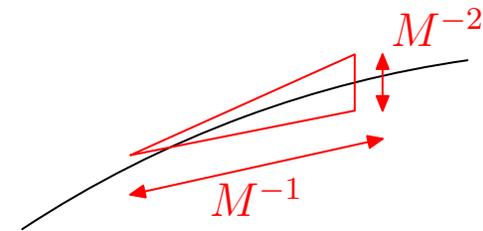


Utiliser la régularité géométrique

- Approximations de f qui est C^α en dehors de “contours” qui sont C^α par morceaux ($\alpha \geq 2$) :



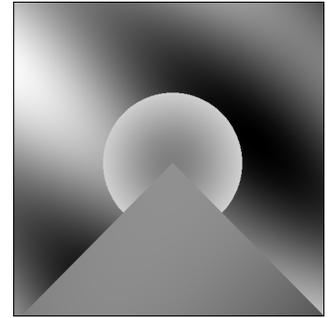
- avec M ondelettes : $\|f - f_M\|^2 \leq C M^{-1}$,
- avec M triangles : $\|f - f_M\|^2 \leq C M^{-2}$,
- avec M curvelets (*Candes, Donoho*) :
 $\|f - f_M\|^2 \leq C (\log M)^3 M^{-2}$,
- autres approches : (*Cohen, Matei*), (*Froment*), (*Taubman, Zakhor*), (*Romberg, Baraniuk*), (*Dragotti, Vetterli, Do*)...
- avec M éléments géométriques d'ordre supérieur :
 $\|f - f_M\|^2 \leq C M^{-\alpha}$



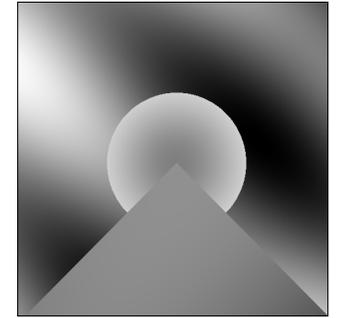
Modèle de la géométrie

Modèle de la géométrie

- Fonction régulière par morceaux avec des discontinuités le long de courbes régulières :

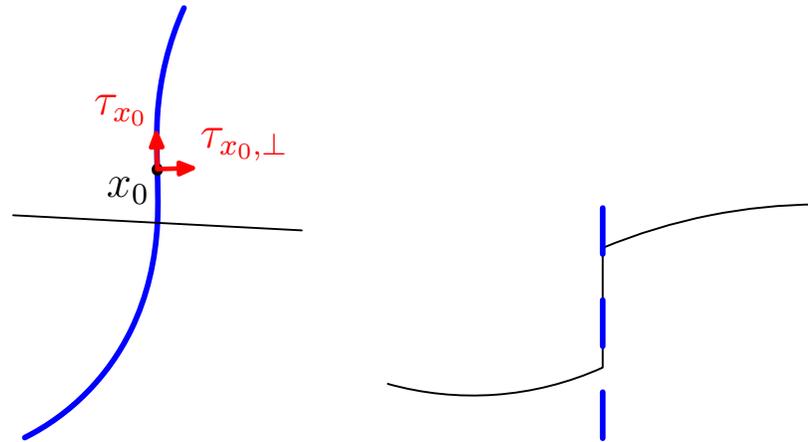


Modèle de la géométrie

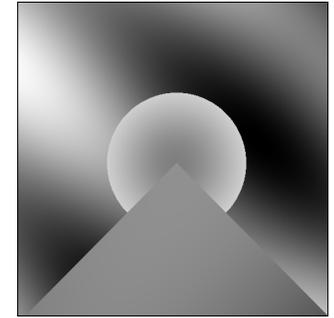


- Fonction régulière par morceaux avec des discontinuités le long de courbes régulières :

- Vraies discontinuités :

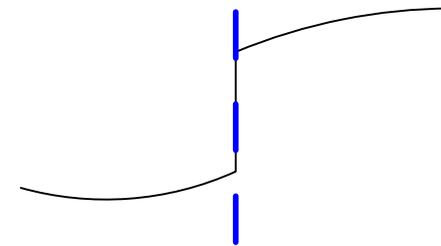
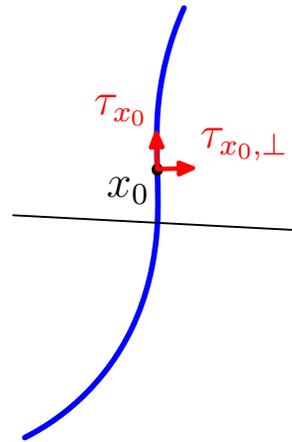


Modèle de la géométrie

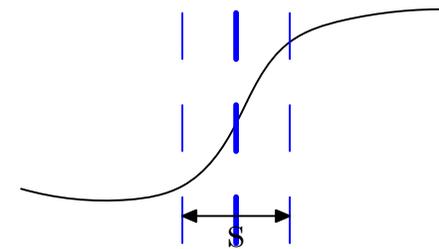
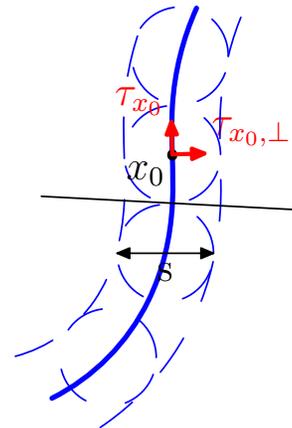


- Fonction régulière par morceaux avec des discontinuités le long de courbes régulières :

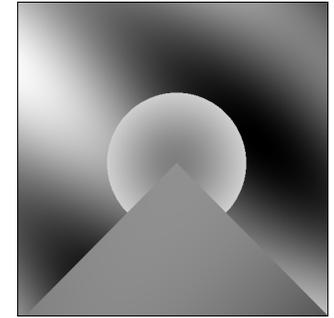
- Vraies discontinuités :



- Discontinuités lissées :

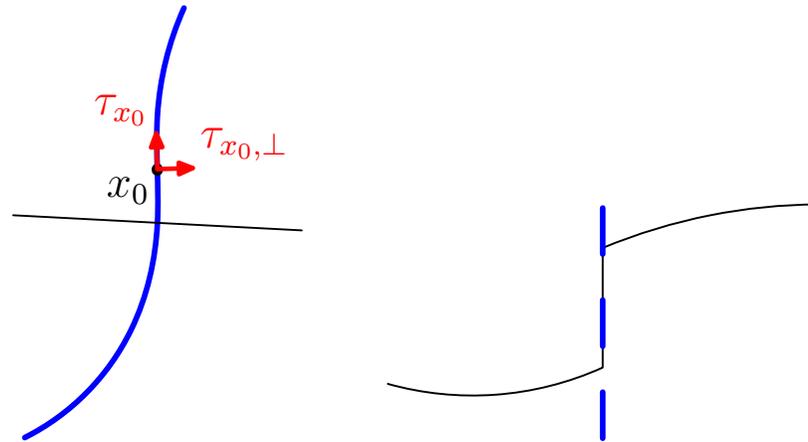


Modèle de la géométrie

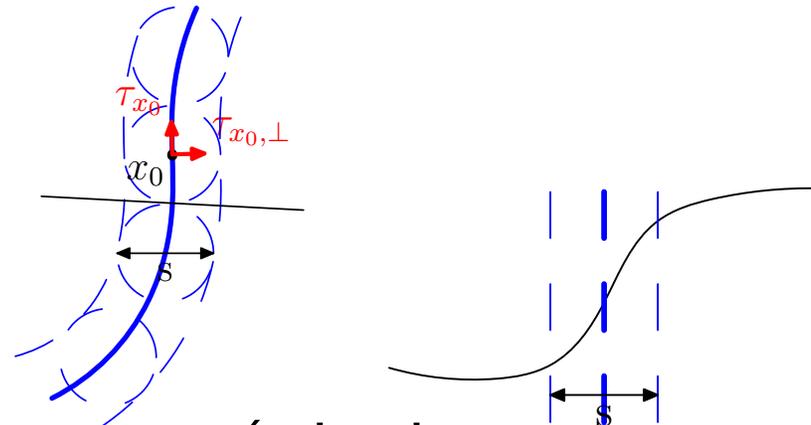


- Fonction régulière par morceaux avec des discontinuités le long de courbes régulières :

- Vraies discontinuités :



- Discontinuités lissées :



- Condition technique via une paramétrisation :

$$\left| \frac{\partial^\alpha}{\partial^\beta x_1 \partial^{\alpha-\beta} x_2} (f(x_1, x_2 + g(x_1))) \right| \leq C s^{-\beta/\alpha} s^{-(\alpha-\beta)} \quad \forall x \in \mathcal{B}(x_0, s)$$

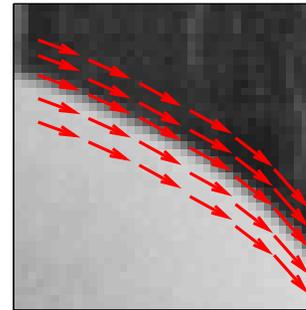
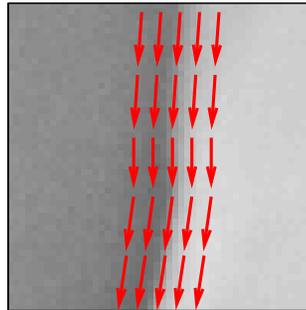
Flot géométrique segmenté

Flot géométrique segmenté

- Flot géométrique : champ de vecteurs $\vec{\tau}(x_1, x_2)$ donnant des directions dans lesquelles l'image est localement régulière.

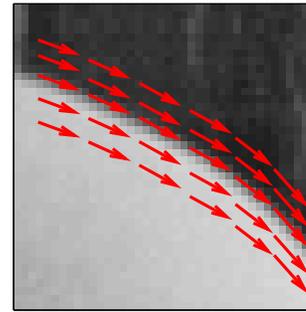
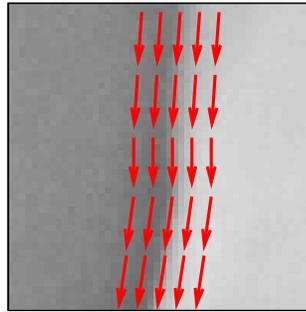
Flot géométrique segmenté

- Flot géométrique : champ de vecteurs $\vec{\tau}(x_1, x_2)$ donnant des directions dans lesquelles l'image est localement régulière.
- Dans une région, le flot est constant horizontalement ou verticalement.

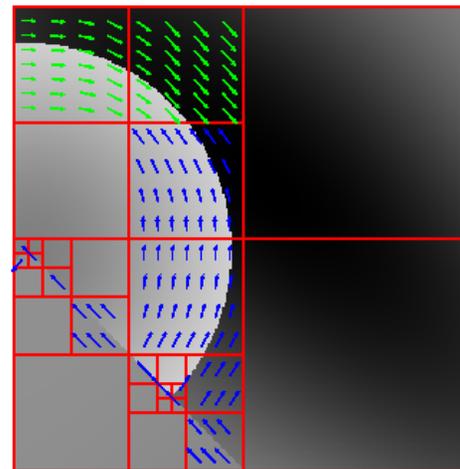
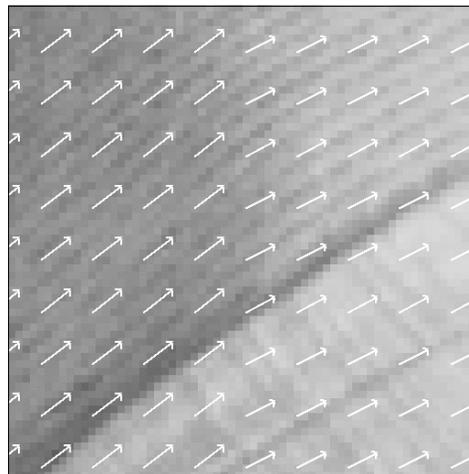


Flot géométrique segmenté

- Flot géométrique : champ de vecteurs $\vec{\tau}(x_1, x_2)$ donnant des directions dans lesquelles l'image est localement régulière.
- Dans une région, le flot est constant horizontalement ou verticalement.



- L'image est segmentée en telles régions.

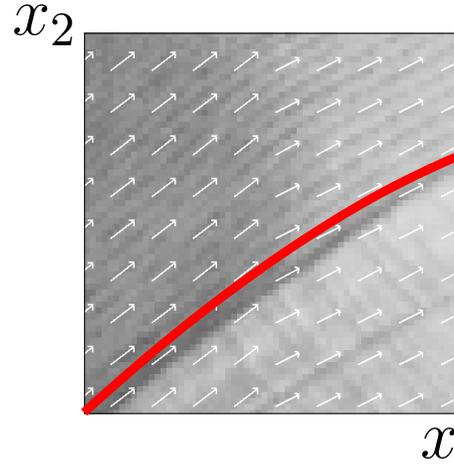


Base d'ondelettes déformées

Base d'ondelettes déformées

- Supposons le flot constant verticalement dans Ω :

$$\vec{\tau}(x_1, x_2) = (1, c'(x_1)) .$$

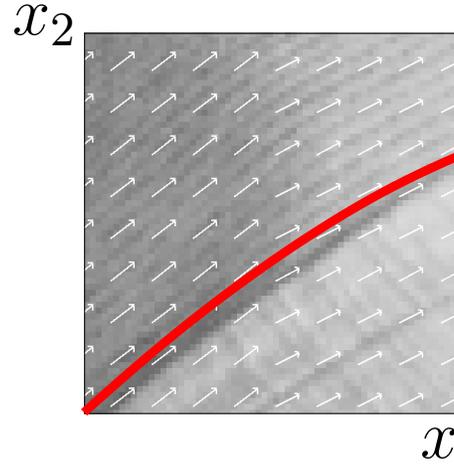


$$c(x_1) = \int_{x_{1,\min}}^{x_1} c'(u) du$$

Base d'ondelettes déformées

- Supposons le flot constant verticalement dans Ω :

$$\vec{\tau}(x_1, x_2) = (1, c'(x_1)) .$$



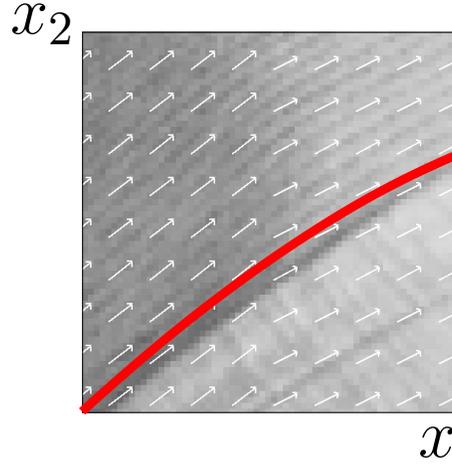
$$c(x_1) = \int_{x_{1,\min}}^{x_1} c'(u) du$$

- À x_2 fixé, $f(x_1, x_2 + c(x_1))$ est une fonction régulière de x_1 .

