Bandelettes et représentation géométrique des images

E. Le Pennec et S. Mallat
CMAP / École Polytechnique

Représentation géométrique des images

Représentation géométrique des images

- Représentation creuse du signal nécessaire pour le traitement du signal :
  compression, débruitage, restauration, reconnaissance de forme. . .

Représentation géométrique des images

- Représentation creuse du signal nécessaire pour le traitement du signal :
  compression, débruitage, restauration, reconnaissance de forme. . .
- Besoin de prendre en compte la géométrie pour améliorer la représentation des images.

Représentation géométrique des images

- Représentation creuse du signal nécessaire pour le traitement du signal :
  compression, débruitage, restauration, reconnaissance de forme. . .
- Besoin de prendre en compte la géométrie pour améliorer la représentation des images.
- Relier les représentations d'analyses harmoniques (ondelettes) et la géométrie.

Représentation géométrique des images

- Représentation creuse du signal nécessaire pour le traitement du signal :
  compression, débruitage, restauration, reconnaissance de forme. . .
- Besoin de prendre en compte la géométrie pour améliorer la représentation des images.
- Relier les représentations d'analyses harmoniques (ondelettes) et la géométrie.
- Entre traitement des images et vision par ordinateur : les codeurs de seconde génération.

Détection des contours

Détection des contours

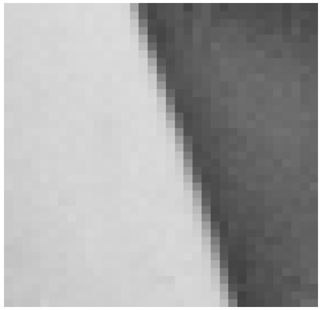
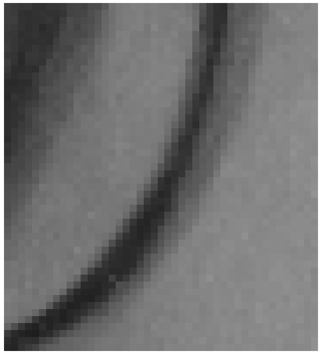
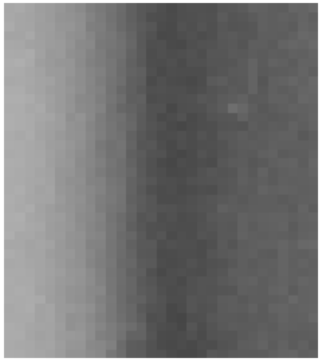
- Un problème mal posé.

Détection des contours

- Un problème mal posé.

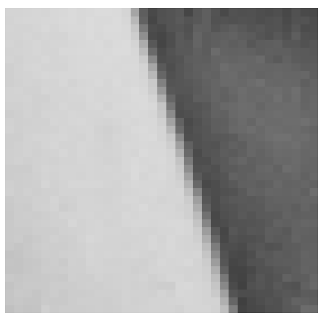
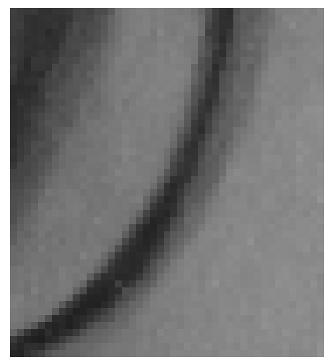
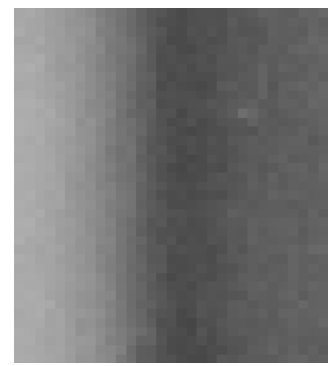
- Les contours sont des singularités lissées.

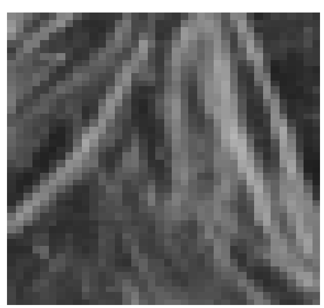
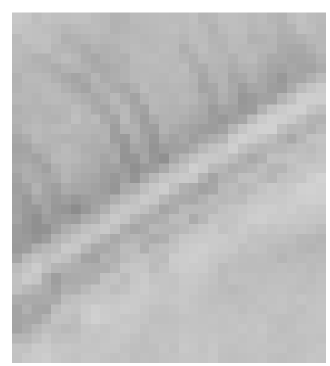
Détection des contours

- Un problème mal posé.


- Les contours sont des singularités lissées.

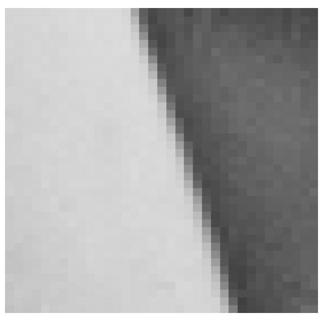
- Où sont ces contours ?

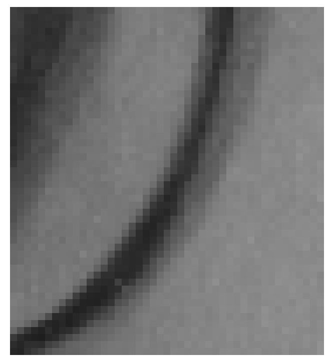



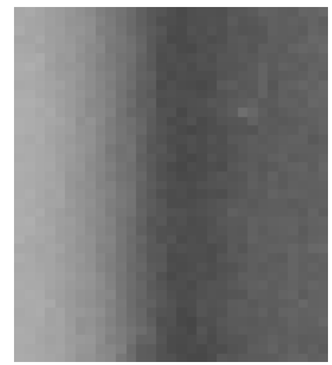
Détection des contours

- Un problème mal posé.

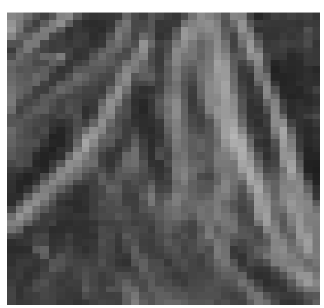
- Les contours sont des singularités lissées.

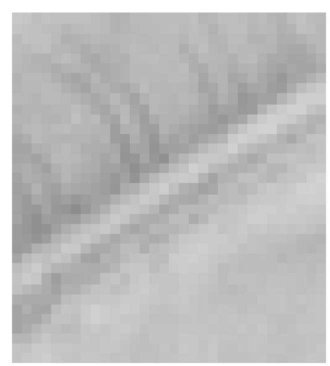






- Où sont ces contours ?





- L'estimation de la géométrie peut-elle être *bien posée* ?

Plan

Plan

- Représentation creuse et ondelettes

Plan

- Représentation creuse et ondelettes
- Bases de bandelettes adaptées à la géométrie

Plan

- Représentation creuse et ondelettes
- Bases de bandelettes adaptées à la géométrie
- Approximation non-linéaire en bandelettes

Plan

- Représentation creuse et ondelettes
- Bases de bandelettes adaptées à la géométrie
- Approximation non-linéaire en bandelettes
- Application à la compression et au débruitage

Représentation creuse

Représentation creuse

- Décomposition dans une base orthonormée $\mathcal{B} = \{g_m\}_{m \in \mathbb{N}}$

$$f = \sum_{m \in \mathbb{N}} \langle f, g_m \rangle \, g_m$$

Représentation creuse

- Décomposition dans une base orthonormée $\mathcal{B} = \{g_m\}_{m\in\mathbb{N}}$

$$f = \sum_{m\in\mathbb{N}} \langle f, g_m \rangle \, g_m$$

- Approximation avec M vecteurs choisis adaptativement

$$f_M = \sum_{m\in I_M} \langle f, g_m \rangle \, g_m$$

Représentation creuse

- Décomposition dans une base orthonormée $\mathcal{B} = \{g_m\}_{m \in \mathbb{N}}$

$$f = \sum_{m \in \mathbb{N}} \langle f, g_m \rangle \, g_m$$

- Approximation avec M vecteurs choisis adaptativement

$$f_M = \sum_{m \in I_M} \langle f, g_m \rangle \, g_m$$

- On veut minimiser $\|f - f_M\|^2 = \displaystyle\sum_{m \notin I_M} |\langle f, g_m \rangle|^2$

Représentation creuse

- Décomposition dans une base orthonormée $\mathcal{B} = \{g_m\}_{m\in\mathbb{N}}$
$$f = \sum_{m\in\mathbb{N}} \langle f, g_m\rangle \, g_m$$
- Approximation avec M vecteurs choisis adaptativement
$$f_M = \sum_{m\in I_M} \langle f, g_m\rangle \, g_m$$
- On veut minimiser $\|f - f_M\|^2 = \sum_{m\notin I_M} |\langle f, g_m\rangle|^2$
- I_M doit correspondre au M plus grands produits scalaires :
$$I_M = \{m, |\langle f, g_m\rangle| > T_M\} \text{ : seuillage}$$

Représentation creuse

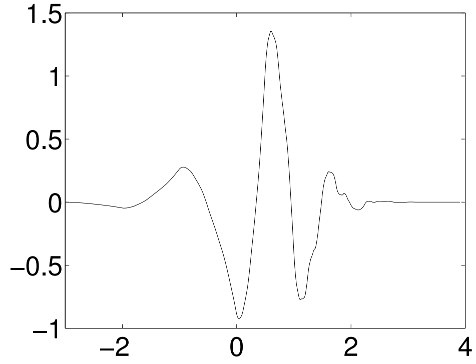
- Décomposition dans une base orthonormée $\mathcal{B} = \{g_m\}_{m\in\mathbb{N}}$
$$f = \sum_{m\in\mathbb{N}} \langle f, g_m \rangle \, g_m$$
- Approximation avec M vecteurs choisis adaptativement
$$f_M = \sum_{m\in I_M} \langle f, g_m \rangle \, g_m$$
- On veut minimiser $\|f - f_M\|^2 = \sum_{m\notin I_M} |\langle f, g_m \rangle|^2$
- I_M doit correspondre au M plus grands produits scalaires :
$$I_M = \{m, |\langle f, g_m \rangle| > T_M\} \text{ : seuillage}$$
- **Problème :** Comment choisir la base $\mathcal{B}$ pour que
$$\|f - f_M\|^2 \leqslant C M^{-\alpha} \quad \text{avec un grand } \alpha\,?$$

Ondelettes 1D

Ondelettes 1D

- Construites à partir d'une ondelette mère $\psi(x)$ dilatée par 2^j et translatée par $2^j n$

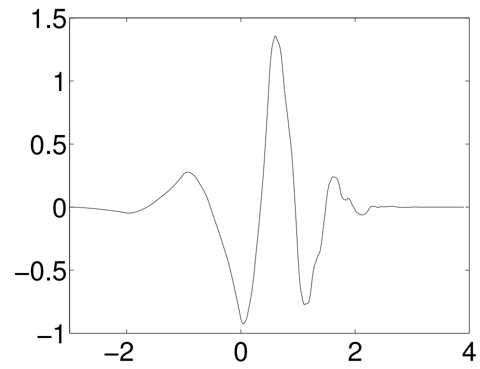
$$\psi_{j,n}(x) = \frac{1}{\sqrt{2^j}}\,\psi\left(\frac{x - 2^j n}{2^j}\right) .$$



Ondelettes 1D

- Construites à partir d'une ondelette mère $\psi(x)$ dilatée par 2^j et translatée par $2^j n$

$$\psi_{j,n}(x) = \frac{1}{\sqrt{2^j}}\,\psi\left(\frac{x - 2^j n}{2^j}\right) .$$

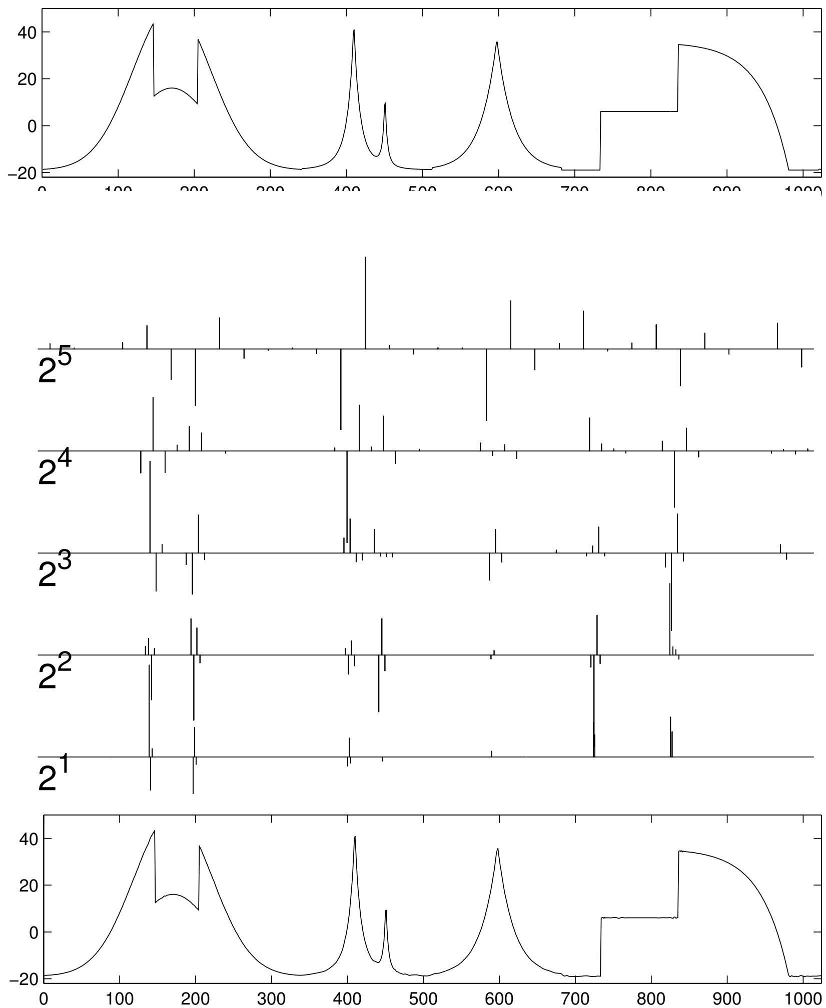


- $\mathcal{B} = \left\{\psi_{j,n}\right\}_{j\in\mathbb{N}\,,\,2^j n\in[0,1)}$ est une base orthonormée de $L^2([0,1])$.