Base d'ondelettes déformées

- Supposons le flot constant verticalement dans Ω :

$$\vec{\tau}(x_1, x_2) = (1, c'(x_1)) .$$



$$c(x_1) = \int_{x_{1,\min}}^{x_1} c'(u) du$$

- À x_2 fixé, $f(x_1, x_2 + c(x_1))$ est une fonction régulière de x_1 .
- $\langle f(x_1, x_2 + c(x_1)), \Psi(x_1, x_2) \rangle = \langle f(x_1, x_2), \Psi(x_1, x_2 - c(x_1)) \rangle .$

Bandelettisation

Bandelettisation

- Les fonctions de la base doivent avoir des moments nuls selon x_1 (direction du flot).

Bandelettisation

- Les fonctions de la base doivent avoir des moments nuls selon x_1 (direction du flot).

Bandelettisation

- Les fonctions de la base doivent avoir des moments nuls selon x_1 (direction du flot).
- Bandelettisation : remplace $\{\phi_{j,m_1}(x_1)\}_{m_1}$ par une famille d'ondelettes $\{\psi_{l,m_1}(x_1)\}_{l>j, m_1}$ qui génère le même espace.
- Base d'ondelettes déformées de $\mathbf{L}^2(\Omega)$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi_{j,m_1}(x_1) \psi_{j,m_2}(x_2 - c(x_1)) \quad , \quad \psi_{j,m_1}(x_1) \phi_{j,m_2}(x_2 - c(x_1)) \\ \psi_{j,m_1}(x_1) \psi_{j,m_2}(x_2 - c(x_1)) \end{array} \right\}_j$$

Bandelettisation

- Les fonctions de la base doivent avoir des moments nuls selon x_1 (direction du flot).
- Bandelettisation : remplace $\{\phi_{j,m_1}(x_1)\}_{m_1}$ par une famille d'ondelettes $\{\psi_{l,m_1}(x_1)\}_{l>j, m_1}$ qui génère le même espace.
- Obtention d'une *base de bandelettes* de $\mathbf{L}^2(\Omega)$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi_{l,m_1}(x_1) \psi_{j,m_2}(x_2 - c(x_1)) \quad , \quad \psi_{j,m_1}(x_1) \phi_{j,m_2}(x_2 - c(x_1)) \\ \psi_{j,m_1}(x_1) \psi_{j,m_2}(x_2 - c(x_1)) \end{array} \right\}_{\substack{j,l>j \\ m_1,m_2}} .$$

Anisotrope

Base de bandelettes segmentée

Base de bandelettes segmentée

- Le support de l'image est segmenté en régions munies soit
 - d'une base de bandelettes à flot constant verticalement,
 - d'une base de bandelettes à flot constant horizontalement,
 - d'une base d'ondelettes sans flot (régularité isotrope).



Base de bandelettes segmentée

- Le support de l'image est segmenté en régions munies soit
 - d'une base de bandelettes à flot constant verticalement,
 - d'une base de bandelettes à flot constant horizontalement,
 - d'une base d'ondelettes sans flot (régularité isotrope).



- Transformée rapide en bandelettes ($O(N^2)$) :
 - rééchantillonnage, transformée en ondelettes déformées, bandelettisation.

Base de bandelettes segmentée

- Le support de l'image est segmenté en régions munies soit
 - d'une base de bandelettes à flot constant verticalement,
 - d'une base de bandelettes à flot constant horizontalement,
 - d'une base d'ondelettes sans flot (régularité isotrope).



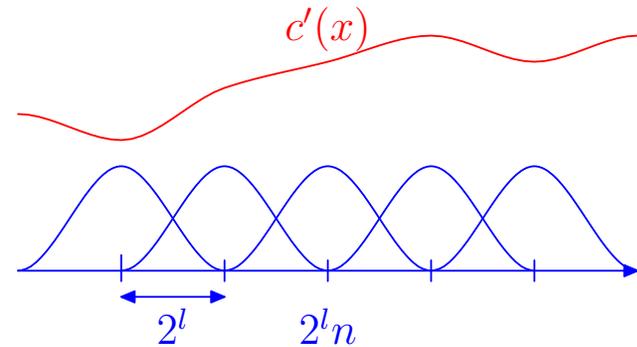
- Transformée rapide en bandelettes ($O(N^2)$) :
 - rééchantillonnage, transformée en ondelettes déformées, bandelettisation.
- Pas de discontinuités aux frontières grâce à un schéma de lifting

Calcul d'un flot paramétré

Calcul d'un flot paramétré

- Un flot constant verticalement $\vec{\tau}(x_1, x_2) = (1, c'(x_1))$ dans Ω est paramétré par :

$$c'(x) = \sum_{n=1}^{L2^{-l}} \alpha_n \phi(2^{-l}x - n)$$

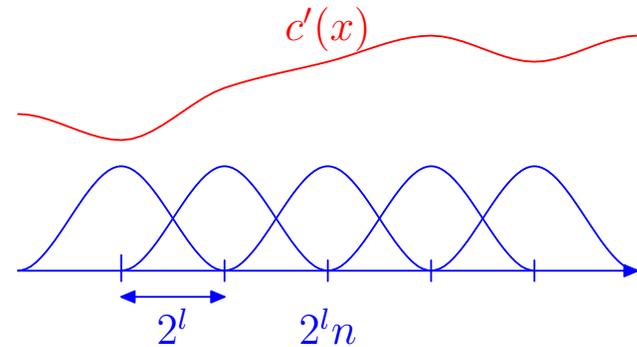


en trouvant les $L 2^{-l}$ paramètres α_n

Calcul d'un flot paramétré

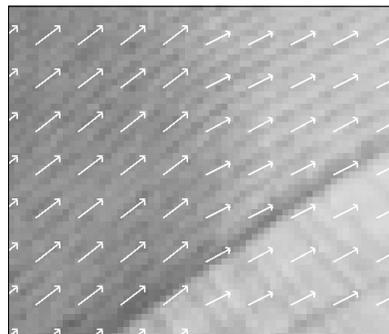
- Un flot constant verticalement $\vec{\tau}(x_1, x_2) = (1, c'(x_1))$ dans Ω est paramétré par :

$$c'(x) = \sum_{n=1}^{L2^{-l}} \alpha_n \phi(2^{-l}x - n)$$



en trouvant les $L2^{-l}$ paramètres α_n qui minimisent

$$\int_{\Omega} \left| \vec{\nabla} f(x_1, x_2) \cdot \vec{\tau}(x_1, x_2) \right|^2 dx_1 dx_2 = \int_{\Omega} \left| \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial \vec{\tau}(x_1, x_2)} \right|^2 dx_1 dx_2 .$$



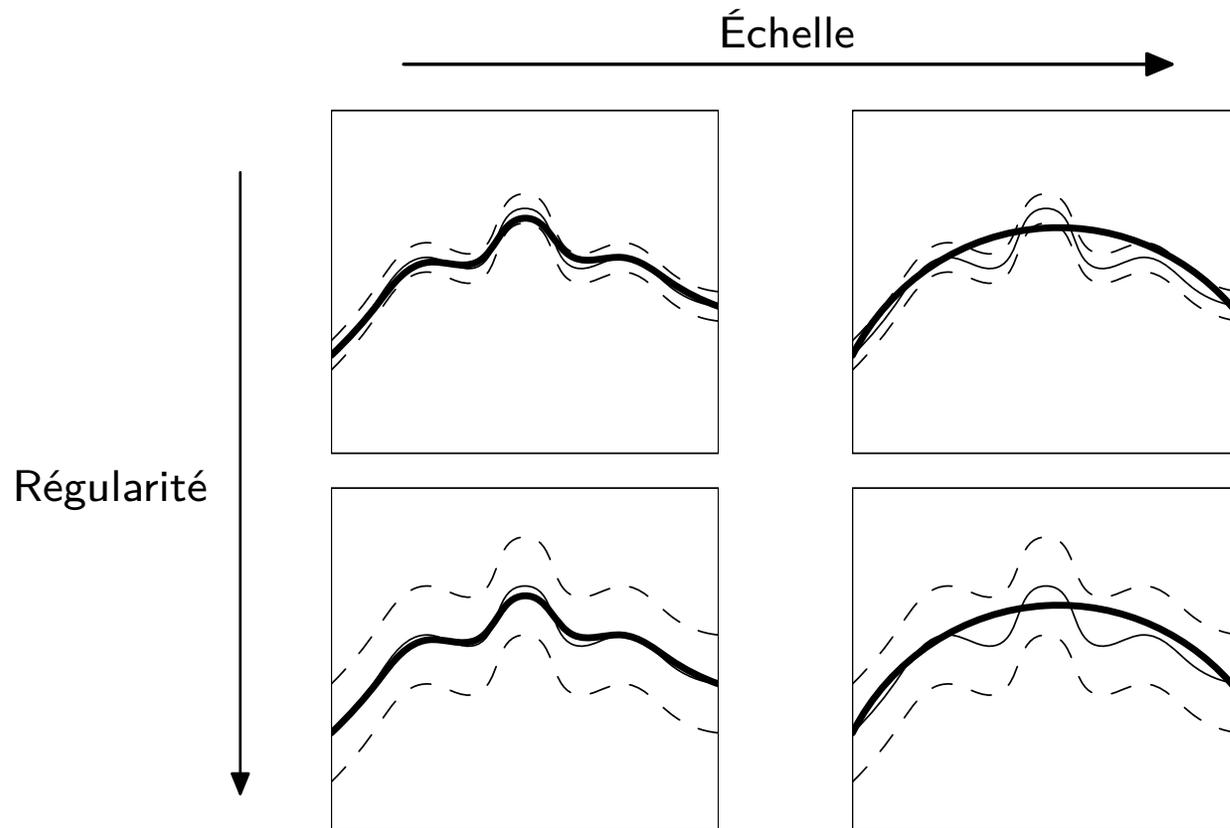
Choix de l'échelle de paramétrisation du flot

Choix de l'échelle de paramétrisation du flot

- Adaptation de l'échelle 2^l à la régularité du signal le long du flot :

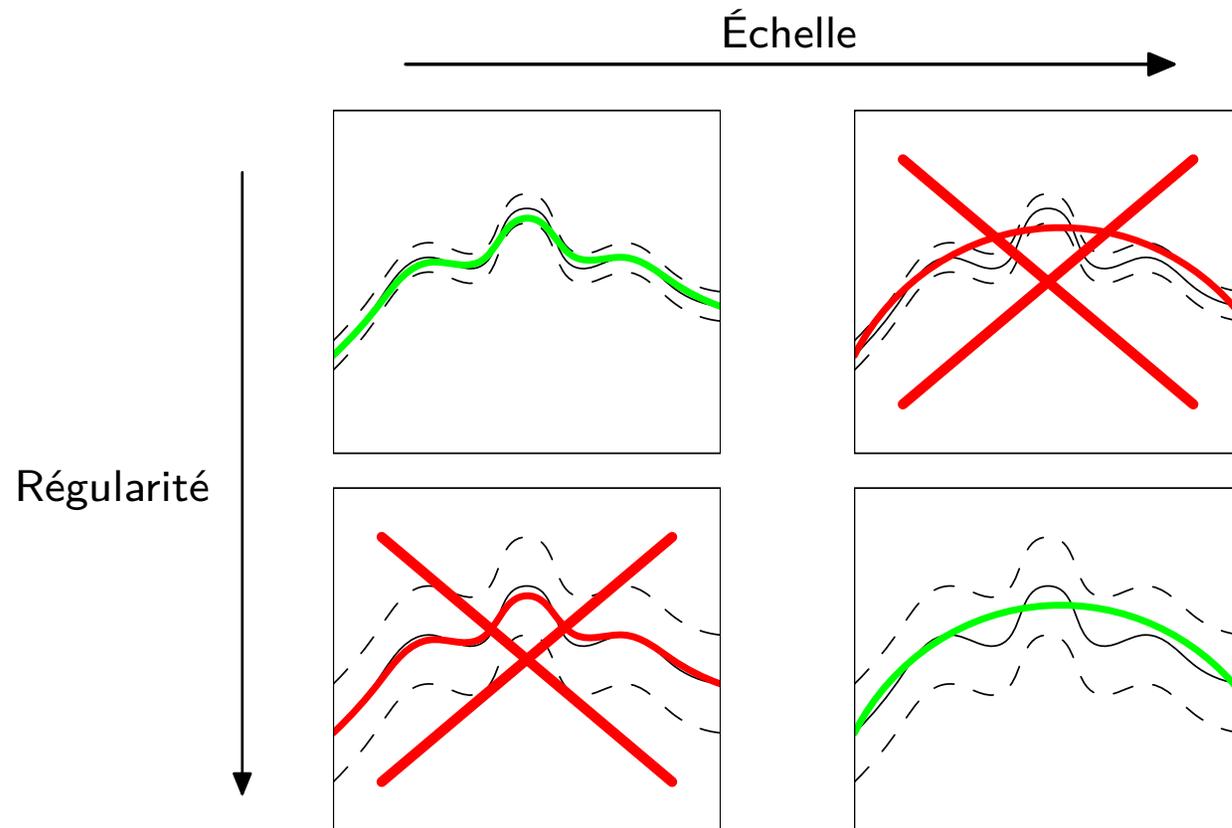
Choix de l'échelle de paramétrisation du flot

- Adaptation de l'échelle 2^l à la régularité du signal le long du flot :



Choix de l'échelle de paramétrisation du flot

- Adaptation de l'échelle 2^l à la régularité du signal le long du flot :



Approximation M termes

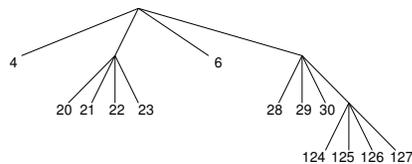
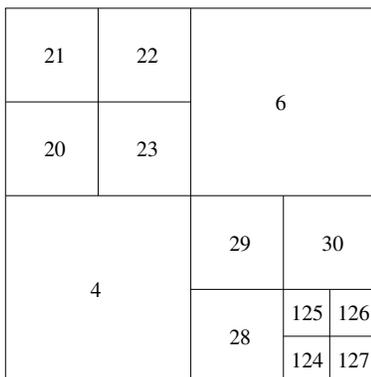
Approximation M termes

- Une approximation en bandelettes est donnée par :
 - une segmentation en carrés dyadiques, représentée par les M_s nœuds intérieurs de l'arbre quaternaire de la segmentation,
 - à l'intérieur de chaque carré Ω_i de la segmentation par :
 - $M_{g,i}$ coefficients du flot géométrique,
 - $M_{b,i}$ coefficients de bandelettes au dessus d'un seuil T .