Approximation non-linéaire en ondelettes

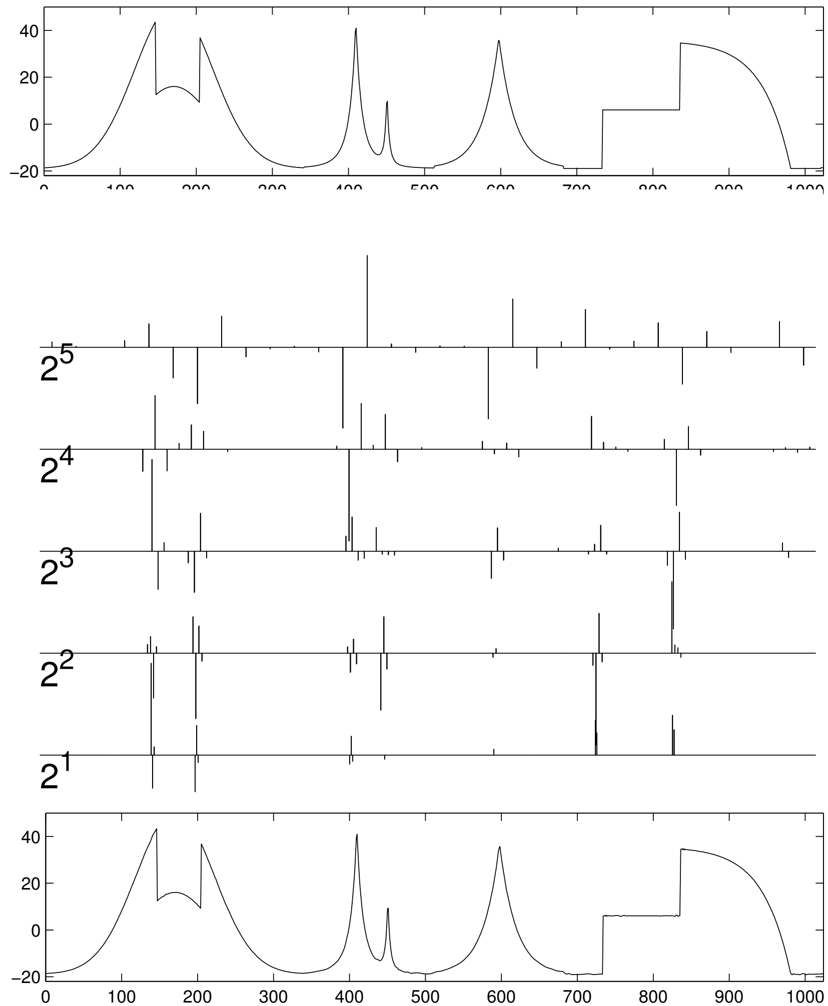
Approximation non-linéaire en ondelettes

- Approximation d'un signal régulier par morceaux :



Approximation non-linéaire en ondelettes

- Approximation d'un signal régulier par morceaux :



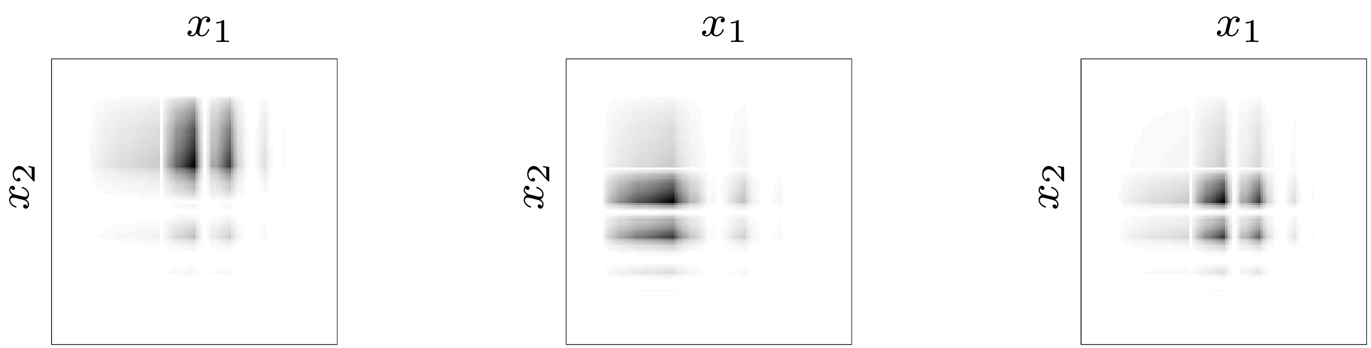
- $\|f - f_M\|^2 = O(M^{-2\alpha})$ où α est la régularité lipschitzienne entre les singularités.

Ondelettes 2D

Ondelettes 2D

- Construites à partir de 3 ondelettes $\psi^k(x_1, x_2)$ avec $k = 1, 2, 3$ dilatées par 2^j et translatées par $2^j(n_1, n_2)$

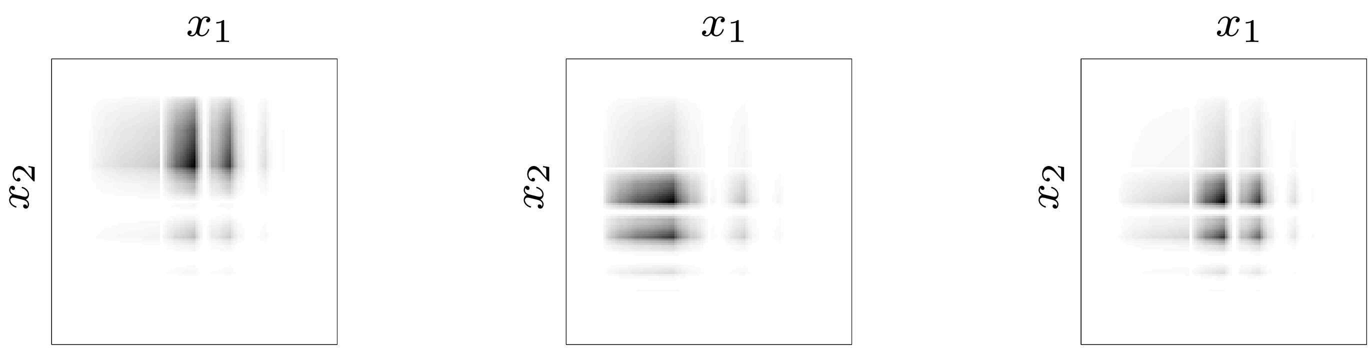
$$\psi^k_{j,n}(x_1, x_2) = \frac{1}{2^j}\,\psi^k\left(\frac{x_1 - 2^j n_1}{2^j}, \frac{x_2 - 2^j n_1}{2^j}\right) .$$



Ondelettes 2D

- Construites à partir de 3 ondelettes $\psi^k(x_1, x_2)$ avec $k = 1, 2, 3$ dilatées par 2^j et translatées par $2^j(n_1, n_2)$

$$\psi^k_{j,n}(x_1, x_2) = \frac{1}{2^j}\,\psi^k\left(\frac{x_1 - 2^j n_1}{2^j}, \frac{x_2 - 2^j n_1}{2^j}\right) .$$

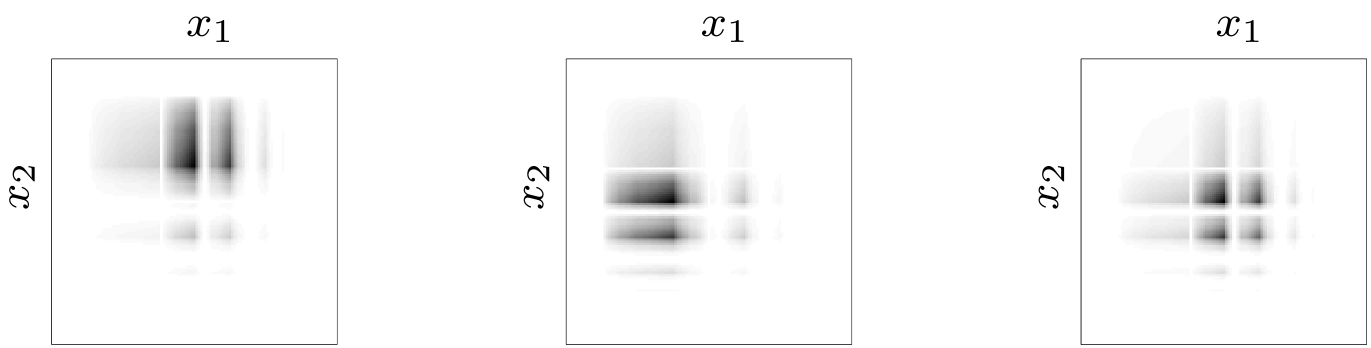


- $\mathcal{B} = \left\{\psi^k_{j,n}\right\}_{j\in\mathbb{N}\,,\,2^j n\in[0,1)^2\,,\,1\leqslant k\leqslant 3}$ est une base orthonormée de $L^2([0,1]^2)$.

Ondelettes 2D

- Construites à partir de 3 ondelettes $\psi^k(x_1, x_2)$ avec $k = 1, 2, 3$ dilatées par 2^j et translatées par $2^j(n_1, n_2)$

$$\psi^k_{j,n}(x_1, x_2) = \frac{1}{2^j}\, \psi^k\left(\frac{x_1 - 2^j n_1}{2^j}, \frac{x_2 - 2^j n_1}{2^j}\right) .$$



- $\mathcal{B} = \left\{\psi^k_{j,n}\right\}_{j\in\mathbb{N}\,,\, 2^j n\in[0,1)^2\,,\, 1\leqslant k\leqslant 3}$ est une base orthonormée de $L^2([0,1]^2)$.
- Ondelettes *isotropes*.

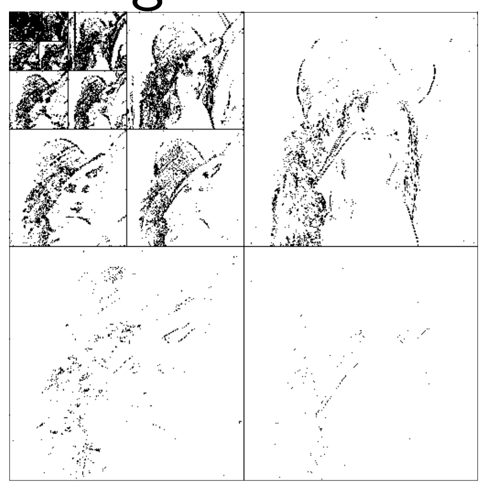
Succès et échecs des ondelettes

Succès et échecs des ondelettes

- Les images sont représentées dans une base d'ondelettes bidimensionnelles et les plus grands coefficients sont conservés (JPEG2000).

f

M coefficients significatifs



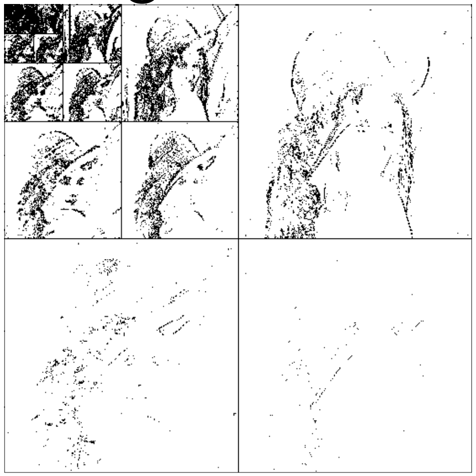
f_M

Succès et échecs des ondelettes

- Les images sont représentées dans une base d'ondelettes bidimensionnelles et les plus grands coefficients sont conservés (JPEG2000).

f

M coefficients significatifs



f_M

- Ne tient pas en compte la géométrie.

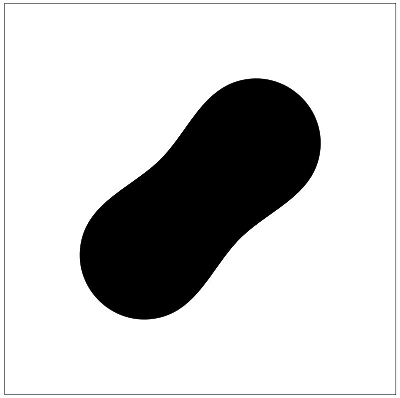
Utilisation de la géométrie

Utilisation de la géométrie

- La plupart des contours des images sont des courbes régulières.

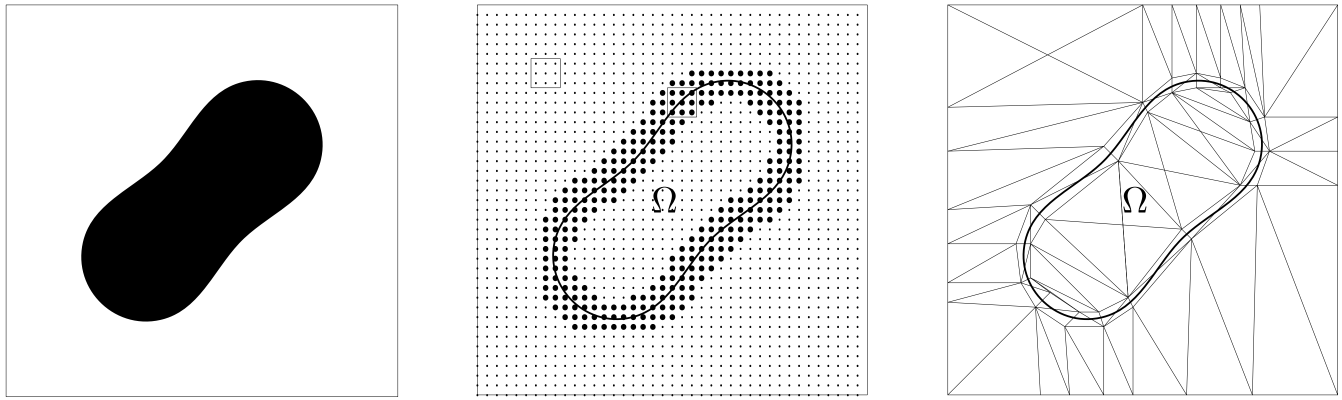
Utilisation de la géométrie

- La plupart des contours des images sont des courbes régulières.
- Exemple : $f = \mathbb{1}_\Omega$ où la frontière $\partial\Omega$ est régulière ($\mathcal{C}^\alpha$ avec $\alpha \geqslant 2$).



Utilisation de la géométrie

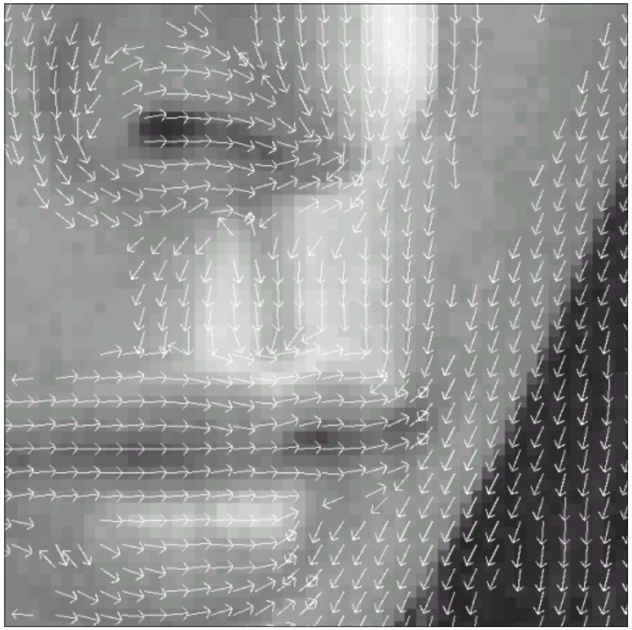
- La plupart des contours des images sont des courbes régulières.
- Exemple : $f = \mathbb{1}_\Omega$ où la frontière $\partial\Omega$ est régulière ($\mathcal{C}^\alpha$ avec $\alpha \geqslant 2$).

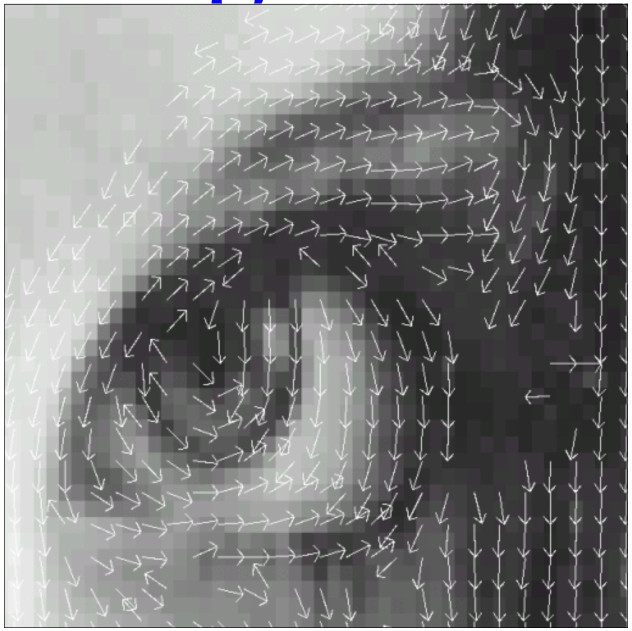


- Approximations :
  - avec M ondelettes : $\|f - f_M\|^2 \leqslant C\, M^{-1}$,
  - linéaire par morceaux avec M triangles : $\|f - f_M\|^2 \leqslant C\, M^{-2}$,
  - linéaire par morceaux avec M éléments géométriques d'ordre plus élevé : $\|f - f_M\|^2 \leqslant C\, M^{-\alpha}$,
  - avec M curvelets ($Candes,\ Donoho$) : $\|f - f_M\|^2 \leqslant C\,(\log M)\, M^{-2}$,
  - avec M coefficients dans une décomposition adaptée aux contours ($Cohen,\ Matei$) : $\|f - f_M\|^2 \leqslant C\, M^{-2}$

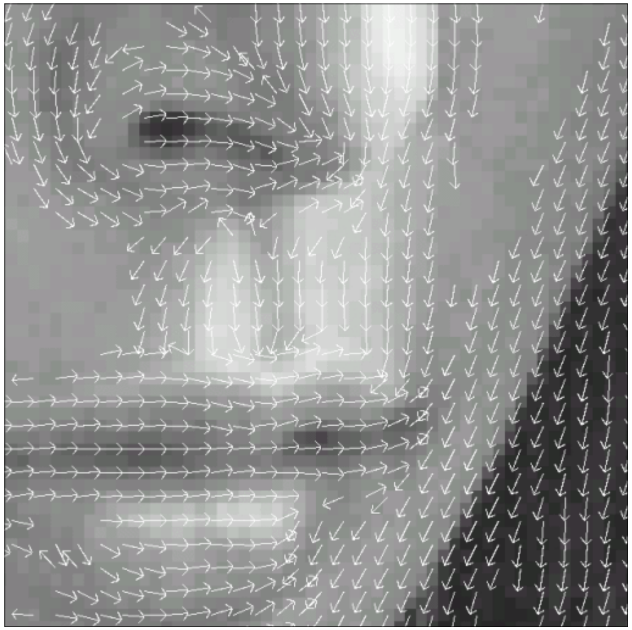
Représentation du flot géométrique

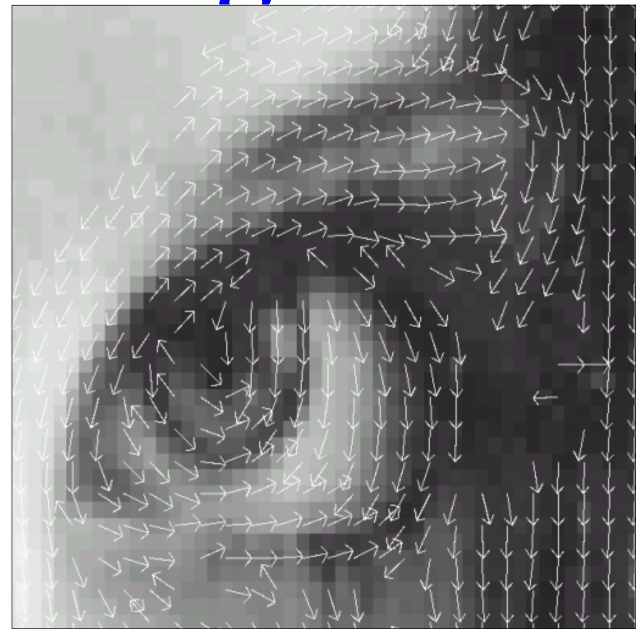
Représentation du flot géométrique





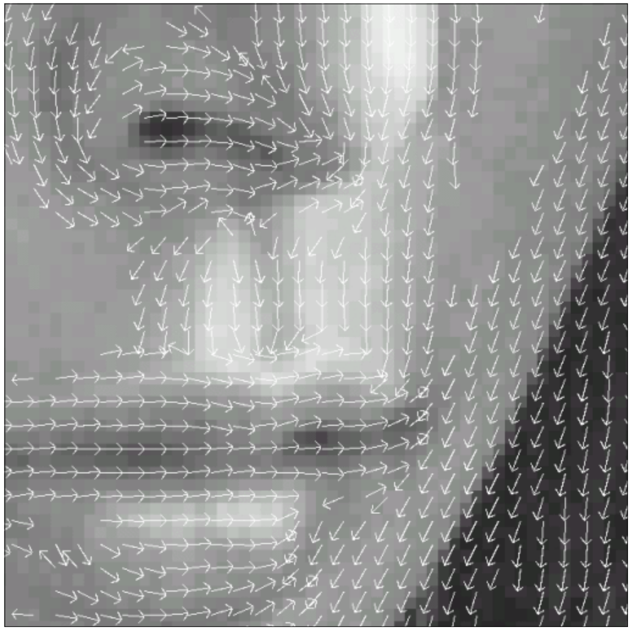
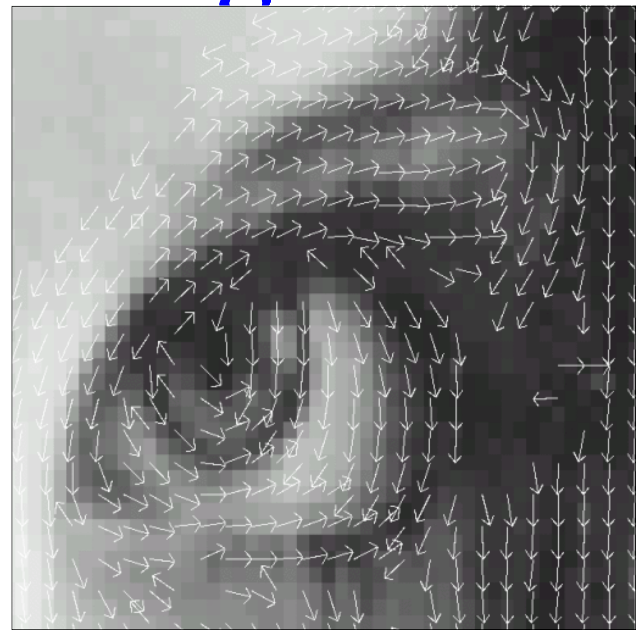
Représentation du flot géométrique





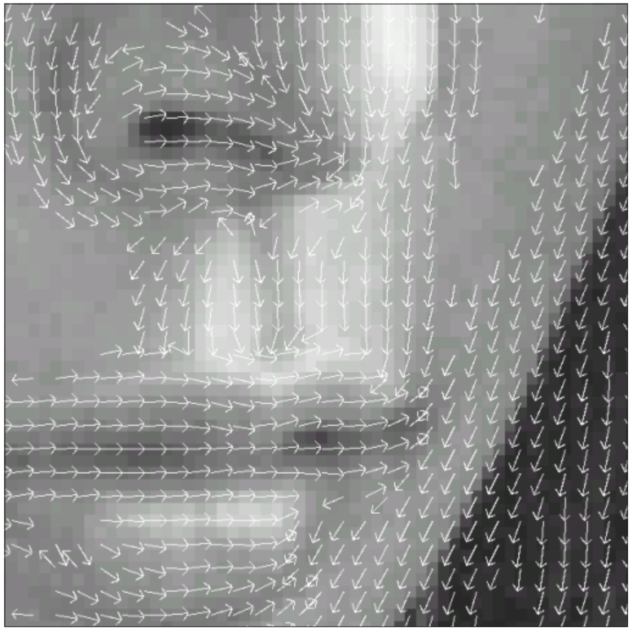
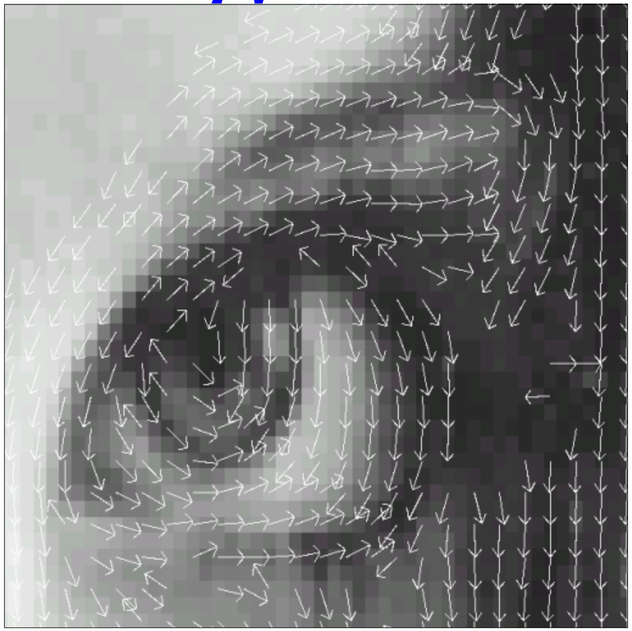
- Représentation :

Représentation du flot géométrique

- Représentation :
  - Flot géométrique : directions de régularité locale.
  - Base adaptée au lignes de flots

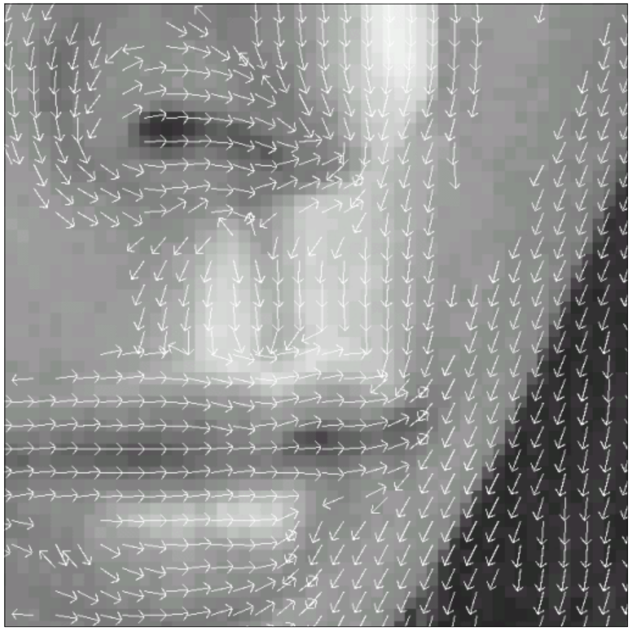
Représentation du flot géométrique

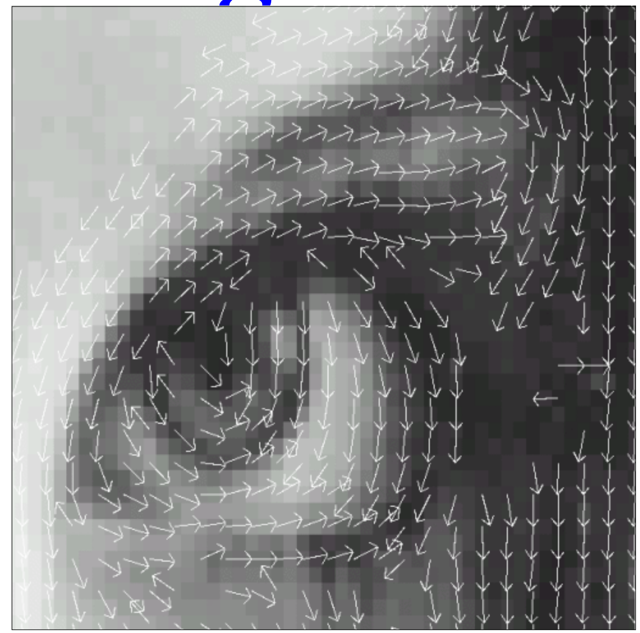
 

- Représentation :
  - Flot géométrique : directions de régularité locale.
  - Base adaptée au lignes de flots