Approximation M termes

- Une approximation en bandelettes est donnée par :
 - une segmentation en carrés dyadiques, représentée par les M_s nœuds intérieurs de l'arbre quaternaire de la segmentation,
 - à l'intérieur de chaque carré Ω_i de la segmentation par :
 - $M_{g,i}$ coefficients du flot géométrique,
 - $M_{b,i}$ coefficients de bandelettes au dessus d'un seuil T .
- Nombre total de paramètres :

$$M = M_s + \sum_i \left(M_{g,i} + M_{b,i} \right) .$$



Optimisation de l'approximation

Optimisation de l'approximation

- Minimiser $\|f - f_M\|^2$ pour un nombre fixé M de paramètres.

Optimisation de l'approximation

- Minimiser $\|f - f_M\|^2$ pour un nombre fixé M de paramètres.
- Approche lagrangienne : trouver le meilleur flot géométrique segmenté qui minimise

$$\|f - f_M\|^2 + T^2 M .$$

Optimisation de l'approximation

- Minimiser $\|f - f_M\|^2$ pour un nombre fixé M de paramètres.
- Approche lagrangienne : trouver le meilleur flot géométrique segmenté qui minimise

$$\|f - f_M\|^2 + T^2 M .$$

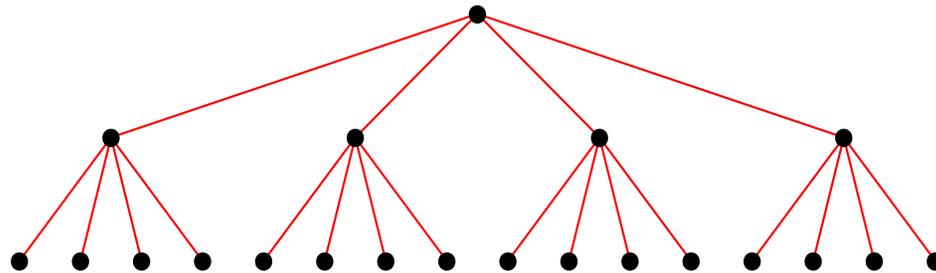
- Algorithme rapide (CART) : programmation dynamique de bas en haut sur la segmentation en arbre quaternaire.

Optimisation de l'approximation

- Minimiser $\|f - f_M\|^2$ pour un nombre fixé M de paramètres.
- Approche lagrangienne : trouver le meilleur flot géométrique segmenté qui minimise

$$\|f - f_M\|^2 + T^2 M .$$

- Algorithme rapide (CART) : programmation dynamique de bas en haut sur la segmentation en arbre quaternaire.
- Complexité : $O(N^2 (\log N)^2)$ pour N^2 pixels.

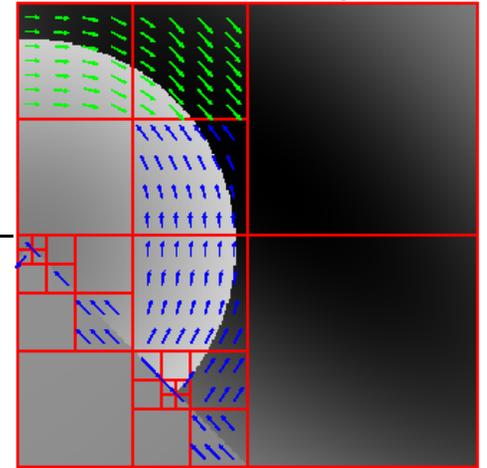


Théorème d'approximation

Théorème d'approximation

- Théorème : Si \tilde{f} est C^α en dehors de “contours” qui sont C^α par morceaux et non tangents, alors pour $f = \tilde{f}$ ou $f = \tilde{f} \star g$ (lissage).

$$\|f - f_M\|^2 \leq C M^{-\alpha} .$$

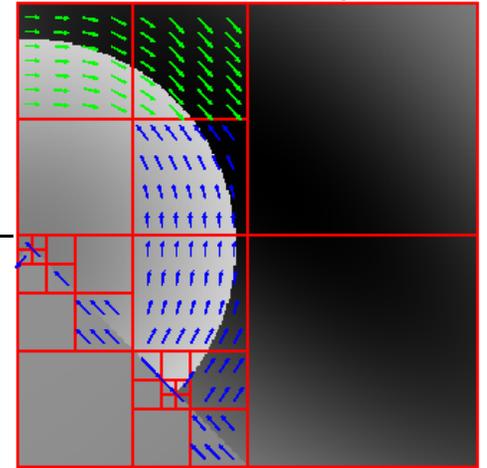


Théorème d'approximation

- Théorème : Si \tilde{f} est C^α en dehors de “contours” qui sont C^α par morceaux et non tangents, alors pour $f = \tilde{f}$ ou $f = \tilde{f} \star g$ (lissage).

$$\|f - f_M\|^2 \leq C M^{-\alpha} .$$

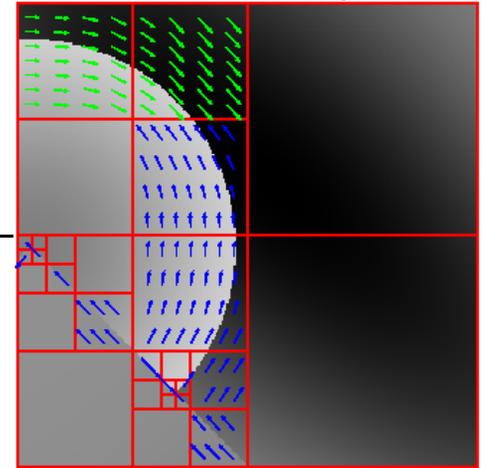
- Degré de régularité α inconnu.



Théorème d'approximation

- Théorème : Si \tilde{f} est C^α en dehors de “contours” qui sont C^α par morceaux et non tangents, alors pour $f = \tilde{f}$ ou $f = \tilde{f} \star g$ (lissage).

$$\|f - f_M\|^2 \leq C M^{-\alpha} .$$

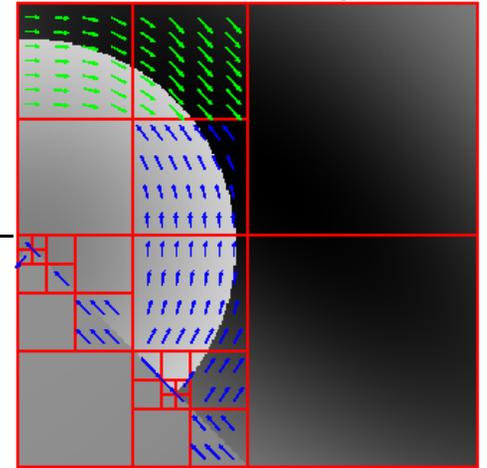


- Degré de régularité α inconnu.
- Exposant de décroissance α optimal.

Théorème d'approximation

- Théorème : Si \tilde{f} est C^α en dehors de “contours” qui sont C^α par morceaux et non tangents, alors pour $f = \tilde{f}$ ou $f = \tilde{f} \star g$ (lissage).

$$\|f - f_M\|^2 \leq C M^{-\alpha} .$$



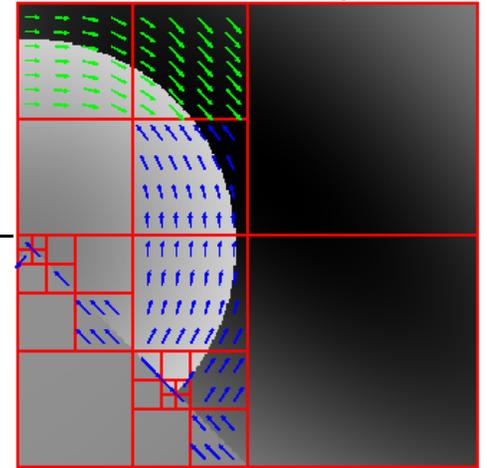
- Degré de régularité α inconnu.
- Exposant de décroissance α optimal.
- Amélioration par rapport aux ondelettes séparables pour lesquelles

$$\|f - f_M\|^2 \leq C M^{-1} .$$

Théorème d'approximation

- Théorème : Si \tilde{f} est C^α en dehors de “contours” qui sont C^α par morceaux et non tangents, alors pour $f = \tilde{f}$ ou $f = \tilde{f} \star g$ (lissage).

$$\|f - f_M\|^2 \leq C M^{-\alpha} .$$



- Degré de régularité α inconnu.
- Exposant de décroissance α optimal.
- Amélioration par rapport aux ondelettes séparables pour lesquelles

$$\|f - f_M\|^2 \leq C M^{-1} .$$

- Amélioration par rapport aux curvelets pour lesquelles

$$\|f - f_M\|^2 \leq C (\log_2 M)^3 M^{-2} .$$

Preuve

Preuve

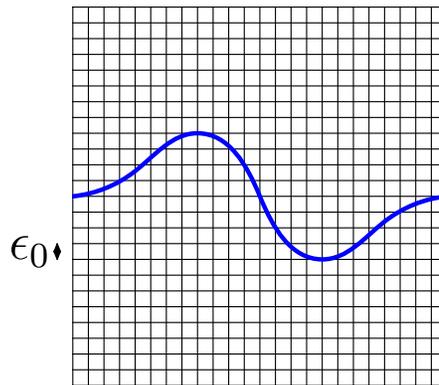
- **Étape 1** : Existence d'une base de bandelettes satisfaisant les conditions du théorème.
 - Lemme sur un seul carré.
 - Construction d'une bonne partition.

Preuve

- **Étape 1** : Existence d'une base de bandelettes satisfaisant les conditions du théorème.
 - Lemme sur un seul carré.
 - Construction d'une bonne partition.
- **Étape 2** : L'optimisation trouve une telle base.

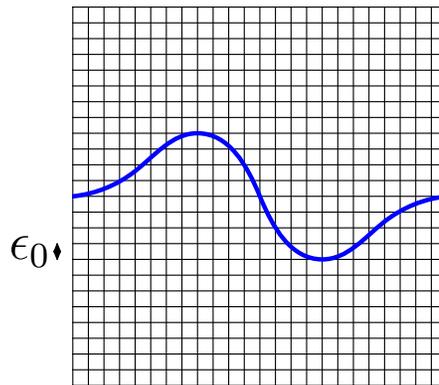
Preuve

- **Étape 1** : Existence d'une base de bandelettes satisfaisant les conditions du théorème.
 - Lemme sur un seul carré.
 - Construction d'une bonne partition.
- **Étape 2** : L'optimisation trouve une telle base.
- Discrétisation : à une résolution ϵ_0 donné, ϵ_0^{-2} coefficients obtenus par un moyennage local.



Preuve

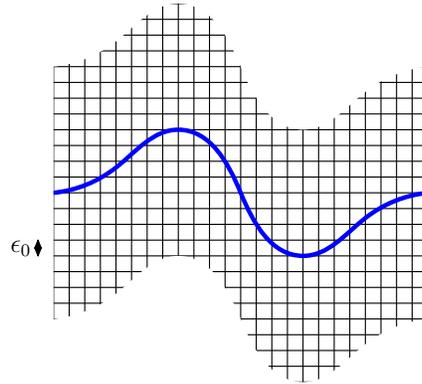
- **Étape 1** : Existence d'une base de bandelettes satisfaisant les conditions du théorème.
 - Lemme sur un seul carré.
 - Construction d'une bonne partition.
- **Étape 2** : L'optimisation trouve une telle base.
- Discrétisation : à une résolution ϵ_0 donné, ϵ_0^{-2} coefficients obtenus par un moyennage local.



- Objectif d'erreur : $\epsilon \geq \epsilon_0$.

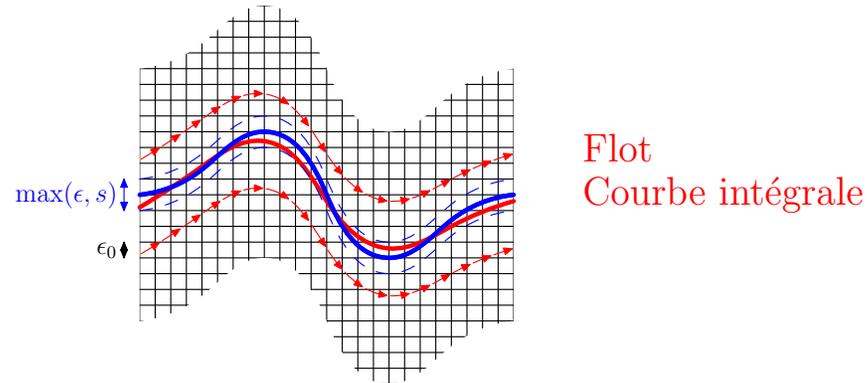
Lemme - 1

Lemme - 1



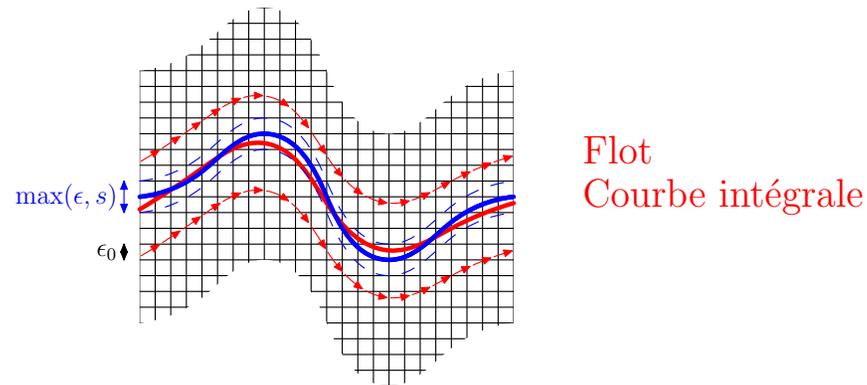
- Fonction discrétisée à la résolution ϵ_0 .