Creux

Représentation du flot géométrique



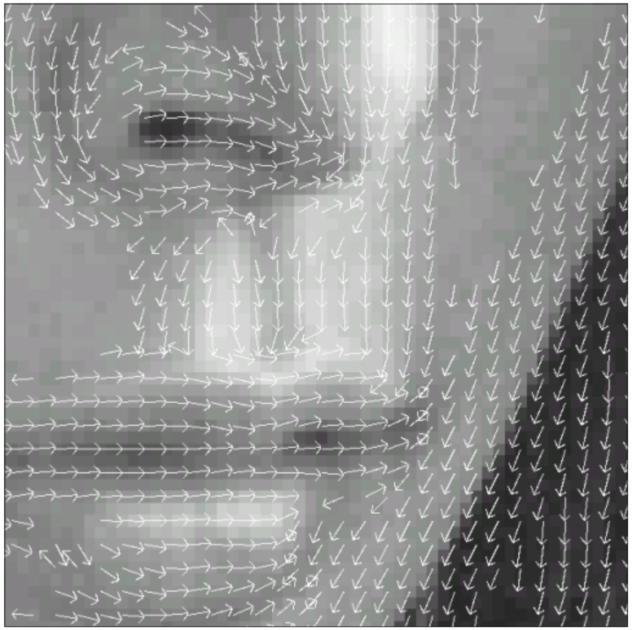


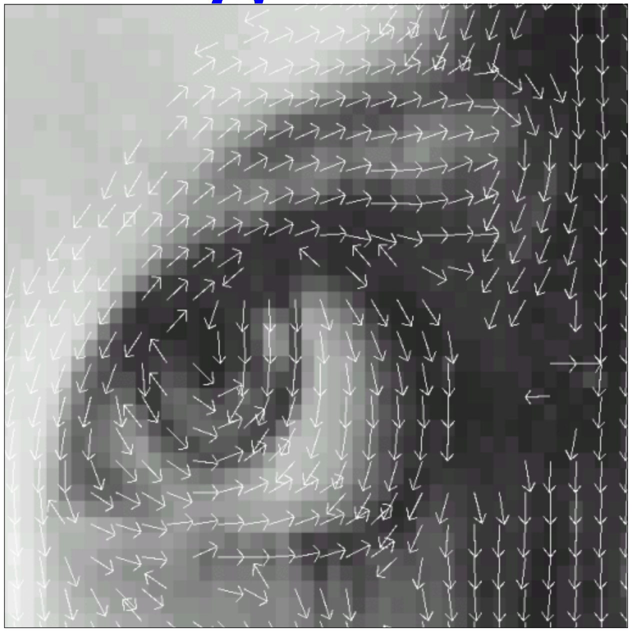
- Représentation :
  - Flot géométrique : directions de régularité locale.
  - Base adaptée au lignes de flots

$\left.\right\}$ Creux

- Un flot régulier par morceaux :

Représentation du flot géométrique

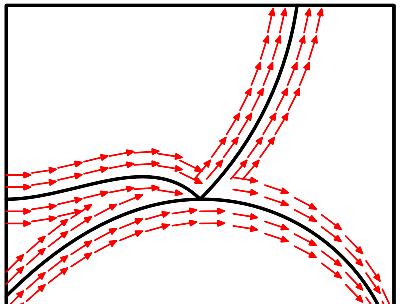




- Représentation :
  - Flot géométrique : directions de régularité locale.
  - Base adaptée au lignes de flots

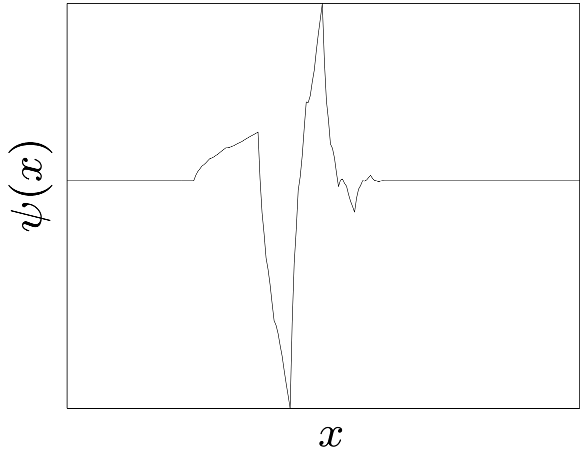
  } Creux

- Un flot régulier par morceaux :
  - Calcul du flot stabilisé.
  - Représentation avec peu de coefficients.
  - Prise en compte des jonctions.



Ondelettes anisotropes

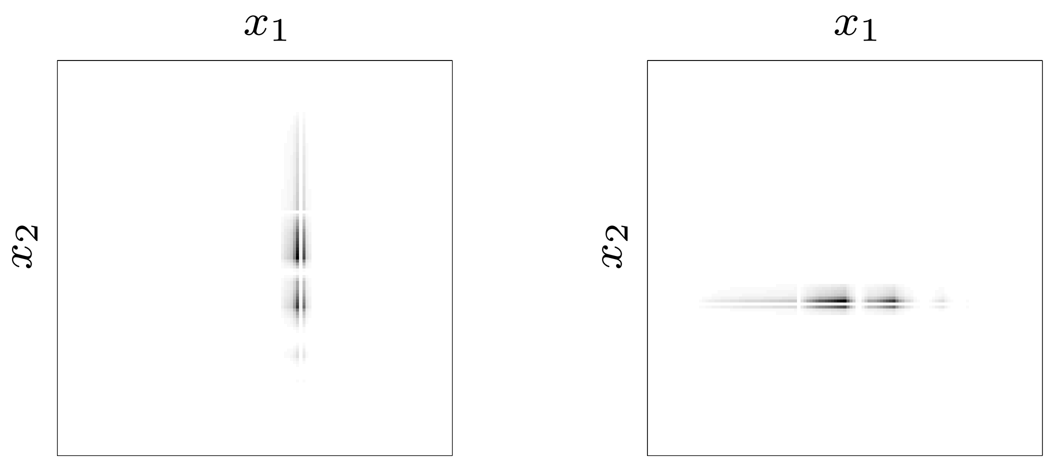
Ondelettes anisotropes



- Base d'ondelettes 1D :

$$\{\psi_{j,n}(x) = 2^{-j/2}\psi(2^{-j}(x - 2^j n))\}_{j\in\mathbb{Z}, 2^j n\in[0,1]} \ .$$

Ondelettes anisotropes



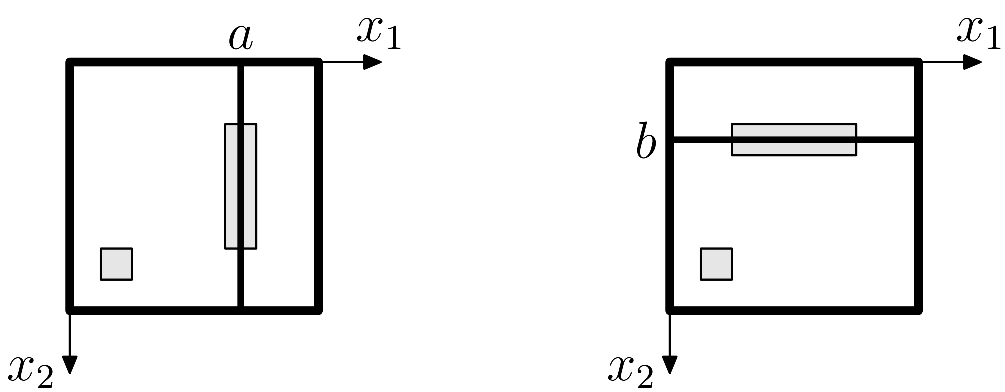
- Base d'ondelettes 1D :

$$\{\psi_{j,n}(x) = 2^{-j/2}\psi(2^{-j}(x - 2^j n))\}_{j\in\mathbb{Z}, 2^j n\in[0,1]} \ .$$

- Base d'*ondelettes anisotropes* : produit tensoriel de base 1D

$$\{\psi_{j_1,n_1}(x_1)\,\psi_{j_2,n_2}(x_2)\}_{j_1,n_1,j_2,n_2} \ .$$

Ondelettes anisotropes



- Base d'ondelettes 1D :

$$\{\psi_{j,n}(x) = 2^{-j/2}\psi(2^{-j}(x - 2^j n))\}_{j\in\mathbb{Z}, 2^j n \in [0,1]} \ .$$

- Base d'*ondelettes anisotropes* : produit tensoriel de base 1D

$$\{\psi_{j_1,n_1}(x_1)\, \psi_{j_2,n_2}(x_2)\}_{j_1,n_1,j_2,n_2} \ .$$

- **Théorème :** Si $f(x_1,x_2)$ est $\mathcal{C}^\alpha$ pour $x_1 < a$ et $x_1 > a$ ou pour $x_2 < b$ et $x_2 > b$ alors que $f_s = f$ ou $f_s = g_s \star f$ son approximation $f_{s,M}$ avec M ondelettes anisotropes satisfait

$$\|f_s - f_{s,M}\|^2 \leqslant C\, M^{-\alpha} \ .$$

Flot géométrique horizontal ou vertical

Flot géométrique horizontal ou vertical

- Sur une région, le flot géométrique est un champ de vecteur parallèle $\vec{\tau}(x_1, x_2)$:

$$\vec{\tau}(x_1, x_2) = \vec{\tau}(x_2) \quad \text{ou} \quad \vec{\tau}(x_1, x_2) = \vec{\tau}(x_1)$$

qui minimise

$$\int_\Omega \left| \nabla f(x_1, x_2) \,.\, \vec{\tau}(x_1, x_2) \right|^2 \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 = \int_\Omega \left| \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial \vec{\tau}(x_1, x_2)} \right|^2 \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 \ .$$

Flot géométrique horizontal ou vertical

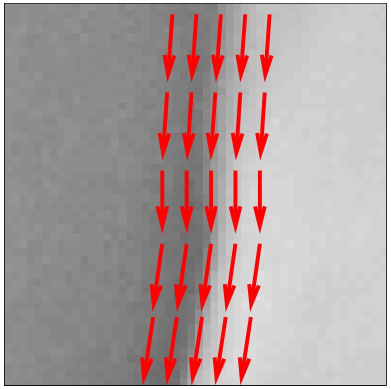
- Sur une région, le flot géométrique est un champ de vecteur parallèle $\vec{\tau}(x_1, x_2)$:

$$\vec{\tau}(x_1, x_2) = \vec{\tau}(x_2) \quad \text{ou} \quad \vec{\tau}(x_1, x_2) = \vec{\tau}(x_1)$$

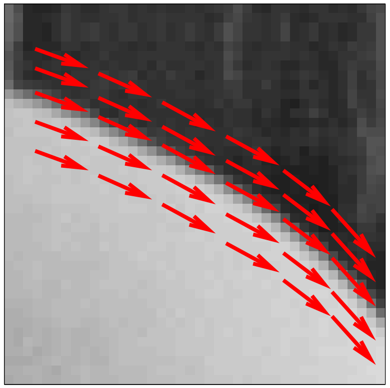
qui minimise

$$\int_\Omega \left| \nabla f(x_1, x_2) \, . \, \vec{\tau}(x_1, x_2) \right|^2 \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 = \int_\Omega \left| \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial \vec{\tau}(x_1, x_2)} \right|^2 \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 \ .$$

$\vec{\tau}(x_1, x_2) = \vec{\tau}(x_2)$



$\vec{\tau}(x_1, x_2) = \vec{\tau}(x_1)$



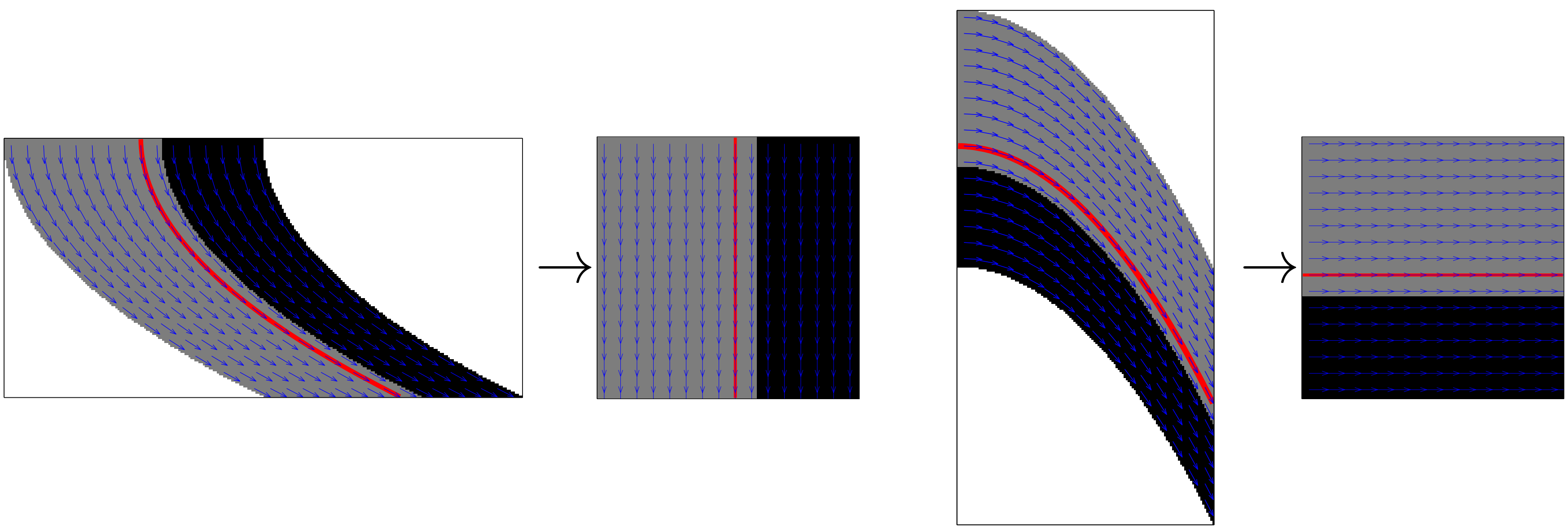
Flots, courbes et déformation

Flots, courbes et déformation

- Soit $x_1 = c(x_2)$ une courbe intégrale du flot $\vec{\tau}(x_1, x_2) = \vec{\tau}(x_2)$. L'image $f_c(x_1, x_2) = f(x_1 + c(x_2), x_2)$ admet un flot strictement vertical.

Flots, courbes et déformation

- Soit $x_1 = c(x_2)$ une courbe intégrale du flot $\vec{\tau}(x_1, x_2) = \vec{\tau}(x_2)$. L'image $f_c(x_1, x_2) = f(x_1 + c(x_2), x_2)$ admet un flot strictement vertical.
- Soit $x_2 = c(x_1)$ une courbe intégrale du flot $\vec{\tau}(x_1, x_2) = \vec{\tau}(x_1)$. L'image $f_c(x_1, x_2) = f(x_1, x_2 + c(x_1))$ admet un flot strictement horizontal.



Bandelettes

Bandelettes

- Décomposer $f(x_1 + c(x_2), x_2)$ dans une base orthogonale d'ondelettes isotropes

$$\{\psi_{j_1,n_1}(x_1)\,\psi_{j_2,n_2}(x_2)\}_{j_1,j_2,n_1,n_2}$$

est équivalent à décomposer $f(x_1, x_2)$ dans une base orthogonale de *bandelettes*

$$\{\psi_{j_1,n_1}(x_1 - c(x_2))\,\psi_{j_2,n_2}(x_2)\}_{j_1,j_2,n_1,n_2}\ .$$

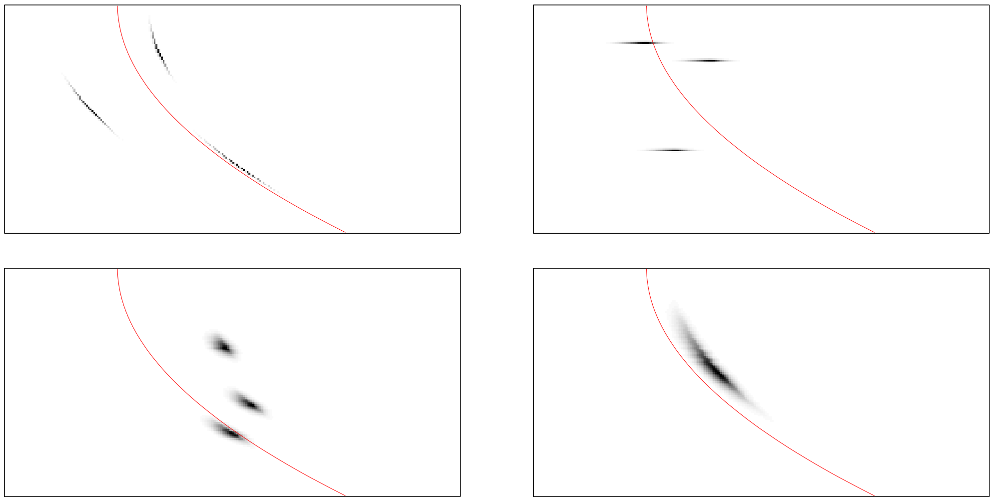
Bandelettes

- Décomposer $f(x_1 + c(x_2), x_2)$ dans une base orthogonale d'ondelettes isotropes

$$\{\psi_{j_1,n_1}(x_1)\,\psi_{j_2,n_2}(x_2)\}_{j_1,j_2,n_1,n_2}$$

est équivalent à décomposer $f(x_1, x_2)$ dans une base orthogonale de *bandelettes*

$$\{\psi_{j_1,n_1}(x_1 - c(x_2))\,\psi_{j_2,n_2}(x_2)\}_{j_1,j_2,n_1,n_2}\ .$$



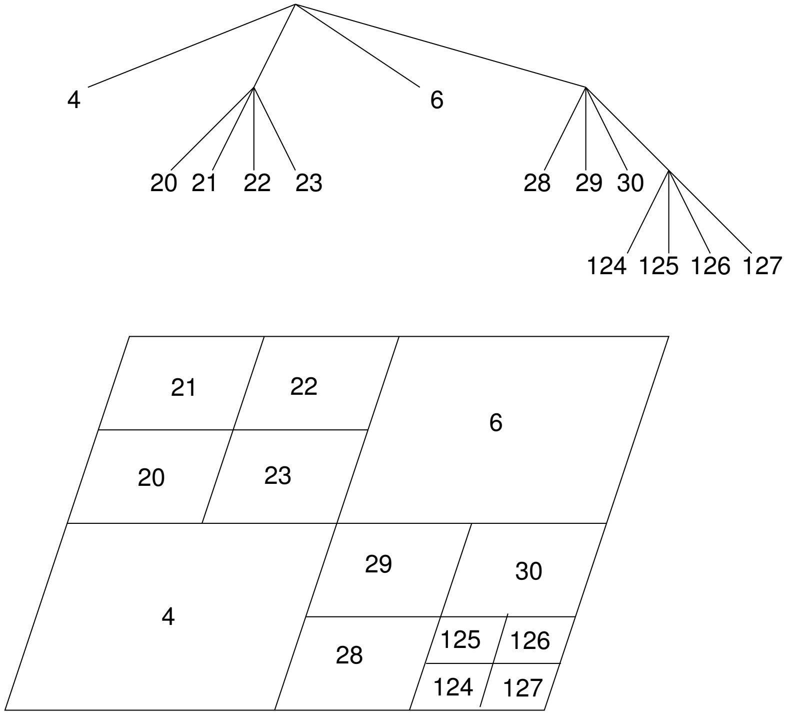
Segmentation géométrique des images

Segmentation géométrique des images

- L'image est segmentée en carrés dyadiques

Segmentation géométrique des images

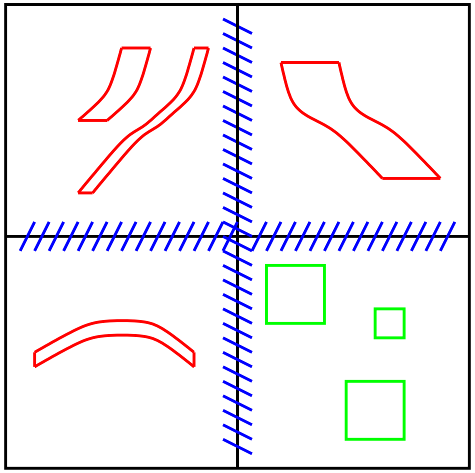
- L'image est segmentée en carrés dyadiques avec soit :
  - un flot horizontal
  - un flot vertical
  - une régularité isotrope



Bandelettes pour les images segmentées

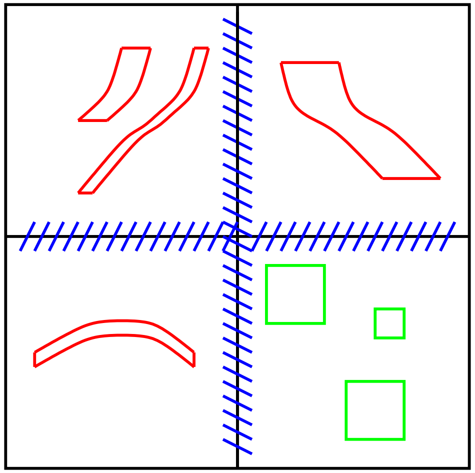
Bandelettes pour les images segmentées

- Construction d'une base ou d'un frame de $L^2[0,1]^2$ avec :
  - des bandelettes suivant le flot géométriques dans les régions,
  - des ondelettes déformées aux frontières.



Bandelettes pour les images segmentées

- Construction d'une base ou d'un frame de $L^2[0,1]^2$ avec :
  - des bandelettes suivant le flot géométriques dans les régions,
  - des ondelettes déformées aux frontières.



- 3 constructions :
  - Une base orthogonale de $L^2[0,1]^2$ avec des ondelettes déformées discontinues dont le support reste dans les régions.
  - Un frame de $L^2[0,1]^2$ avec des ondelettes déformées régulières dont le support traverse les fontières.
  - Une base de $L^2[0,1]^2$ avec des ondelettes déformées

Calcul de la paramétrisation du flot

Calcul de la paramétrisation du flot

- Le flot horizontal $\vec{\tau}(x_1, x_2) = (1, c'(x_1))$ dans un carré Ω de longueur L calculé à l'échelle 2^l sous la forme $c'(x) = \sum_{n=1}^{L2^{-l}} \alpha_n \, \phi(2^l x - n)$ en trouvant les $L\,2^{-l}$ paramètres α_n qui minimisent

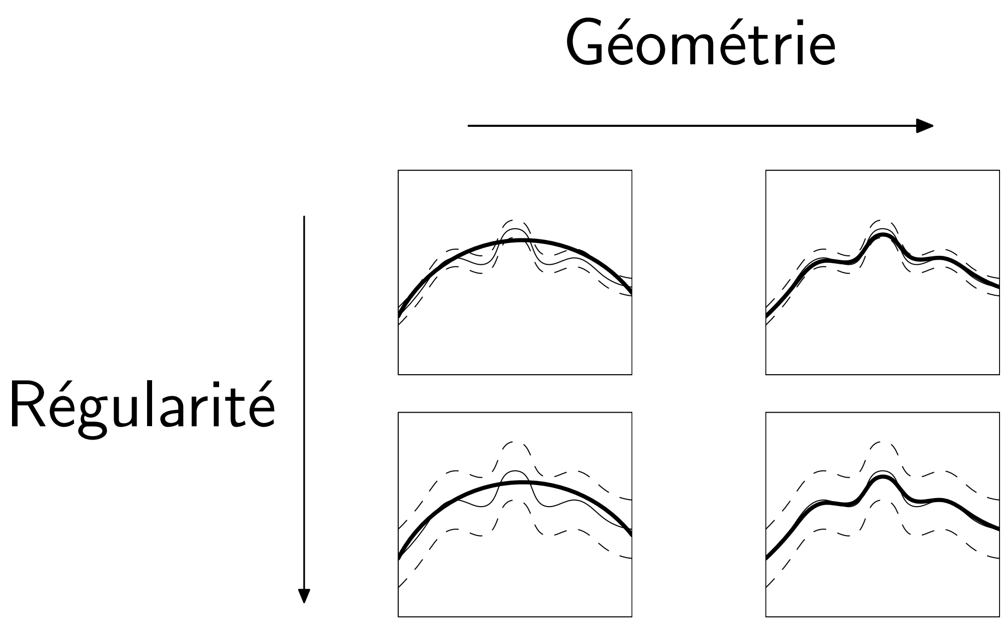
$$\int_\Omega \Big| \nabla f(x_1, x_2) \,.\, \vec{\tau}(x_1, x_2) \Big|^2 \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 \ .$$

Calcul de la paramétrisation du flot

- Le flot horizontal $\vec{\tau}(x_1,x_2) = (1, c'(x_1))$ dans un carré Ω de longueur L calculé à l'échelle 2^l sous la forme $c'(x) = \sum_{n=1}^{L2^{-l}} \alpha_n \, \phi(2^l x - n)$ en trouvant les $L\,2^{-l}$ paramètres α_n qui minimisent
$$\int_\Omega \left| \nabla f(x_1,x_2) \,.\, \vec{\tau}(x_1,x_2) \right|^2 \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 \ .$$
- Adaptation de l'échelle 2^l à la régularité du signal le long du flot

Calcul de la paramétrisation du flot

- Le flot horizontal $\vec{\tau}(x_1, x_2) = (1, c'(x_1))$ dans un carré Ω de longueur L calculé à l'échelle 2^l sous la forme $c'(x) = \sum_{n=1}^{L2^{-l}} \alpha_n \, \phi(2^l x - n)$ en trouvant les $L\,2^{-l}$ paramètres α_n qui minimisent
$$\int_\Omega \left| \nabla f(x_1, x_2) \, . \, \vec{\tau}(x_1, x_2) \right|^2 \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 \; .$$
- Adaptation de l'échelle 2^l à la régularité du signal le long du flot