Lemme - 1

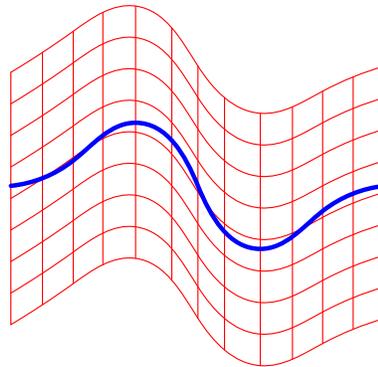


- Fonction discrétisée à la résolution ϵ_0 .
- Géométrie connue à $\max(\epsilon, s)$ près.

Lemme - 1

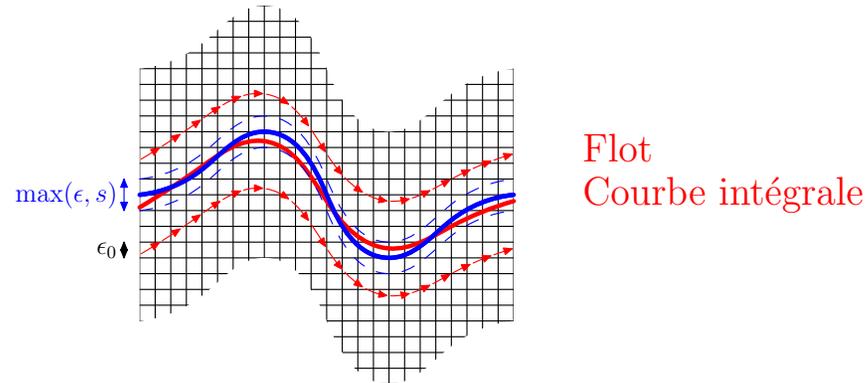


- Fonction discrétisée à la résolution ϵ_0 .
- Géométrie connue à $\max(\epsilon, s)$ près.

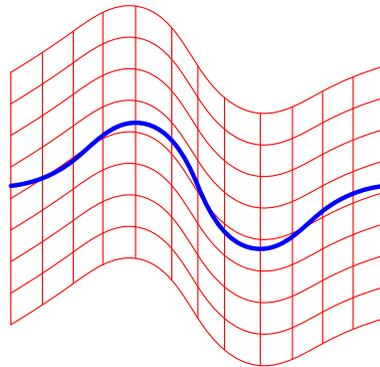


- Transformation en ondelettes déformées jusqu'à l'échelle ϵ : erreur de l'ordre de ϵ .

Lemme - 1



- Fonction discrétisée à la résolution ϵ_0 .
- Géométrie connue à $\max(\epsilon, s)$ près.



- Transformation en ondelettes déformées jusqu'à l'échelle ϵ : erreur de l'ordre de ϵ .
- Bandelettisation sur les coefficients au dessus de cette échelle.

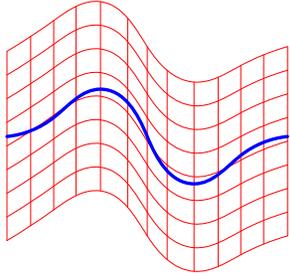
Lemme - 2

● 3 cas de figure : **Lemme - 2**

Lemme - 2

● 3 cas de figure :

● $s = 0$:

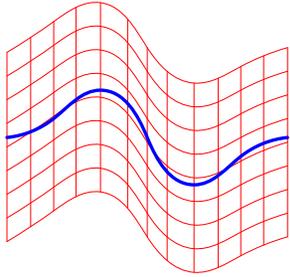


- précision sur la géométrie suffisante,
- coefficients aux échelles supérieurs à ϵ similaires à ceux obtenues avec la géométrie idéale.

Lemme - 2

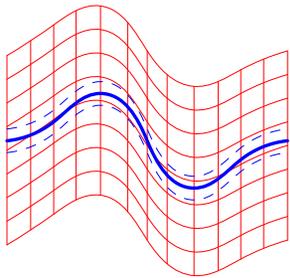
● 3 cas de figure :

● $s = 0$:



- précision sur la géométrie suffisante,
- coefficients aux échelles supérieurs à ϵ similaires à ceux obtenues avec la géométrie idéale.

● $s \leq \epsilon$:

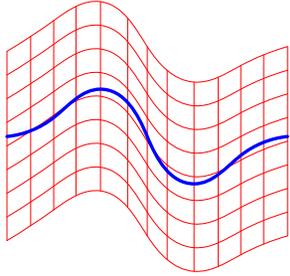


- lissage très faible,
- cas précédent.

Lemme - 2

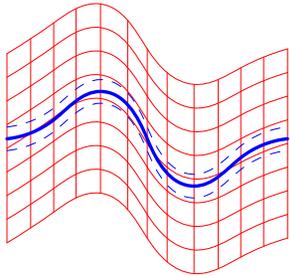
● 3 cas de figure :

● $s = 0$:



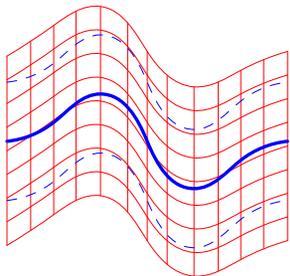
- précision sur la géométrie suffisante,
- coefficients aux échelles supérieurs à ϵ similaires à ceux obtenues avec la géométrie idéale.

● $s \leq \epsilon$:



- lissage très faible,
- cas précédent.

● $s \geq \epsilon$:

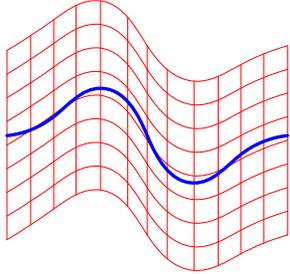


- utilisation de la régularité de la fonction au voisinage de la singularité.

Lemme - 2

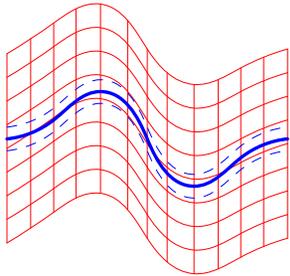
● 3 cas de figure :

● $s = 0$:



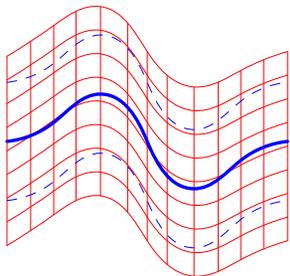
- précision sur la géométrie suffisante,
- coefficients aux échelles supérieurs à ϵ similaires à ceux obtenus avec la géométrie idéale.

● $s \leq \epsilon$:



- lissage très faible,
- cas précédent.

● $s \geq \epsilon$:

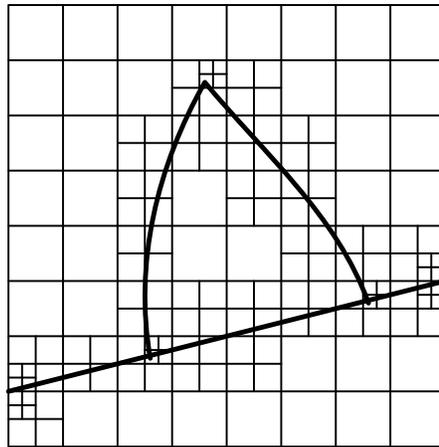


- utilisation de la régularité de la fonction au voisinage de la singularité.

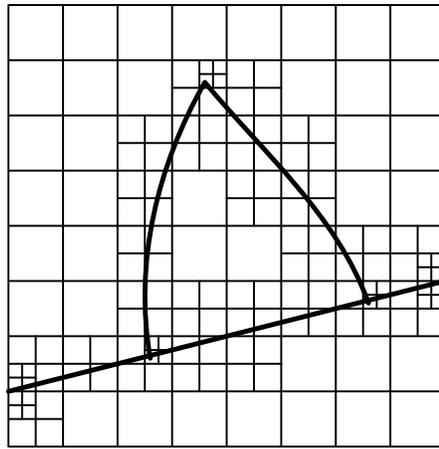
● Un seuillage à $T = \epsilon^{(\alpha+1)/(2\alpha)}$ conserve $K(1 + l\epsilon^{-1/\alpha})$

Partition

Partition

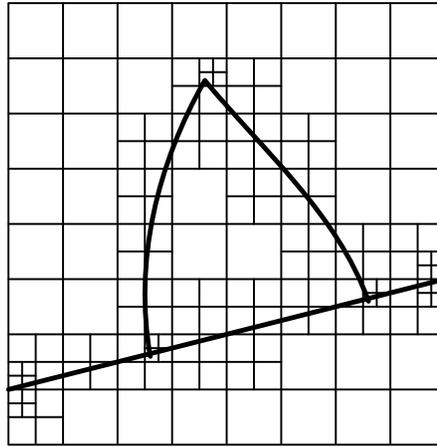


Partition



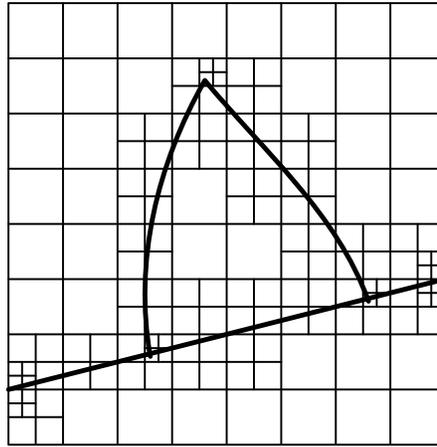
- Découpage pour obtenir une partition avec :
 - soit un seul *contour* horizontal ou vertical par carré :
 - $K(1 + \log(\epsilon))$ carrés de taille supérieur à $\epsilon^{1/\alpha}$
 - $K|\log(\epsilon)|$ carrés de taille inférieure à $\epsilon^{1/\alpha}$.
 - soit des coins en nombre fini et de taille $\max(\epsilon, s)$ où l'on utilise des ondelettes (singularités ponctuelles).
 - soit des parties régulières où on utilise des ondelettes.

Partition



- Découpage pour obtenir une partition avec :
 - soit un seul *contour* horizontal ou vertical par carré :
 - $K(1 + \log(\epsilon))$ carrés de taille supérieur à $\epsilon^{1/\alpha}$
 - $K|\log(\epsilon)|$ carrés de taille inférieure à $\epsilon^{1/\alpha}$.
 - soit des coins en nombre fini et de taille $\max(\epsilon, s)$ où l'on utilise des ondelettes (singularités ponctuelles).
 - soit des parties régulières où on utilise des ondelettes.
- Géométrie régulière : approximation à l'aide de $\epsilon^{-1/\alpha}$ coefficients.

Partition



- Découpage pour obtenir une partition avec :
 - soit un seul *contour* horizontal ou vertical par carré :
 - $K(1 + \log(\epsilon))$ carrés de taille supérieur à $\epsilon^{1/\alpha}$
 - $K|\log(\epsilon)|$ carrés de taille inférieure à $\epsilon^{1/\alpha}$.
 - soit des coins en nombre fini et de taille $\max(\epsilon, s)$ où l'on utilise des ondelettes (singularités ponctuelles).
 - soit des parties régulières où on utilise des ondelettes.
- Géométrie régulière : approximation à l'aide de $\epsilon^{-1/\alpha}$ coefficients.
- Bilan : $\epsilon^{-1/\alpha}$ coefficients (géométrie et bandelettes) pour une erreur ϵ .

Optimisation

Optimisation

- Avec la construction précédente, existence d'une partition telle que le seuillage à T vérifie :

$$\|f - f_M\|^2 + T^2 M \leq K\epsilon \quad \text{avec } \epsilon = T^{2\alpha/(\alpha+1)}.$$

Optimisation

- Avec la construction précédente, existence d'une partition telle que le seuillage à T vérifie :

$$\|f - f_M\|^2 + T^2 M \leq K\epsilon \quad \text{avec } \epsilon = T^{2\alpha/(\alpha+1)}.$$

- L'algorithme minimisant $\|f - f_M\|^2 + T^2 M$ teste une telle partition (nécessite une démonstration).

Optimisation

- Avec la construction précédente, existence d'une partition telle que le seuillage à T vérifie :

$$\|f - f_M\|^2 + T^2 M \leq K\epsilon \quad \text{avec } \epsilon = T^{2\alpha/(\alpha+1)}.$$

- L'algorithme minimisant $\|f - f_M\|^2 + T^2 M$ teste une telle partition (nécessite une démonstration).
- La meilleur fonction f_{M_0} satisfait donc également

$$\|f - f_{M_0}\|^2 + T^2 M_0 \leq K\epsilon \quad \text{avec } \epsilon = T^{2\alpha/(\alpha+1)}$$

et donc

$$\|f - f_{M_0}\|^2 \leq K M_0^{-1/\alpha} .$$

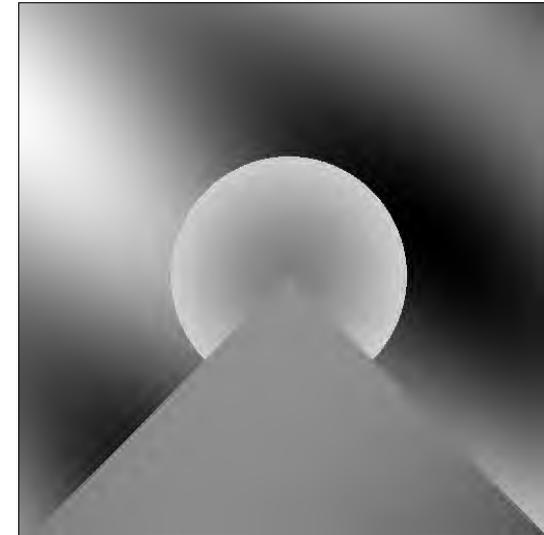
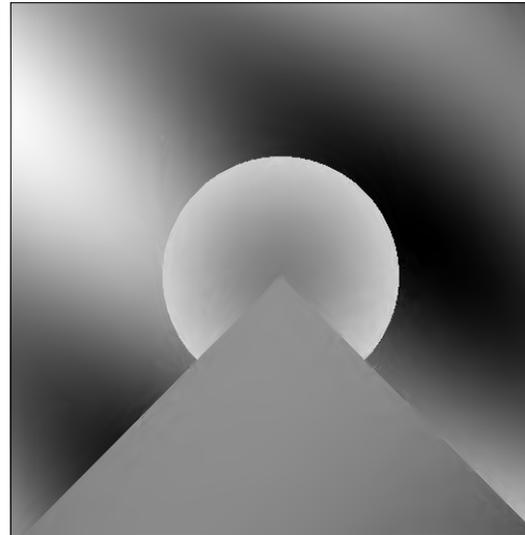
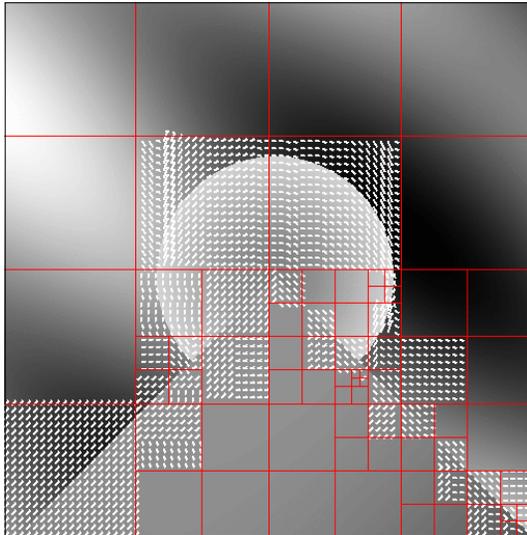
Fonction régulière par morceaux

Fonction régulière par morceaux

M=2650

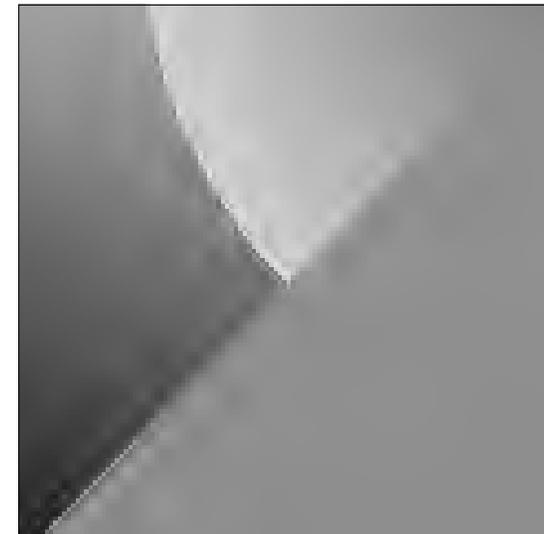
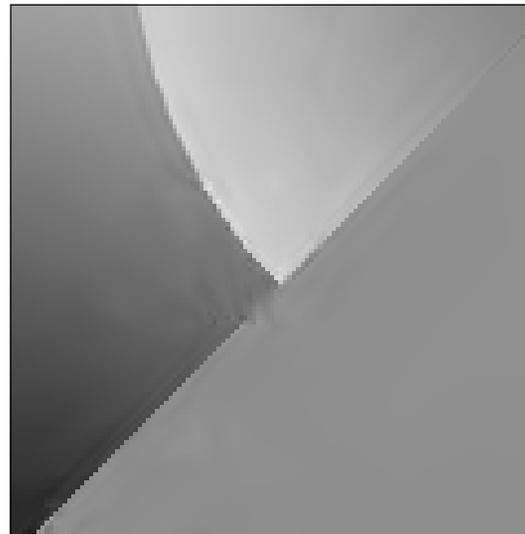
PSNR = 45.97 dB

PSNR = 40.17 dB



Bandelettes

Ondelettes



Compression d'image

Compression d'image

- Lien entre la compression et l'approximation non linéaire.

Compression d'image

- Lien entre la compression et l'approximation non linéaire.
- Une image comprimée \tilde{f} est obtenue à partir de f en :
 - choisissant une segmentation et un flot quantifié,
 - quantifiant uniformément les coefficients de bandelettes avec un pas de taille Δ .
 - effectuant le codage entropique de tous les paramètres avec un total de R bits.

Compression d'image

- Lien entre la compression et l'approximation non linéaire.
- Une image comprimée \tilde{f} est obtenue à partir de f en :
 - choisissant une segmentation et un flot quantifié,
 - quantifiant uniformément les coefficients de bandelettes avec un pas de taille Δ .
 - effectuant le codage entropique de tous les paramètres avec un total de R bits.
- Optimisation de la géométrie (segmentation et flot) pour minimiser le lagrangien :

$$\|f - \tilde{f}\|^2 + \lambda \Delta^2 R \quad \text{avec} \quad \lambda \approx 0.107$$

Compression d'image

- Lien entre la compression et l'approximation non linéaire.
- Une image comprimée \tilde{f} est obtenue à partir de f en :
 - choisissant une segmentation et un flot quantifié,
 - quantifiant uniformément les coefficients de bandelettes avec un pas de taille Δ .
 - effectuant le codage entropique de tous les paramètres avec un total de R bits.
- Optimisation de la géométrie (segmentation et flot) pour minimiser le lagrangien :

$$\|f - \tilde{f}\|^2 + \lambda \Delta^2 R \quad \text{avec} \quad \lambda \approx 0.107$$

- $O(N^2 (\log_2 N)^2)$ opérations.

Compression d'image

- Lien entre la compression et l'approximation non linéaire.
- Une image comprimée \tilde{f} est obtenue à partir de f en :
 - choisissant une segmentation et un flot quantifié,
 - quantifiant uniformément les coefficients de bandelettes avec un pas de taille Δ .
 - effectuant le codage entropique de tous les paramètres avec un total de R bits.
- Optimisation de la géométrie (segmentation et flot) pour minimiser le lagrangien :

$$\|f - \tilde{f}\|^2 + \lambda \Delta^2 R \quad \text{avec} \quad \lambda \approx 0.107$$

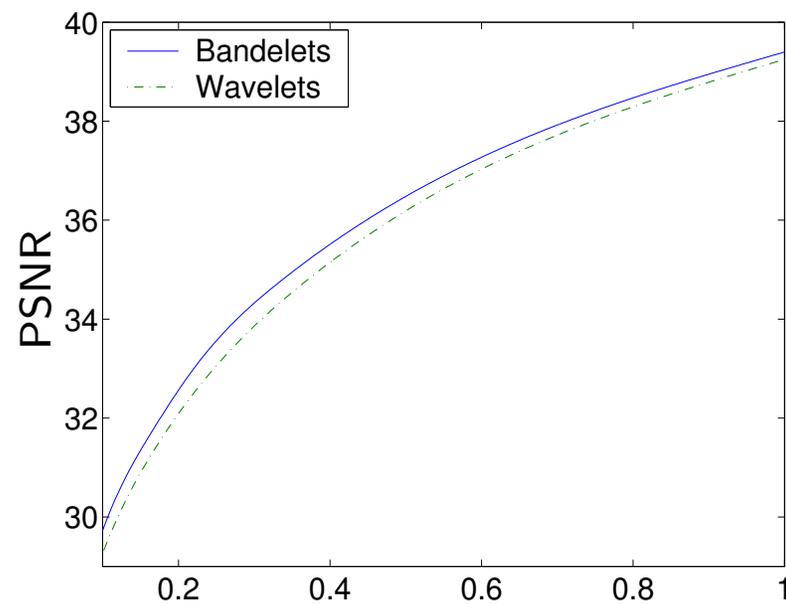
- $O(N^2 (\log_2 N)^2)$ opérations.
- Résultat théorique :

$$\|f - \tilde{f}\|^2 \leq C R^{-\alpha} |\log R|^\alpha$$

Originale



Distorsion-Débit



$R/N^2 = 0.22$ bpp

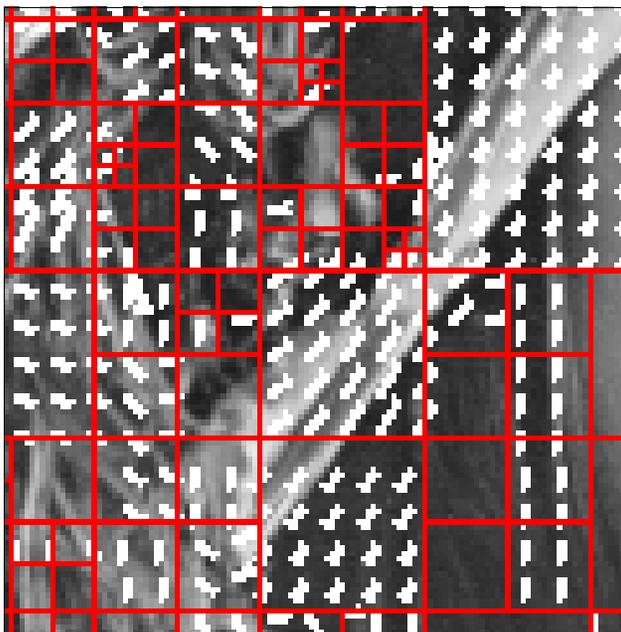
Bandelettes (33.05 db)



Ondelettes (R/N^2 32.54 db)



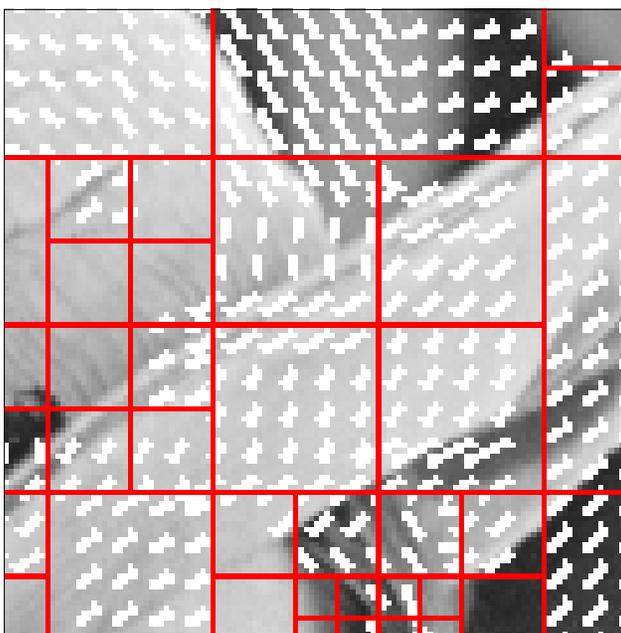
Originale



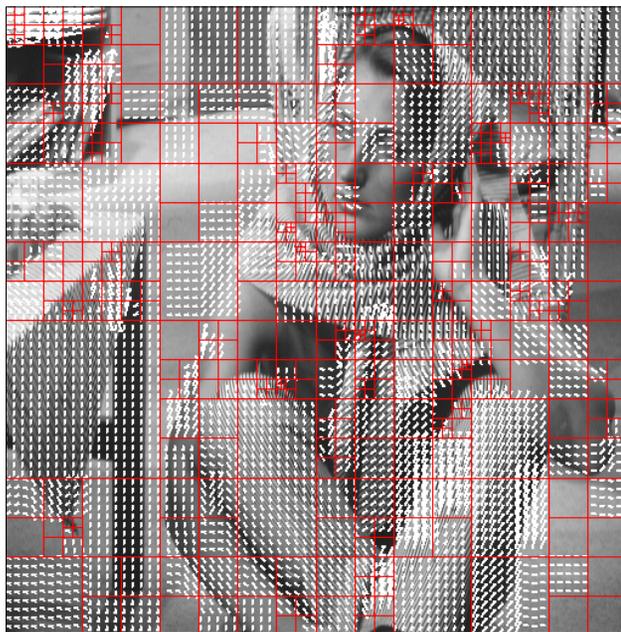
Bandelettes



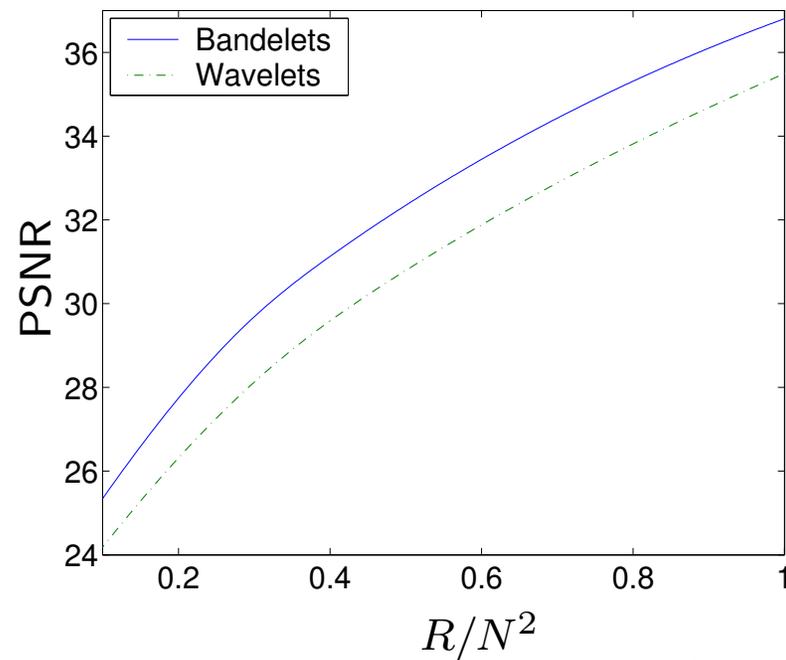
Ondelettes



Originale



Distorsion-Débit



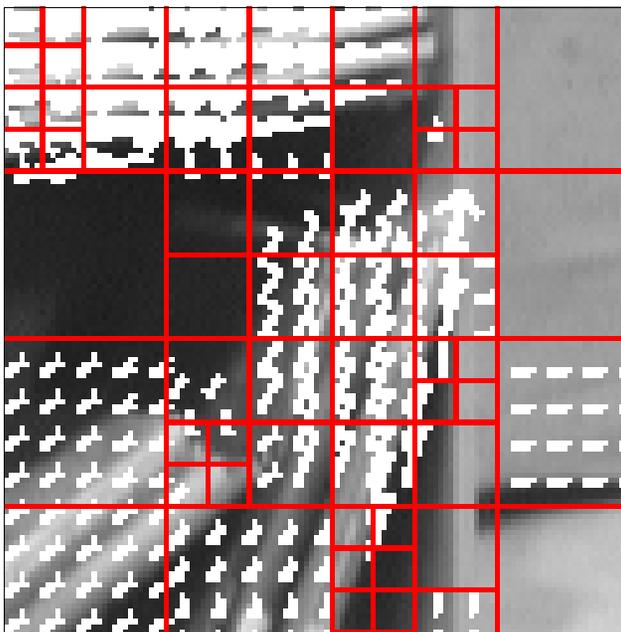
$R/N^2 = 0.40$ bpp

Bandelettes (31.22 db)

Ondelettes (29.68 db)