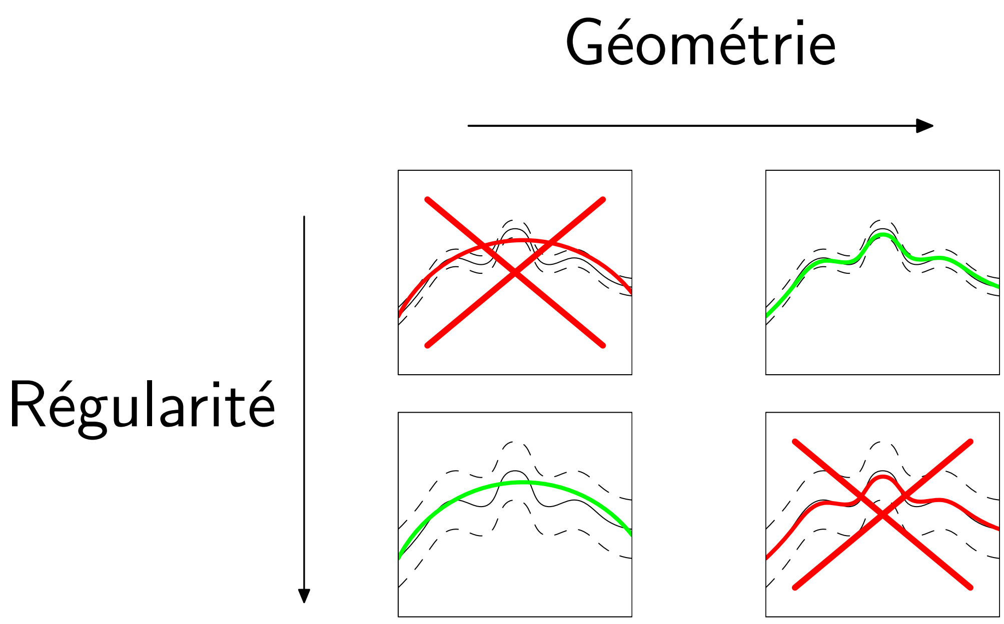


Calcul de la paramétrisation du flot

- Le flot horizontal $\vec{\tau}(x_1, x_2) = (1, c'(x_1))$ dans un carré Ω de longueur L calculé à l'échelle 2^l sous la forme $c'(x) = \sum_{n=1}^{L2^{-l}} \alpha_n \, \phi(2^l x - n)$ en trouvant les $L\,2^{-l}$ paramètres α_n qui minimisent

$$\int_\Omega \left| \nabla f(x_1, x_2) \, . \, \vec{\tau}(x_1, x_2) \right|^2 \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 \; .$$

- Adaptation de l'échelle 2^l à la régularité du signal le long du flot



Approximation M-termes

Approximation M-termes

- L'approximation f_M en bandelettes d'une image est définie par :

Approximation M-termes

- L'approximation f_M en bandelettes d'une image est définie par :
  - une partition en carrés dyadiques, représentée par les M_s noeud intérieur de l'arbre quaternaire de la segmentation,

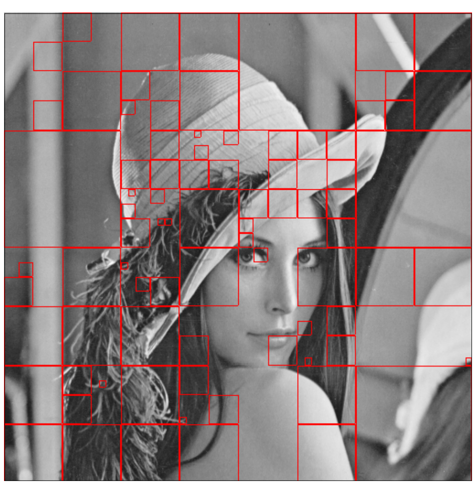
Approximation M-termes

- L'approximation f_M en bandelettes d'une image est définie par :
  - une partition en carrés dyadiques, représentée par les M_s noeud intérieur de l'arbre quaternaire de la segmentation,
  - dans chaque carré Ω_i de la segmentation par
    - $M_{g,i}$ coefficients du flot géométrique.
    - $M_{b,i}$ coefficients de bandelettes au dessus d'un seuil T.

Approximation M-termes

- L'approximation f_M en bandelettes d'une image est définie par :
  - une partition en carrés dyadiques, représentée par les M_s noeud intérieur de l'arbre quaternaire de la segmentation,
  - dans chaque carré Ω_i de la segmentation par
    - $M_{g,i}$ coefficients du flot géométrique.
    - $M_{b,i}$ coefficients de bandelettes au dessus d'un seuil T.
- Nombre total de paramètres :

$$M = M_s + \sum_i \Big(M_{b,i} + M_{g,i} \Big) \; .$$

Optimisation de l'approximation

Optimisation de l'approximation

- Minimiser $\|f - f_M\|^2$ pour un nombre M de paramètres.

Optimisation de l'approximation

- Minimiser $\|f - f_M\|^2$ pour un nombre M de paramètres.
- Approche Lagrangienne : recherche de la meilleure segmentation et du meilleur flot qui minimisent

$$\|f - f_M\|^2 + T^2\, M \ .$$

Optimisation de l'approximation

- Minimiser $\|f - f_M\|^2$ pour un nombre M de paramètres.
- Approche Lagrangienne : recherche de la meilleure segmentation et du meilleur flot qui minimisent

$$\|f - f_M\|^2 + T^2 \, M \ .$$

- Algorithme rapide (CART) : programmation dynamique de bas en haut de la segmentation en arbre quaternaire.

Optimisation de l'approximation

- Minimiser $\|f - f_M\|^2$ pour un nombre M de paramètres.
- Approche Lagrangienne : recherche de la meilleure segmentation et du meilleur flot qui minimisent

$$\|f - f_M\|^2 + T^2\, M \ .$$

- Algorithme rapide (CART) : programmation dynamique de bas en haut de la segmentation en arbre quaternaire.
- Complexité : $O(N\,(\log N)^2)$ pour N pixels.

Approximation non-linéaire

Approximation non-linéaire

- **Théorème :** Soit f une fonction $\mathcal{C}^\alpha$ en dehors d'un ensemble de courbes elles-même $\mathcal{C}^\alpha$, l'approximation $f_{s,M}$ de $f_s = g_s \star f$ avec M coefficients satisfait

$$\|f_s - f_{s,M}\|^2 \leqslant C\, M^{-\alpha}\ .$$

Approximation non-linéaire

- **Théorème :** Soit f une fonction $\mathcal{C}^\alpha$ en dehors d'un ensemble de courbes elles-même $\mathcal{C}^\alpha$, l'approximation $f_{s,M}$ de $f_s = g_s \star f$ avec M coefficients satisfait

$$\|f_s - f_{s,M}\|^2 \leqslant C\, M^{-\alpha} \ .$$

- Régularité α inconnue.

Approximation non-linéaire

- **Théorème :** Soit f une fonction $\mathcal{C}^\alpha$ en dehors d'un ensemble de courbes elles-même $\mathcal{C}^\alpha$, l'approximation $f_{s,M}$ de $f_s = g_s \star f$ avec M coefficients satisfait

$$\|f_s - f_{s,M}\|^2 \leqslant C\, M^{-\alpha} \ .$$

- Régularité α inconnue.
- Noyau de lissage g_s inconnu.

Approximation non-linéaire

- **Théorème :** Soit f une fonction $\mathcal{C}^\alpha$ en dehors d'un ensemble de courbes elles-même $\mathcal{C}^\alpha$, l'approximation $f_{s,M}$ de $f_s = g_s \star f$ avec M coefficients satisfait

$$\|f_s - f_{s,M}\|^2 \leqslant C\, M^{-\alpha} \ .$$

- Régularité α inconnue.
- Noyau de lissage g_s inconnu.
- Amélioration par rapport :
  - aux ondelettes : $\|f_s - f_{s,M}\|^2 \leqslant C\, M^{-1}$,
  - aux *curvelets* : $\|f_s - f_{s,M}\|^2 \leqslant C\, (\log M)\, M^{-2}$.

Approximation non-linéaire

- **Théorème :** Soit f une fonction $\mathcal{C}^\alpha$ en dehors d'un ensemble de courbes elles-même $\mathcal{C}^\alpha$, l'approximation $f_{s,M}$ de $f_s = g_s \star f$ avec M coefficients satisfait

$$\|f_s - f_{s,M}\|^2 \leqslant C\, M^{-\alpha} \ .$$

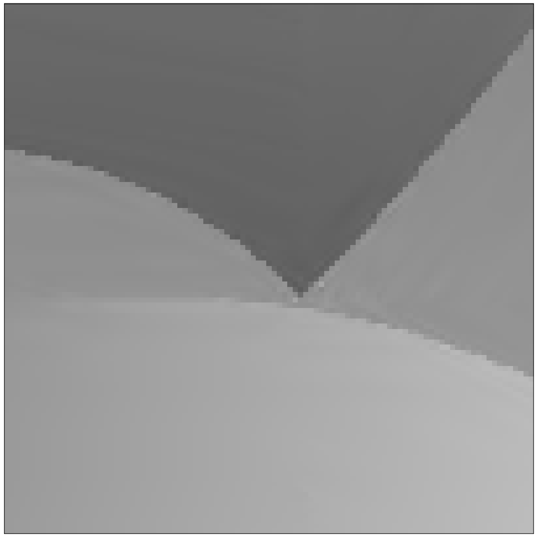
- Régularité α inconnue.
- Noyau de lissage g_s inconnu.
- Amélioration par rapport :
  - aux ondelettes : $\|f_s - f_{s,M}\|^2 \leqslant C\, M^{-1}$,
  - aux *curvelets* : $\|f_s - f_{s,M}\|^2 \leqslant C\, (\log M)\, M^{-2}$.
- Optimalité pour la classe des fonctions étoilées de Donoho

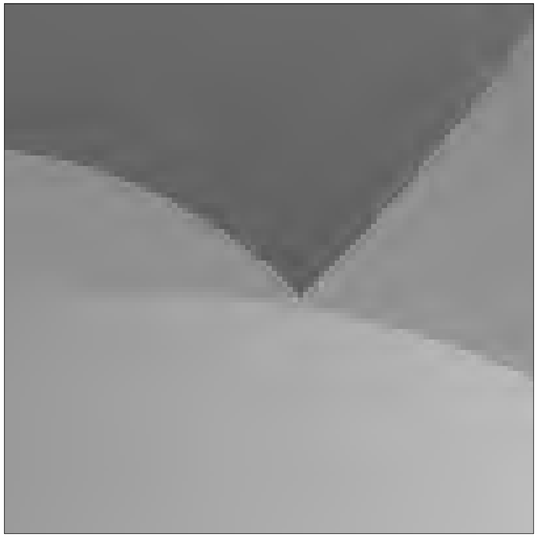
Image régulière par morceaux

Image régulière par morceaux

PSNR $= 50{,}15\,$dB | PSNR $= 45{,}73\,$dB

$M = 2370$ Bandelettes | Ondelettes

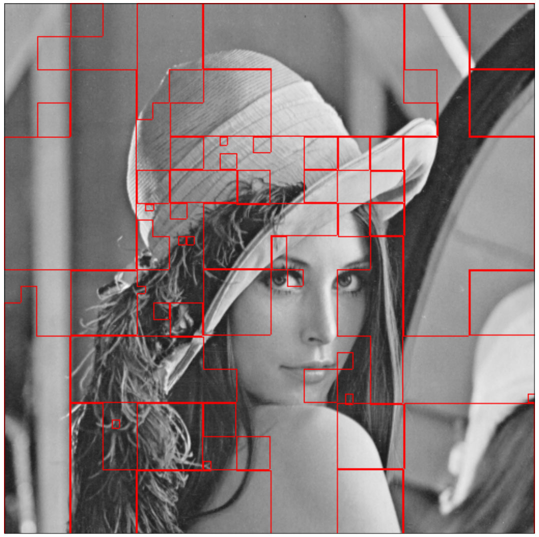




Approximation

Approximation

Originale



Bandelettes (35.04 dB)

$M = 11516$

Ondelettes ($34{,}64$ dB)

Cosinus par blocs ($33{,}51$ dB)

Approximation

Originale

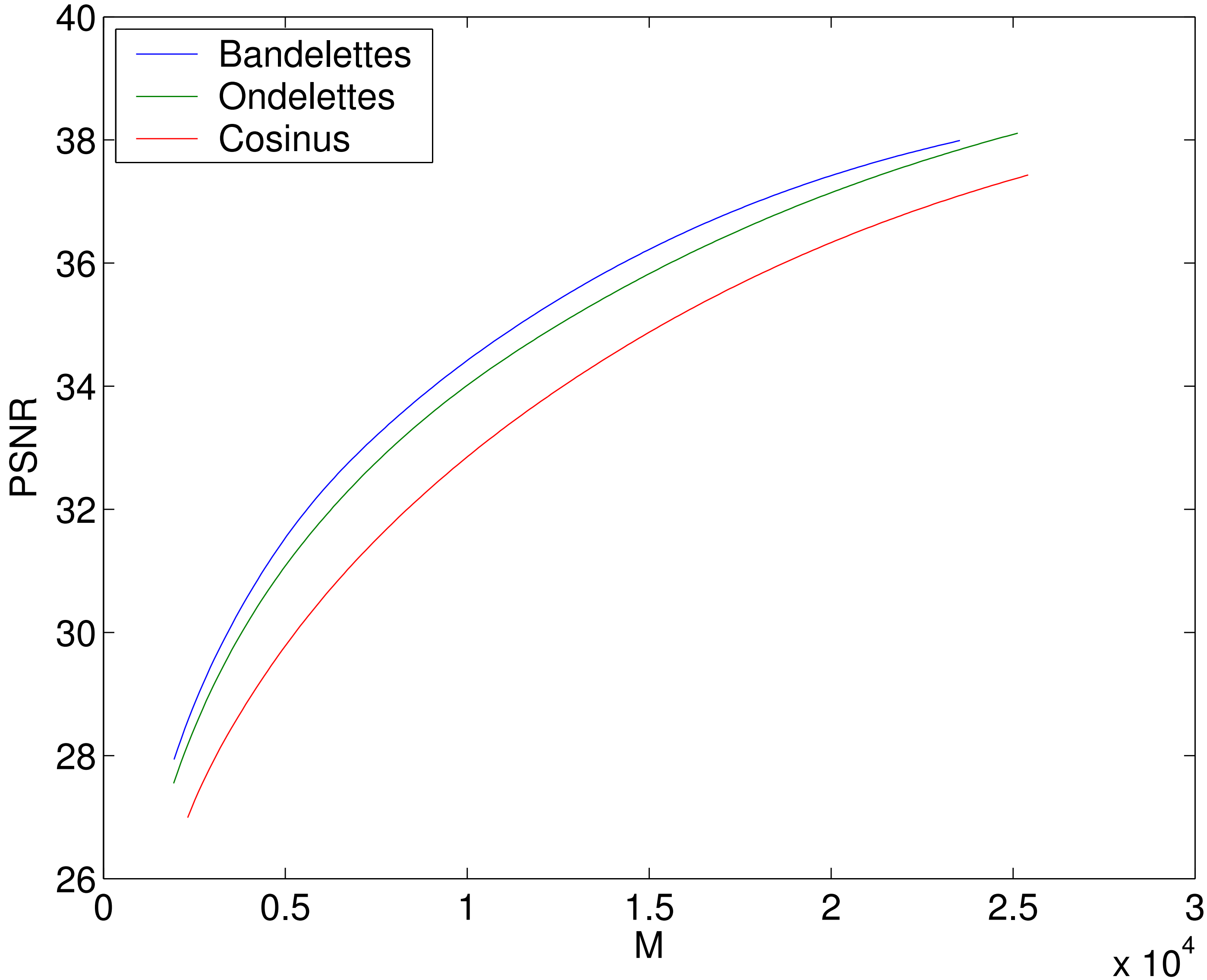
Bandelettes ($35{,}04$ dB)