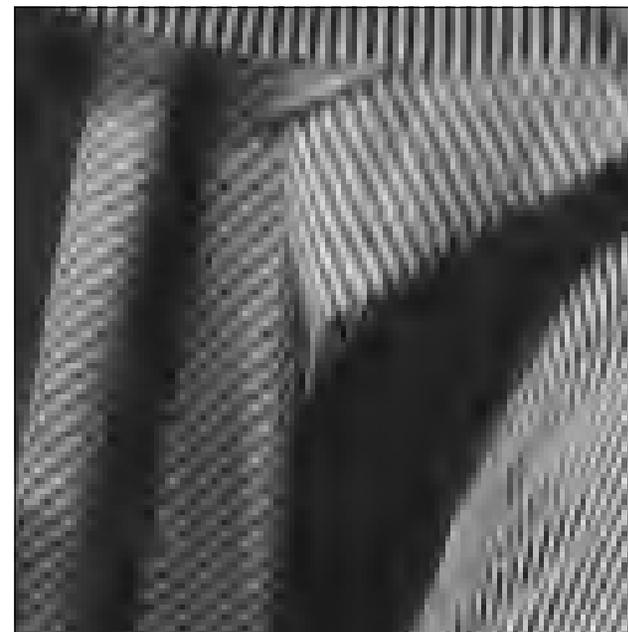
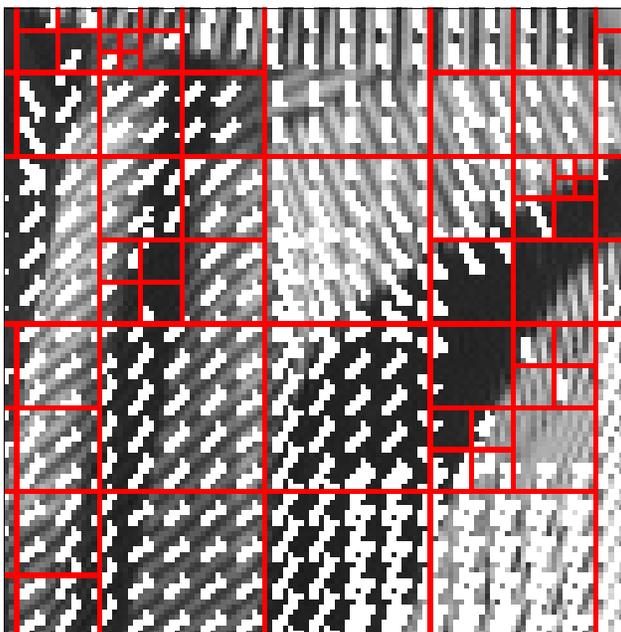
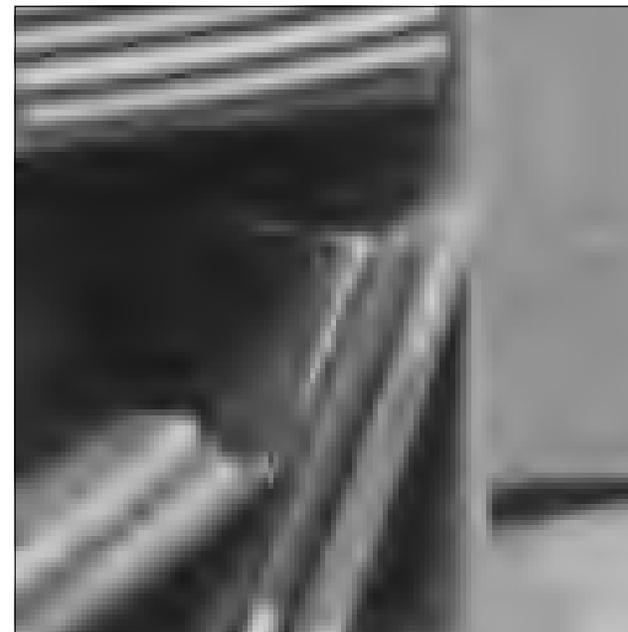
Originale



Bandelettes



Ondelettes



Débruitage

Débruitage

- Estimer une image f à partir de données bruitées

$$X = f + W \quad \text{où } W \text{ est un bruit Gaussien de variance } \sigma^2.$$

Débruitage

- Estimer une image f à partir de données bruitées

$$X = f + W \quad \text{où } W \text{ est un bruit Gaussien de variance } \sigma^2.$$

- Estimateur par seuillage dans une base $\mathcal{B} = \{g_m\}_{1 \leq m \leq N^2}$:

$$F = \sum_{|\langle X, g_m \rangle| > T} \langle X, g_m \rangle \tilde{g}_m = P_{\mathcal{M}}(X) .$$

Débruitage

- Estimer une image f à partir de données bruitées

$$X = f + W \quad \text{où } W \text{ est un bruit Gaussien de variance } \sigma^2.$$

- Estimateur par seuillage dans une base $\mathcal{B} = \{g_m\}_{1 \leq m \leq N^2}$:

$$F = \sum_{|\langle X, g_m \rangle| > T} \langle X, g_m \rangle \tilde{g}_m = P_{\mathcal{M}}(X) .$$

- Le *modèle oracle* minimise le risque $E\{\|F - f\|^2\}$.

Débruitage

- Estimer une image f à partir de données bruitées

$$X = f + W \quad \text{où } W \text{ est un bruit Gaussien de variance } \sigma^2.$$

- Estimateur par seuillage dans une base $\mathcal{B} = \{g_m\}_{1 \leq m \leq N^2}$:

$$F = \sum_{|\langle X, g_m \rangle| > T} \langle X, g_m \rangle \tilde{g}_m = P_{\mathcal{M}}(X) .$$

- Le *modèle oracle* minimise le risque $E\{\|F - f\|^2\}$.
- Estimateur à pénalité choisissant le modèle qui minimise

$$\|X - F\|^2 + \lambda \sigma^2 R$$

où R est le nombre de bits nécessaire pour spécifier le modèle.

Débruitage

- Estimer une image f à partir de données bruitées

$$X = f + W \quad \text{où } W \text{ est un bruit Gaussien de variance } \sigma^2.$$

- Estimateur par seuillage dans une base $\mathcal{B} = \{g_m\}_{1 \leq m \leq N^2}$:

$$F = \sum_{|\langle X, g_m \rangle| > T} \langle X, g_m \rangle \tilde{g}_m = P_{\mathcal{M}}(X) .$$

- Le *modèle oracle* minimise le risque $E\{\|F - f\|^2\}$.
- Estimateur à pénalité choisissant le modèle qui minimise

$$\|X - F\|^2 + \lambda \sigma^2 R$$

où R est le nombre de bits nécessaire pour spécifier le modèle.

- $O(N^2(\log_2 N)^2)$ opérations.

Débruitage

- Estimer une image f à partir de données bruitées

$$X = f + W \quad \text{où } W \text{ est un bruit Gaussien de variance } \sigma^2.$$

- Estimateur par seuillage dans une base $\mathcal{B} = \{g_m\}_{1 \leq m \leq N^2}$:

$$F = \sum_{|\langle X, g_m \rangle| > T} \langle X, g_m \rangle \tilde{g}_m = P_{\mathcal{M}}(X) .$$

- Le *modèle oracle* minimise le risque $E\{\|F - f\|^2\}$.
- Estimateur à pénalité choisissant le modèle qui minimise

$$\|X - F\|^2 + \lambda \sigma^2 R$$

où R est le nombre de bits nécessaire pour spécifier le modèle.

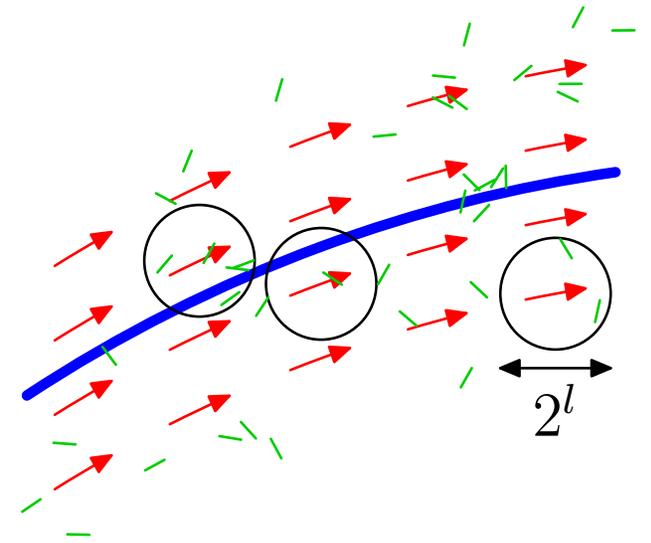
- $O(N^2(\log_2 N)^2)$ opérations.

Détermination d'un flot avec du bruit

Détermination d'un flot avec du bruit

- Régularisation de l'image à l'échelle 2^l : $f \star \theta_l$ avec

$$\theta_l(x_1, x_2) = 2^{-2l} \theta(2^{-l}x_1, 2^{-l}x_2) .$$



Détermination d'un flot avec du bruit

- Régularisation de l'image à l'échelle 2^l : $f \star \theta_l$ avec

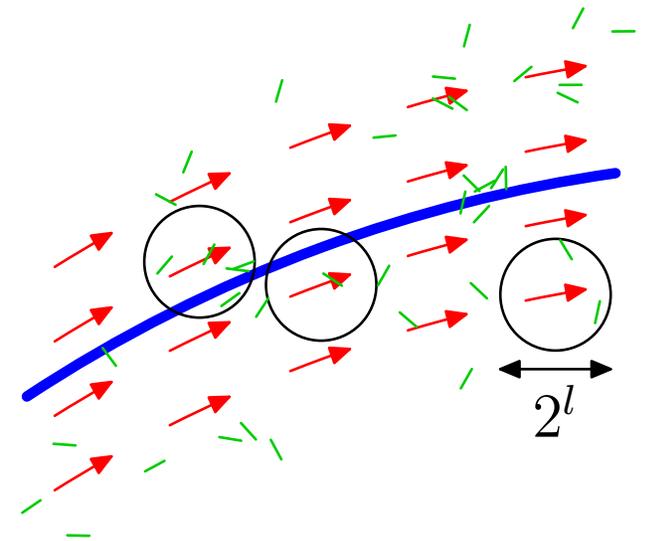
$$\theta_l(x_1, x_2) = 2^{-2l} \theta(2^{-l}x_1, 2^{-l}x_2) .$$

- Flot paramétré à l'échelle 2^l :

$$c'(x) = \sum_{n=1}^{L2^{-l}} \alpha_n \phi(2^{-l}x - n) ,$$

où les α_n minimisent

$$\int_{\Omega} \left| \vec{\nabla}(f \star \theta_l)(x_1, x_2) \cdot \vec{\tau}(x_1, x_2) \right|^2 dx_1 dx_2 = \int_{\Omega} \left| \frac{\partial(f \star \theta_l)(x_1, x_2)}{\partial \vec{\tau}(x_1, x_2)} \right|^2 dx_1 dx_2$$



Détermination d'un flot avec du bruit

- Régularisation de l'image à l'échelle 2^l : $f \star \theta_l$ avec

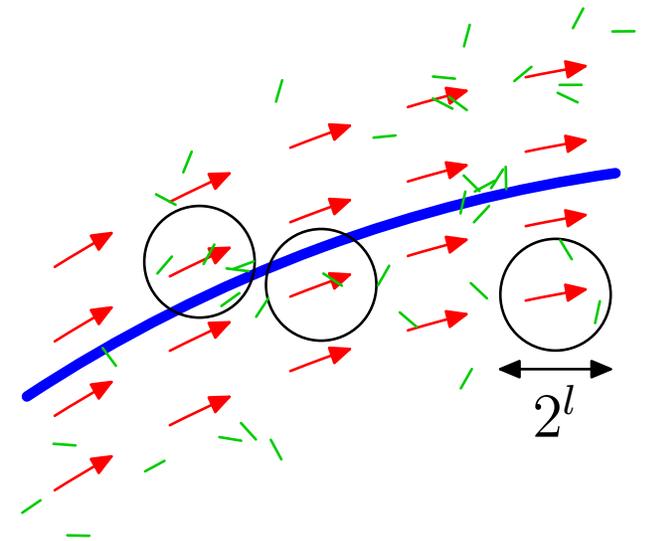
$$\theta_l(x_1, x_2) = 2^{-2l} \theta(2^{-l}x_1, 2^{-l}x_2) .$$

- Flot paramétré à l'échelle 2^l :

$$c'(x) = \sum_{n=1}^{L2^{-l}} \alpha_n \phi(2^{-l}x - n) ,$$

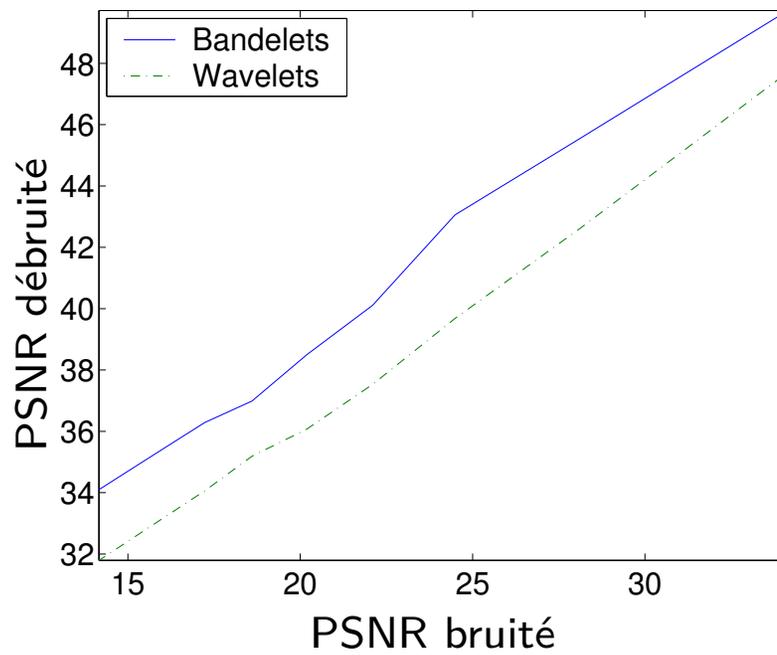
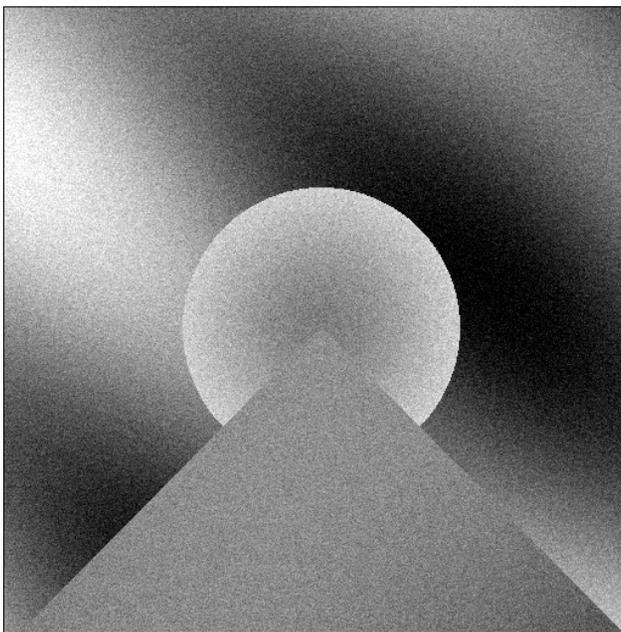
où les α_n minimisent

$$\int_{\Omega} \left| \vec{\nabla}(f \star \theta_l)(x_1, x_2) \cdot \vec{\tau}(x_1, x_2) \right|^2 dx_1 dx_2 = \int_{\Omega} \left| \frac{\partial(f \star \theta_l)(x_1, x_2)}{\partial \vec{\tau}(x_1, x_2)} \right|^2 dx_1 dx_2$$

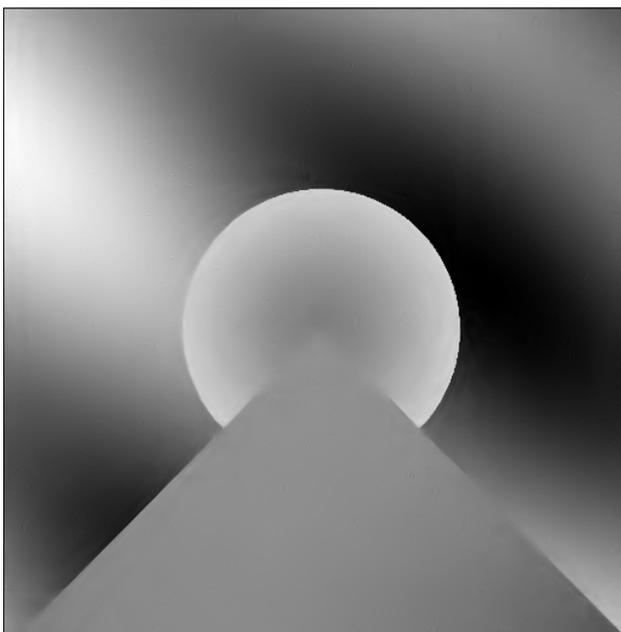


- L'échelle 2^l est ajustée à la variance du bruit et à la régularité locale du signal par une minimisation pénalisée.

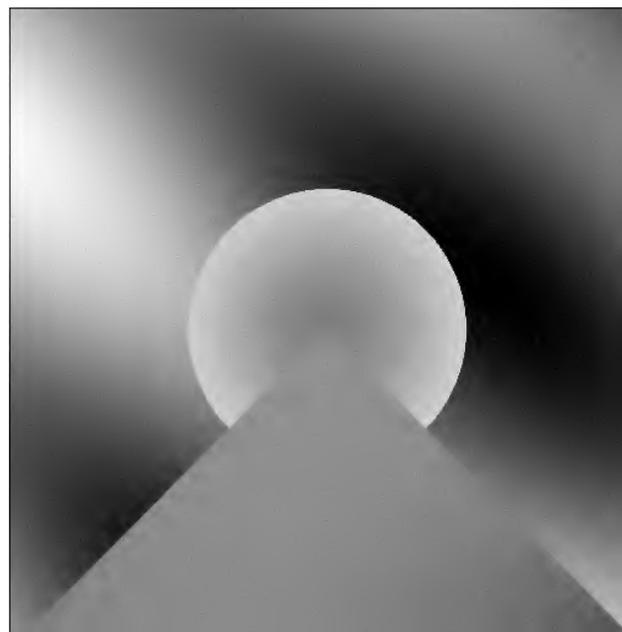
Bruité (20.19 dB)



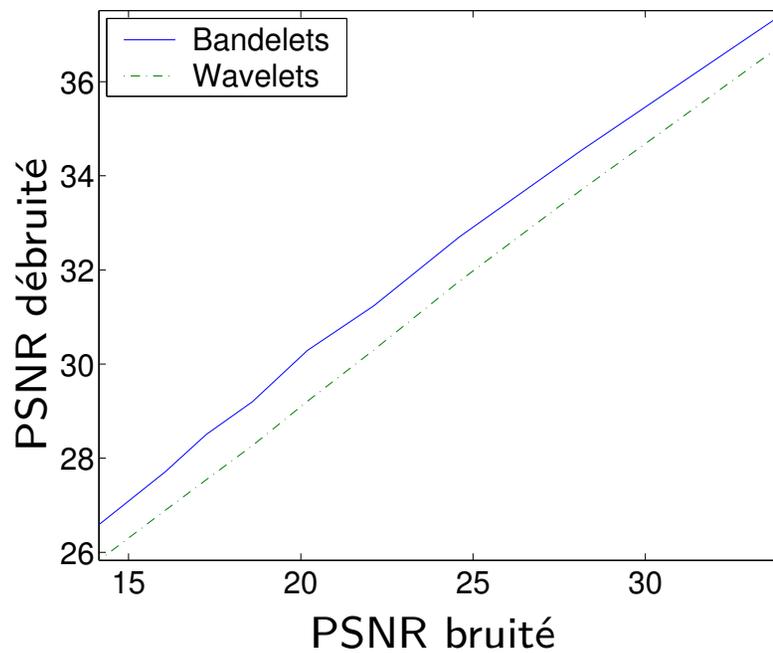
Bandelettes (30.29 dB)



Ondelettes (28.21 dB)



Bruité (20.19 dB)



Bandelettes (30.29 dB)



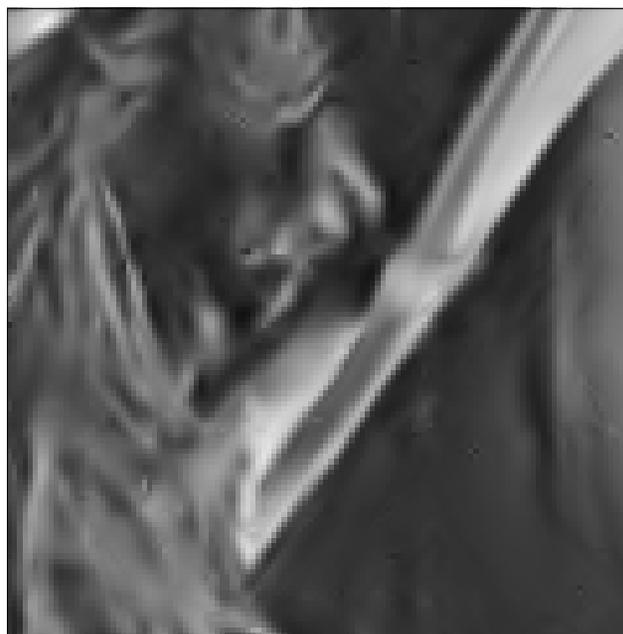
Ondelettes (28.21 dB)



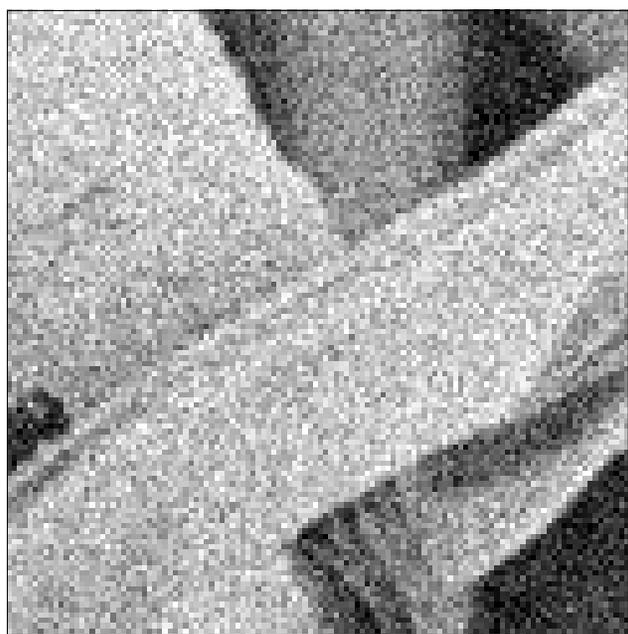
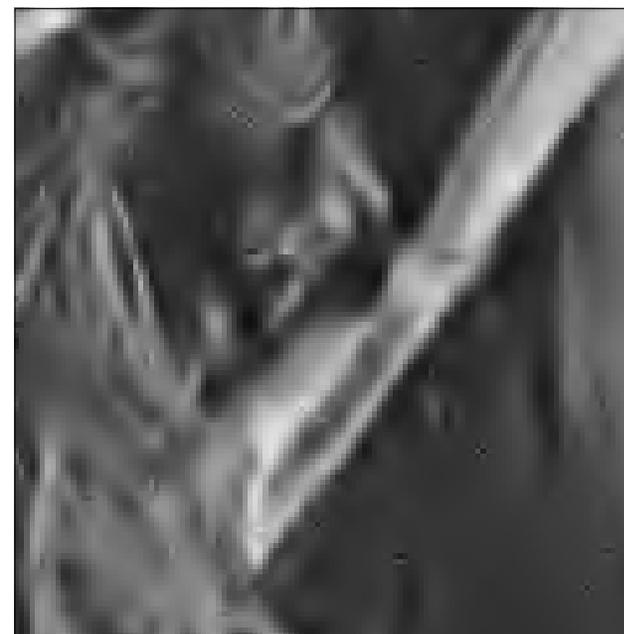
Bruité



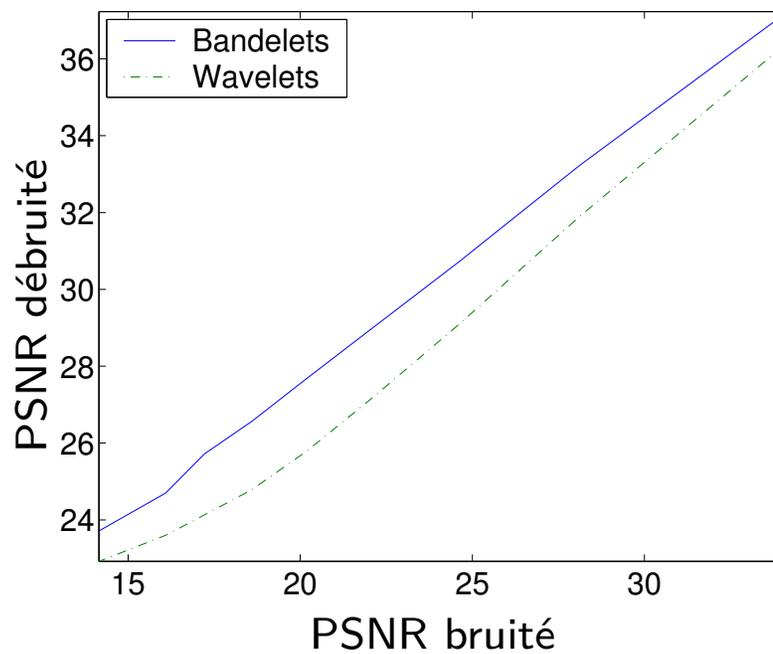
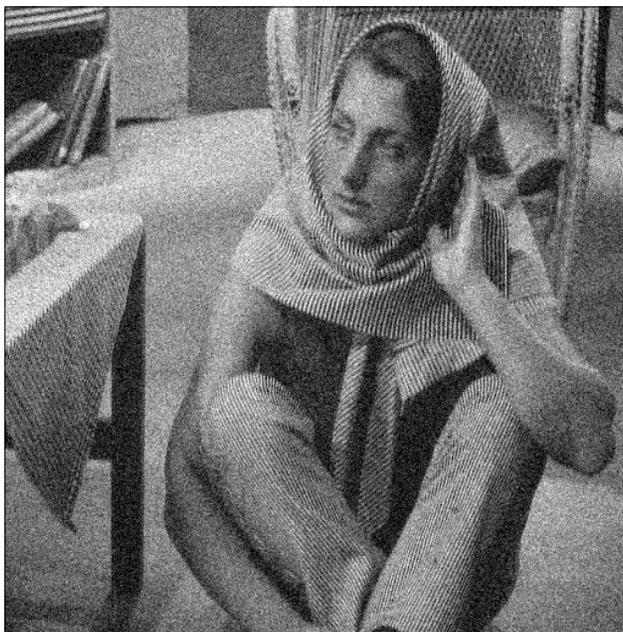
Bandelettes



Ondelettes



Bruité (20.19 dB)



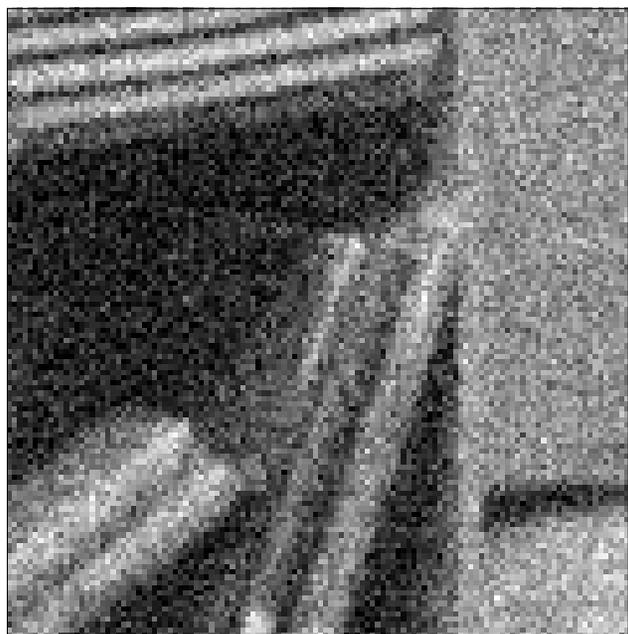
Bandelettes (27.68 dB)



Ondelettes (25.79 dB)