$M = 11516$

Ondelettes ($34{,}64$ dB)

Cosinus par blocs ($33{,}51$ dB)

Approximation



Lena

Approximation

Originale

Bandelettes ($31{,}33$ dB)

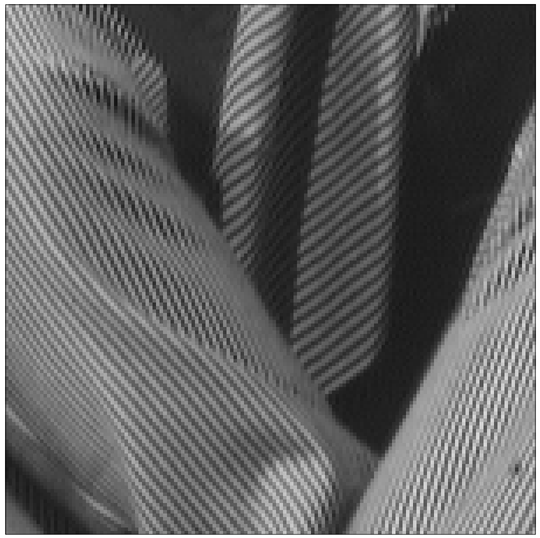
$M = 14439$

Ondelettes ($29{,}45$ dB)

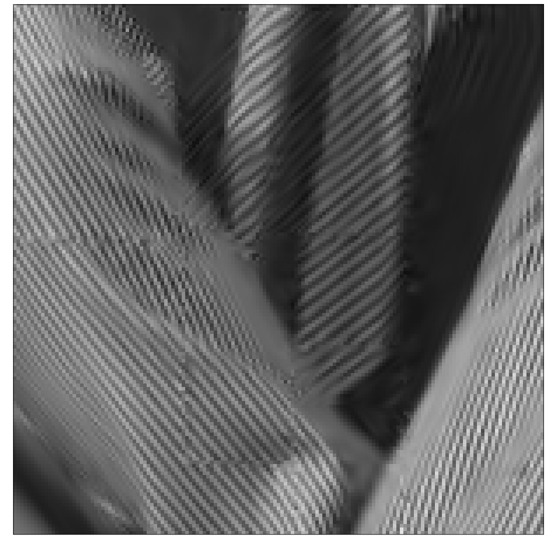
Cosinus par blocs ($29{,}96$ dB)

Approximation

Originale



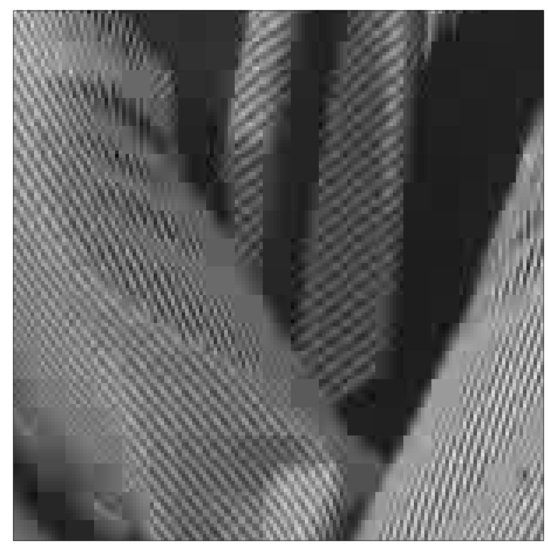
Bandelettes ($31{,}33$ dB)



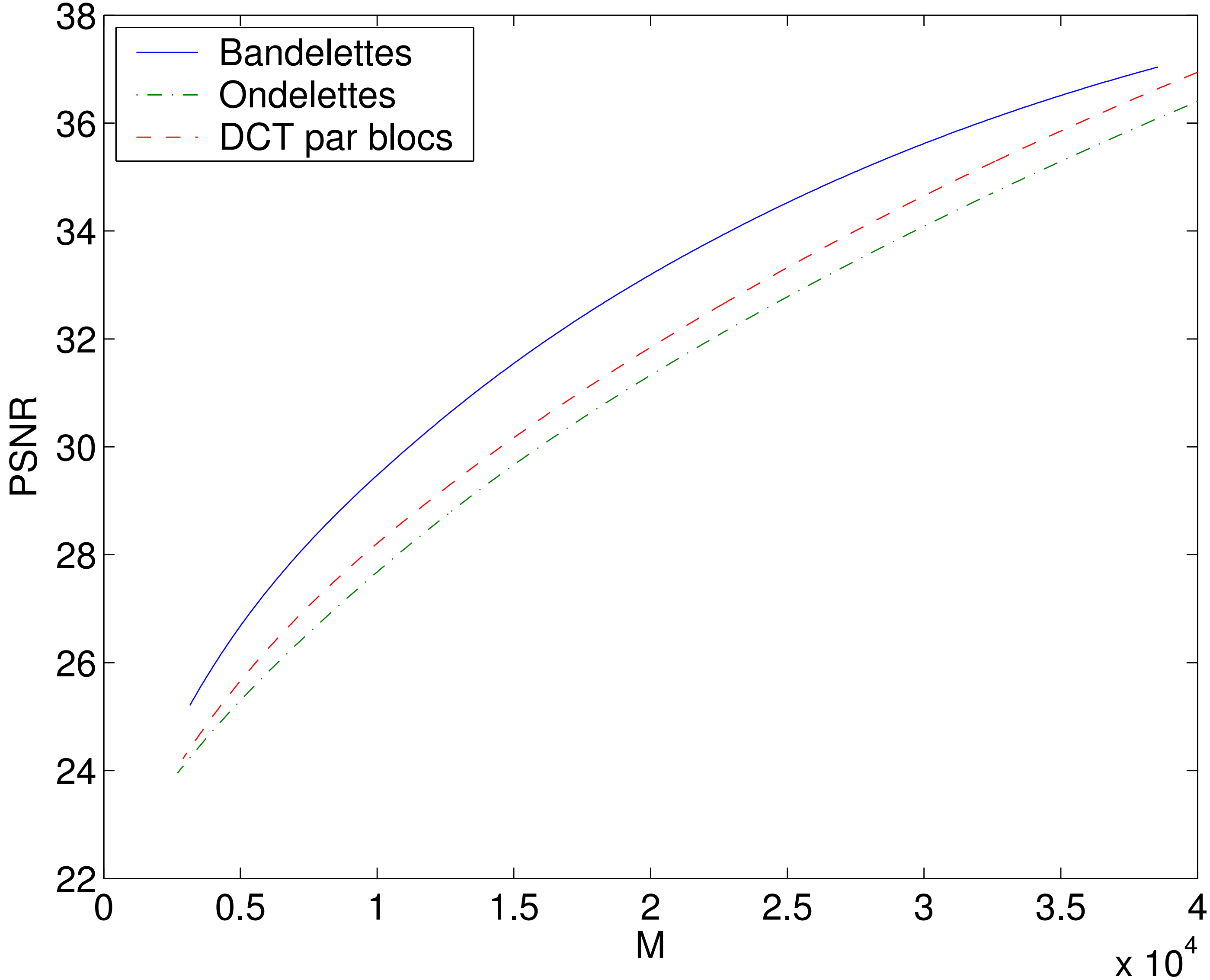
$M = 14439$

Ondelettes ($29{,}45$ dB)

Cosinus par blocs ($29{,}96$ dB)



Approximation



Barbara

Débruitage par seuillage *(Donoho, Johnstone)*

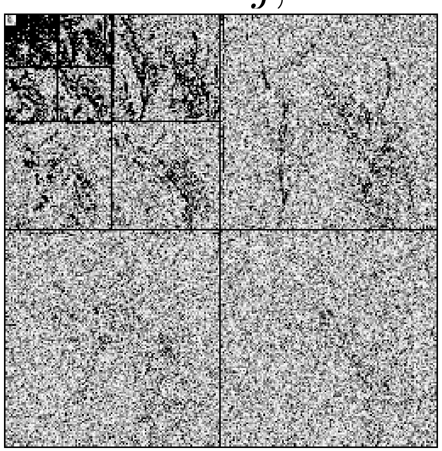
Débruitage par seuillage *(Donoho, Johnstone)*

f

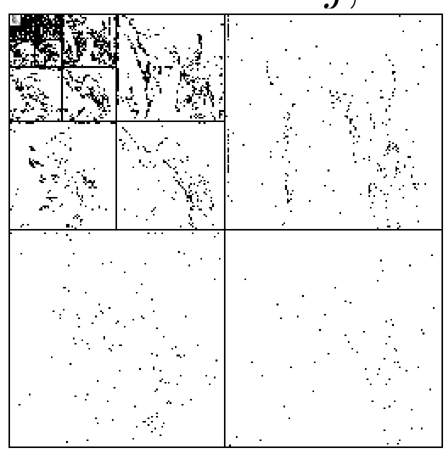
$X = f + W$

$F = X \star h$

$\langle X, \psi_{j,n}^k \rangle$



$\mathrm{Seuil}(\langle X, \psi_{j,n}^k \rangle)$



$F = T_{\mathcal{B}}\, X$

Débruitage

Débruitage

Originale

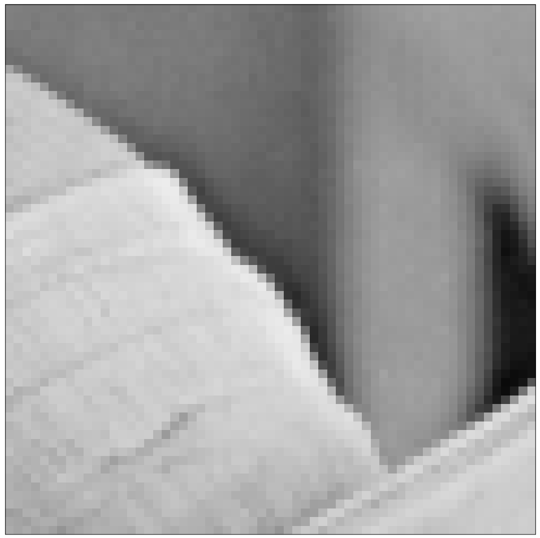
Bruitée ($22{,}12\,\mathrm{dB}$)

Bandelettes ($29{,}42\,\mathrm{dB}$)

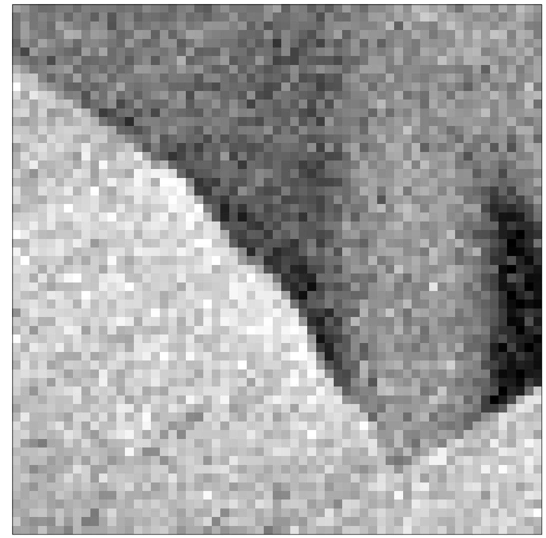
Ondelettes ($28{,}67\,\mathrm{dB}$)

Débruitage

Originale



Bruitée $(22{,}12\,\mathrm{dB})$



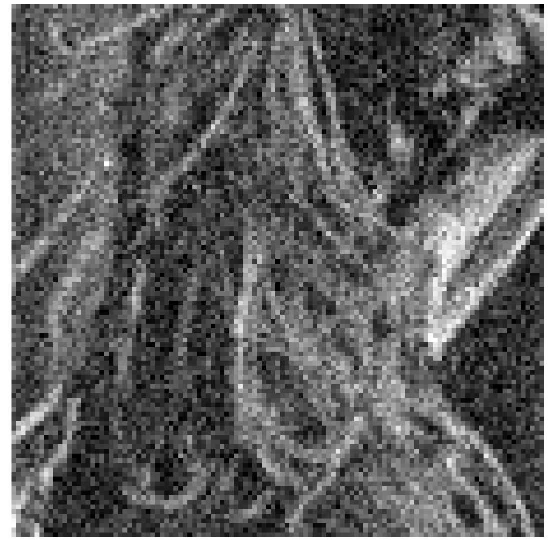
Bandelettes $(29{,}42\,\mathrm{dB})$

Ondelettes $(28{,}67\,\mathrm{dB})$

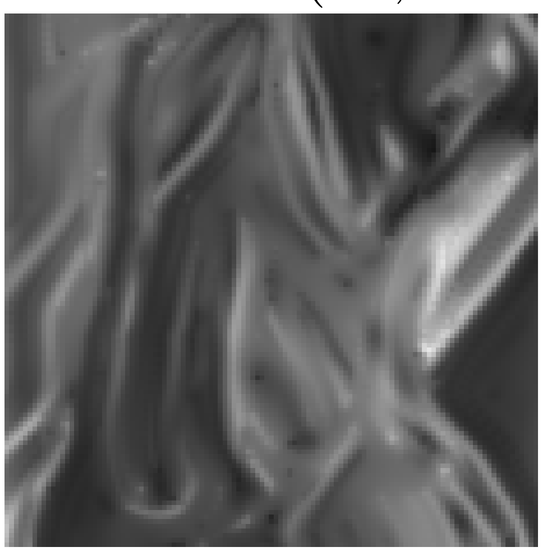
Débruitage

Originale

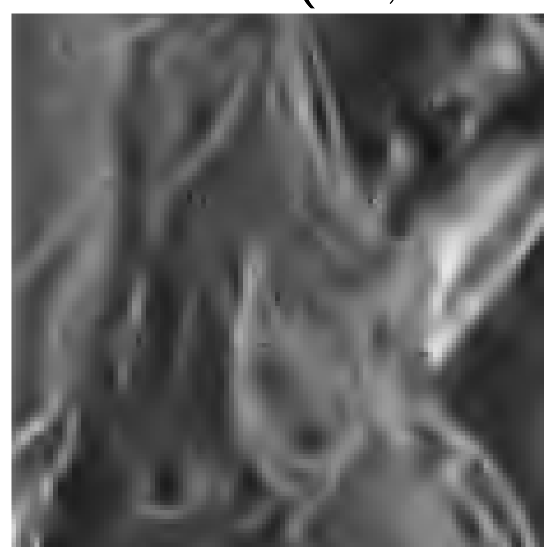
Bruitée $(22{,}12\,\mathrm{dB})$



Bandelettes $(29{,}42\,\mathrm{dB})$



Ondelettes $(28{,}67\,\mathrm{dB})$



Compression

Compression

- Approximation non-linéaire suivi d'une quantifcation et d'un codage entropique.