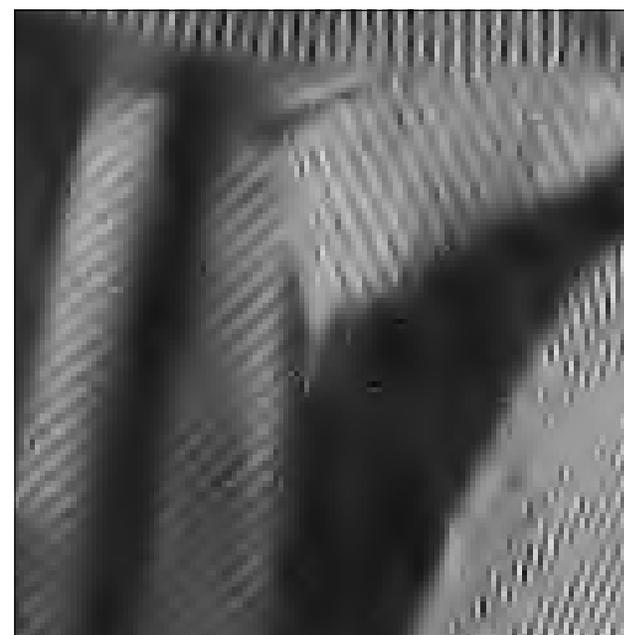
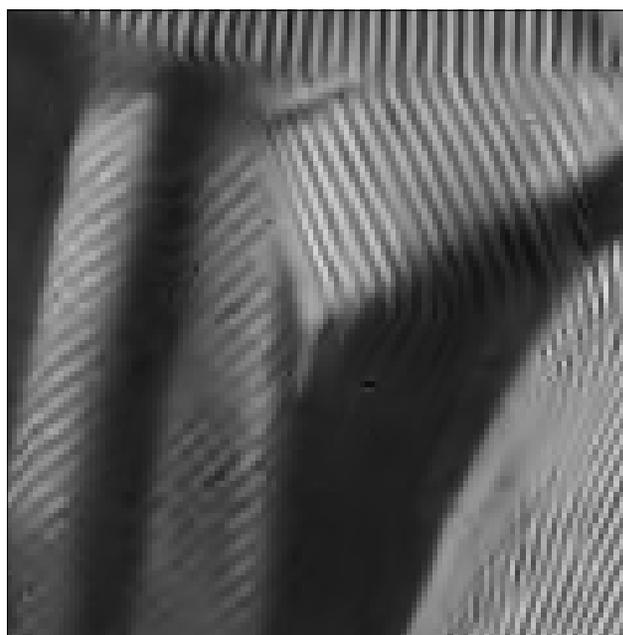
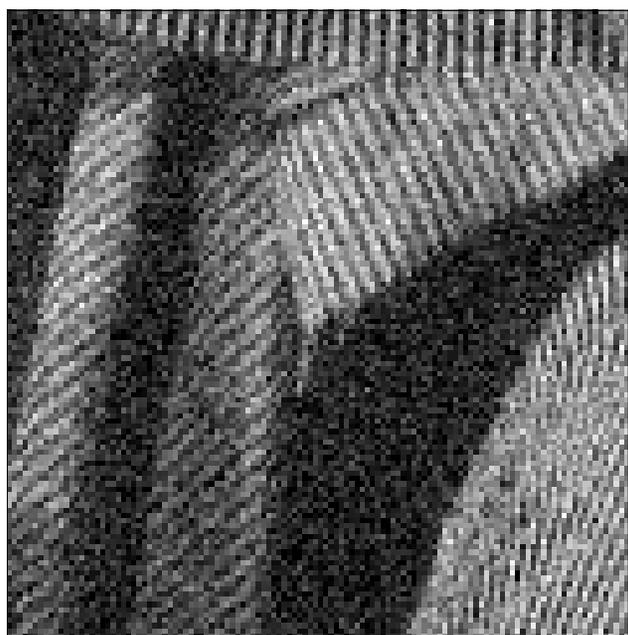
Bruité



Bandelettes



Ondelettes



Application à la compression de visage

Application à la compression de visage

- Problème : authentifier le porteur d'un document.

Application à la compression de visage

- Problème : authentifier le porteur d'un document.

- Solution simple : la photo d'identité.



Application à la compression de visage

- Problème : authentifier le porteur d'un document.
- Solution simple : la photo d'identité.
- Inconvénient : facile à modifier.



Application à la compression de visage

- Problème : authentifier le porteur d'un document.

- Solution simple : la photo d'identité.



- Inconvénient : facile à modifier.
- Solution sécurisée : photo numérisée, cryptée et signée numériquement.

Application à la compression de visage

- Problème : authentifier le porteur d'un document.

- Solution simple : la photo d'identité.



- Inconvénient : facile à modifier.
- Solution sécurisée : photo numérisée, cryptée et signée numériquement.
- Problème : capacité limitée de stockage.

Application à la compression de visage

- Problème : authentifier le porteur d'un document.

- Solution simple : la photo d'identité.



- Inconvénient : facile à modifier.
- Solution sécurisée : photo numérisée, cryptée et signée numériquement.
- Problème : capacité limitée de stockage.
- Cas du code barre 2D : 500-800 octets.

Application à la compression de visage

- Problème : authentifier le porteur d'un document.

- Solution simple : la photo d'identité.



- Inconvénient : facile à modifier.
- Solution sécurisée : photo numérisée, cryptée et signée numériquement.
- Problème : capacité limitée de stockage.
- Cas du code barre 2D : 500-800 octets.
- Solution : compression d'image utilisant la nature géométrique du visage.

Photo d'identité

Photo d'identité

500 octets

Photo d'identité

500 octets

JPEG

Photo d'identité

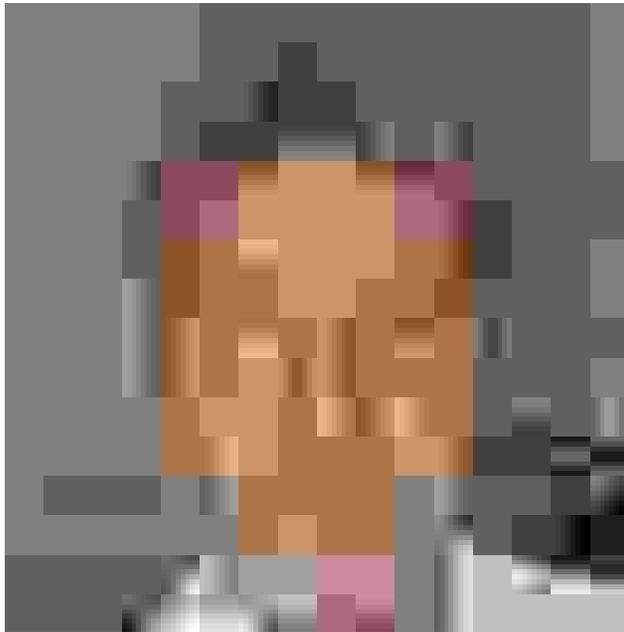
JPEG

500 octets

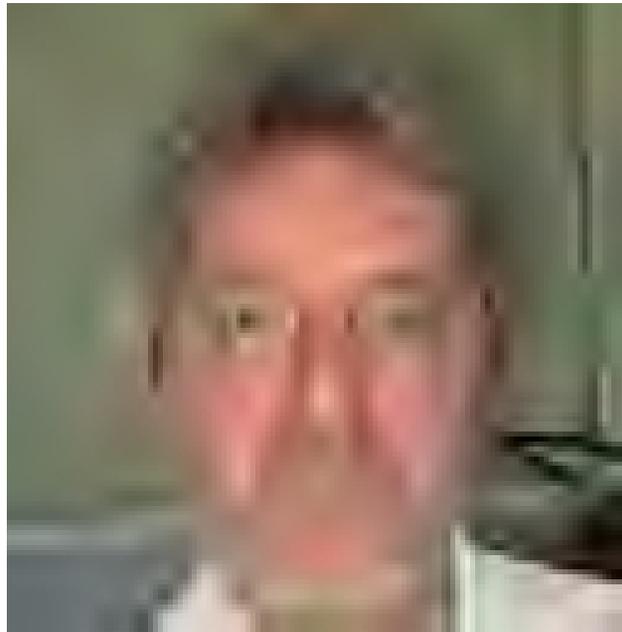
JPEG-2000

Photo d'identité

JPEG



500 octets
JPEG-2000



Bandelettes
LET IT WAVE

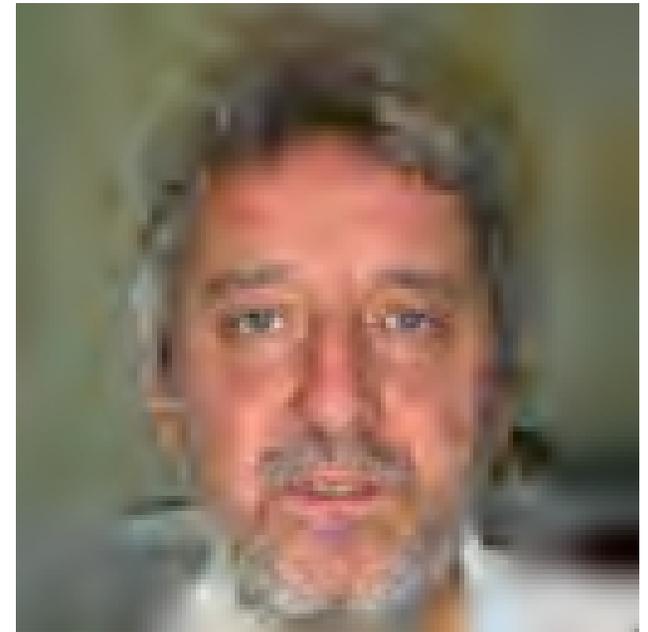
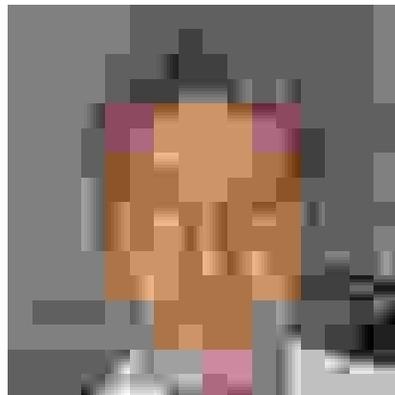


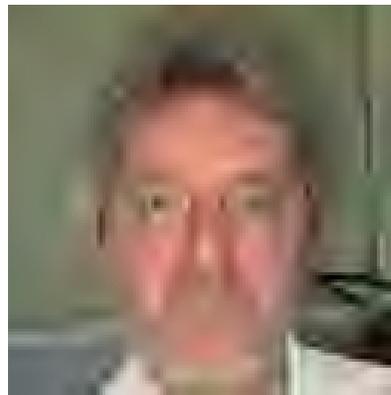
Photo d'identité

Photo d'identité

JPEG



JPEG-2000



LIW



500 octets

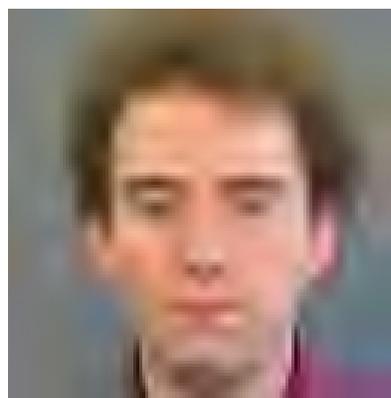
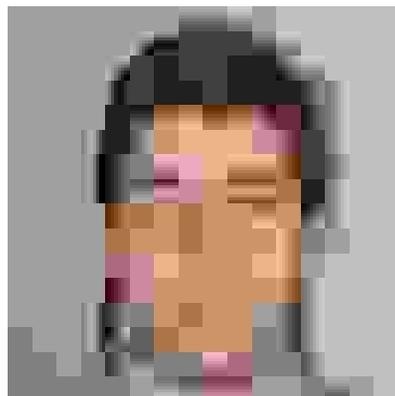


Photo d'identité

JPEG



JPEG-2000



LIW



800 octets

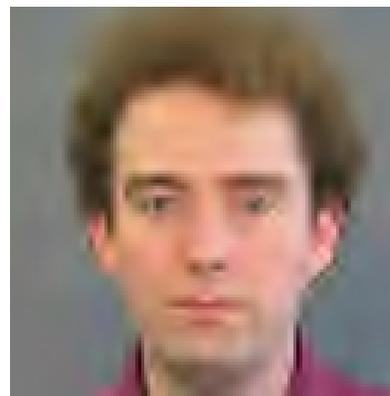


Photo d'identité

JPEG

JPEG-2000

LIW



1000 octets

Conclusion

Conclusion

- Les bandelettes permettent une représentation creuse des images dans des bases adaptées à la géométrie de celles-ci.

Conclusion

- Les bandelettes permettent une représentation creuse des images dans des bases adaptées à la géométrie de celles-ci.
- Applications pour le traitement du signal :
 - Codage d'image fixe.
 - Débruitage et restauration par seuillage.
 - Codage vidéo avec des régions.

Conclusion

- Les bandelettes permettent une représentation creuse des images dans des bases adaptées à la géométrie de celles-ci.
- Applications pour le traitement du signal :
 - Codage d'image fixe.
 - Débruitage et restauration par seuillage.
 - Codage vidéo avec des régions.
- Questions mathématiques :
 - Théorèmes d'approximation sur des espaces fonctionnels adaptés.
 - Optimalité minimax de l'estimateur pénalisé pour le débruitage.
 - Extension aux dimensions supérieures.

Conclusion

- Les bandelettes permettent une représentation creuse des images dans des bases adaptées à la géométrie de celles-ci.
- Applications pour le traitement du signal :
 - Codage d'image fixe.
 - Débruitage et restauration par seuillage.
 - Codage vidéo avec des régions.
- Questions mathématiques :
 - Théorèmes d'approximation sur des espaces fonctionnels adaptés.
 - Optimalité minimax de l'estimateur pénalisé pour le débruitage.
 - Extension aux dimensions supérieures.
- Articles :
<http://www.cmap.polytechnique.fr/~lepennec>

Conclusion

- Les bandelettes permettent une représentation creuse des images dans des bases adaptées à la géométrie de celles-ci.
- Applications pour le traitement du signal :
 - Codage d'image fixe.
 - Débruitage et restauration par seuillage.
 - Codage vidéo avec des régions.
- Questions mathématiques :
 - Théorèmes d'approximation sur des espaces fonctionnels adaptés.
 - Optimalité minimax de l'estimateur pénalisé pour le débruitage.
 - Extension aux dimensions supérieures.
- Articles :
<http://www.cmap.polytechnique.fr/~lepennec>
- Let It Wave (info@letitwave.fr) :
<http://www.letitwave.fr/>