Compression

- Approximation non-linéaire suivi d'une quantifcation et d'un codage entropique.
- Minimiser $\|f - f_M\|^2$ pour un nombre M de bits.

Compression

- Approximation non-linéaire suivi d'une quantifcation et d'un codage entropique.
- Minimiser $\|f - f_M\|^2$ pour un nombre M de bits.
- Approche Lagrangienne : recherche de la meilleure segmentation et du meilleur flot qui minimisent

$$\|f - f_M\|^2 + \lambda\, M \ .$$

Compression

- Approximation non-linéaire suivi d'une quantifcation et d'un codage entropique.
- Minimiser $\|f - f_M\|^2$ pour un nombre M de bits.
- Approche Lagrangienne : recherche de la meilleure segmentation et du meilleur flot qui minimisent

$$\|f - f_M\|^2 + \lambda \, M \ .$$

- Minimisation de $D + \lambda R$.

Compression

- Approximation non-linéaire suivi d'une quantifcation et d'un codage entropique.
- Minimiser $\|f - f_M\|^2$ pour un nombre M de bits.
- Approche Lagrangienne : recherche de la meilleure segmentation et du meilleur flot qui minimisent

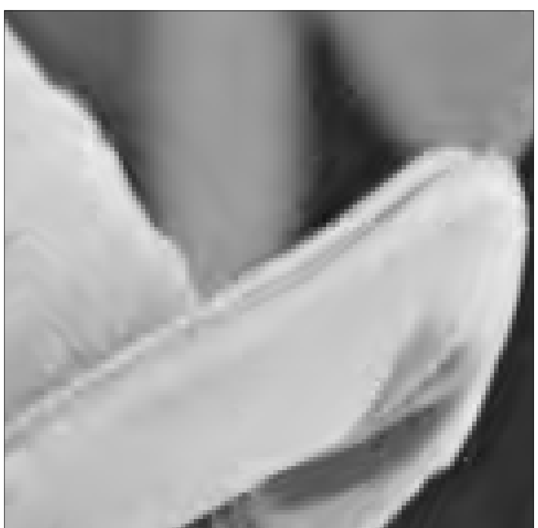
$$\|f - f_M\|^2 + \lambda\, M \ .$$

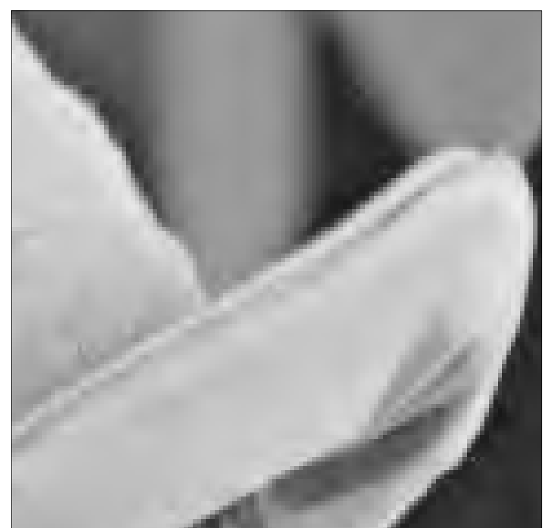
- Minimisation de $D + \lambda R$.
- Algorithme rapide (CART) : programmation dynamique de bas en haut de la segmentation en arbre quaternaire.

Compression

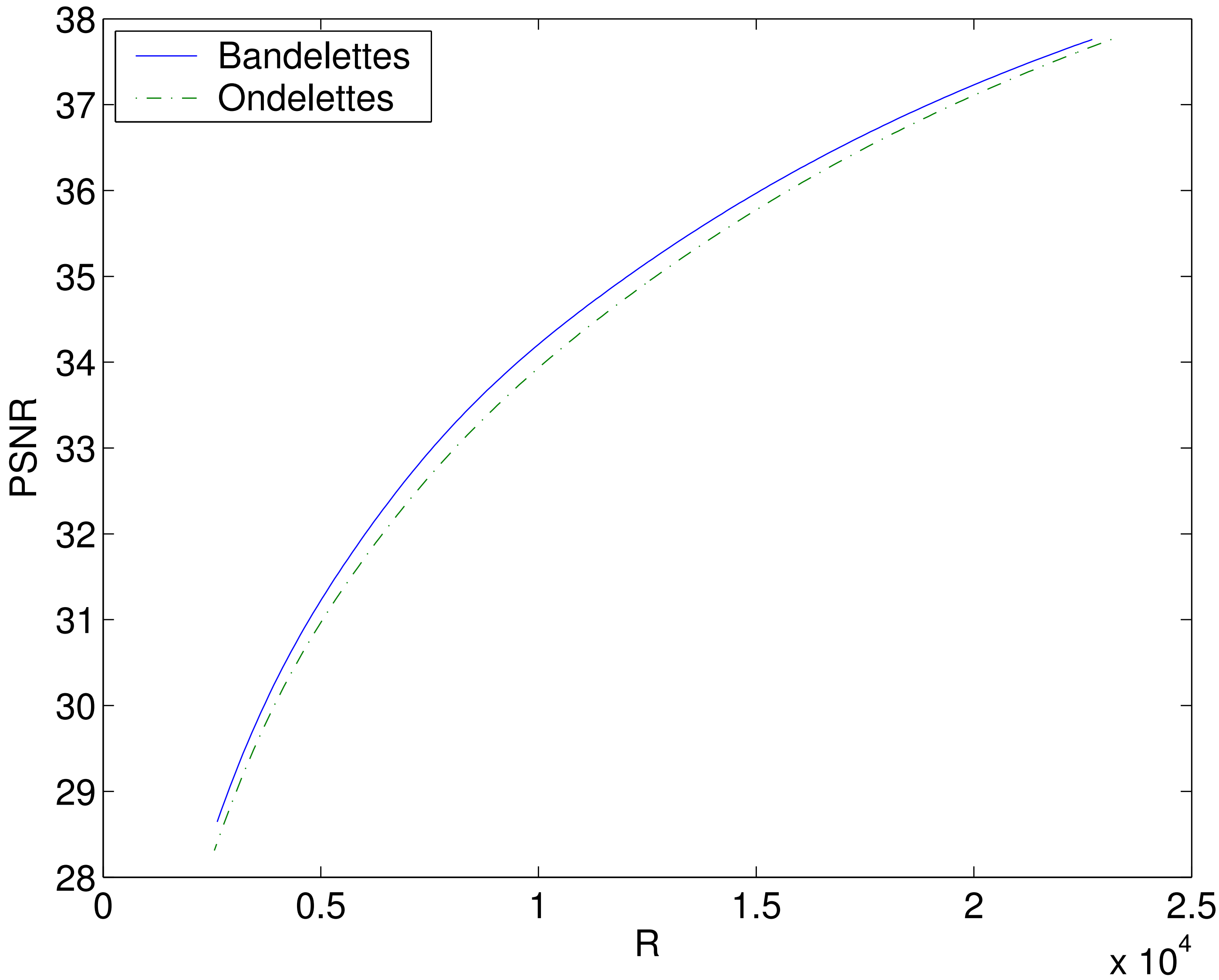
$$R = 11418\text{octets}$$

Bandelettes $(34{,}71\,\text{dB})$ Ondelettes $(34{,}52\,\text{dB})$



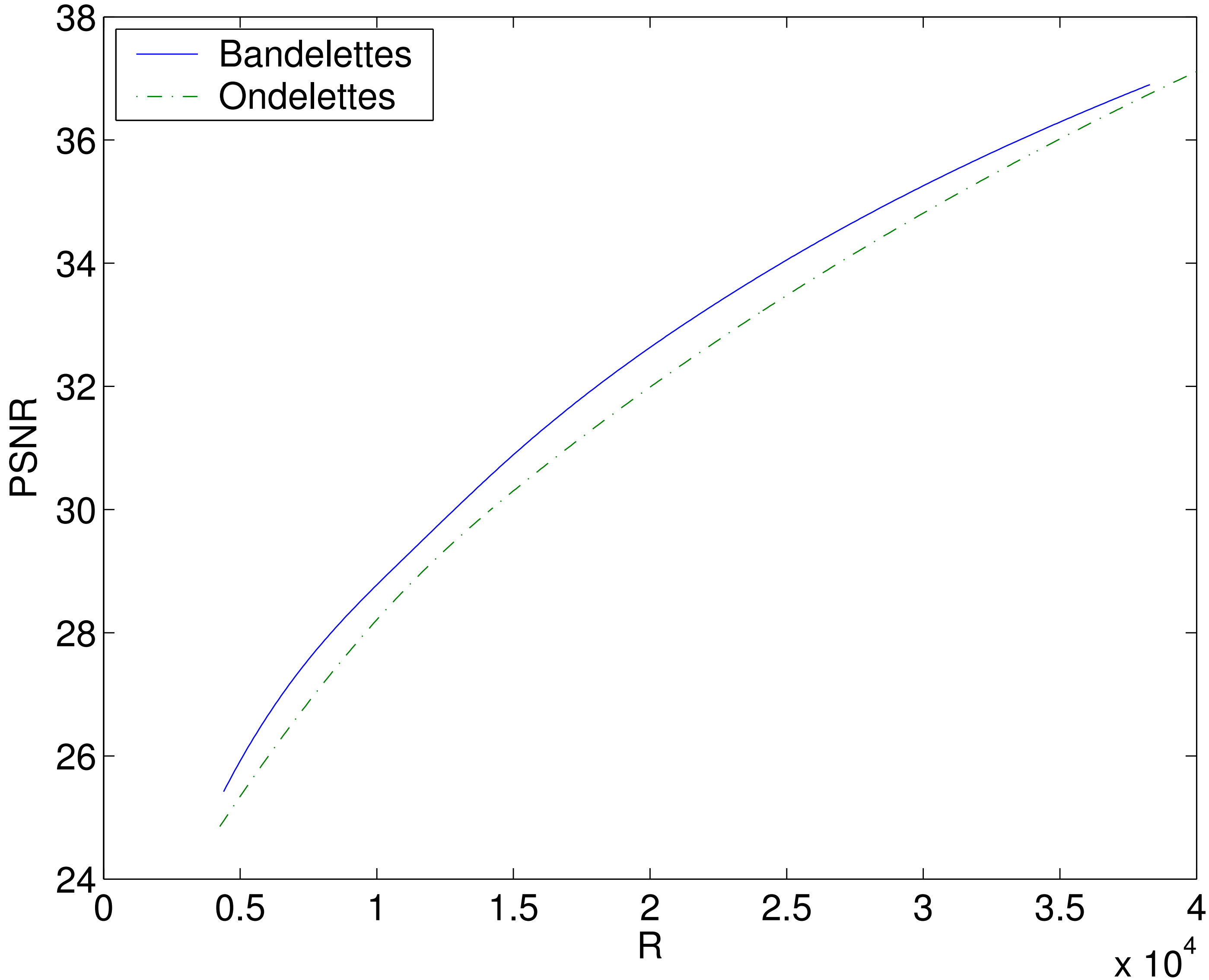


Compression



Lena

Compression



Barbara

Conclusion

Conclusion

- Les bandelettes permettent une représentation creuse des images dans un frame (ou une base) adapté à la géométrie.

Conclusion

- Les bandelettes permettent une représentation creuse des images dans un frame (ou une base) adapté à la géométrie.
- Applications dans le traitement du signal :
  - Débruitage et restauration par seuillage.
  - Compression d'image.
  - Compression video.
  - Classification, indexation,. . .

Conclusion

- Les bandelettes permettent une représentation creuse des images dans un frame (ou une base) adapté à la géométrie.
- Applications dans le traitement du signal :
  - Débruitage et restauration par seuillage.
  - Compression d'image.
  - Compression video.
  - Classification, indexation,...
- Questions mathématiques :
  - Consistance statistique de l'estimation de la géométrie.
  - Théorèmes d'approximation dans des espaces fonctionnels adaptés.
  - Extension aux dimensions supérieures.