Bandelettes et représentation géométrique des images

E. Le Pennec

Représentation géométrique des images

Représentation géométrique des images

- Représentation creuse du signal nécessaire pour le traitement du signal :
  compression, débruitage, restauration, reconnaissance de forme...

Représentation géométrique des images

- Représentation creuse du signal nécessaire pour le traitement du signal :
  compression, débruitage, restauration, reconnaissance de forme...
- Besoin de prendre en compte la géométrie pour améliorer la représentation des images.

Représentation géométrique des images

- Représentation creuse du signal nécessaire pour le traitement du signal :
  compression, débruitage, restauration, reconnaissance de forme...
- Besoin de prendre en compte la géométrie pour améliorer la représentation des images.
- Relier les représentations d'analyses harmoniques (ondelettes) et la géométrie.

Représentation géométrique des images

- Représentation creuse du signal nécessaire pour le traitement du signal :
  compression, débruitage, restauration, reconnaissance de forme...
- Besoin de prendre en compte la géométrie pour améliorer la représentation des images.
- Relier les représentations d'analyses harmoniques (ondelettes) et la géométrie.
- Entre traitement des images et vision par ordinateur : les codeurs de seconde génération.

Détection des contours

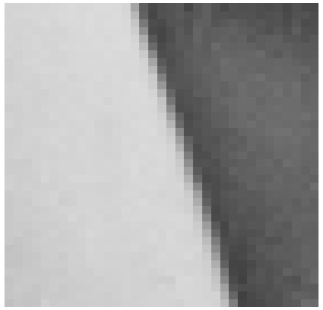
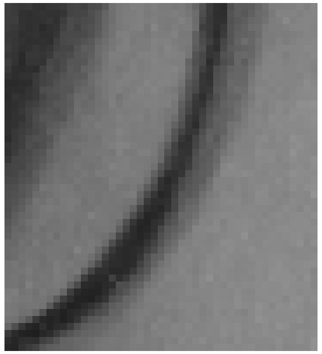
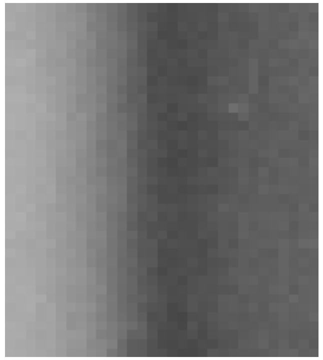
Détection des contours

- Un problème mal posé.

Détection des contours

- Un problème mal posé.  

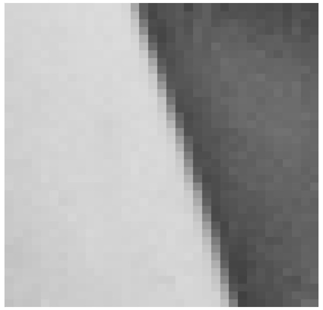
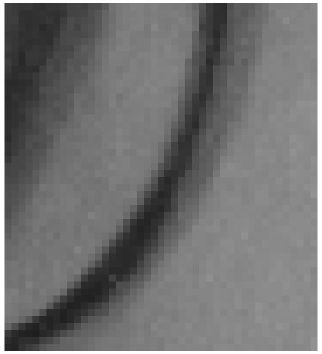
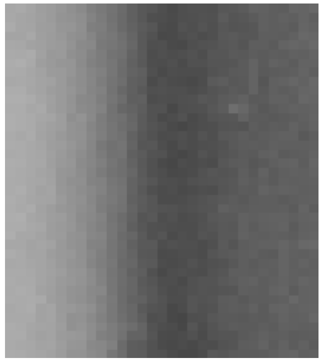
- Les contours sont des singularités lissées.

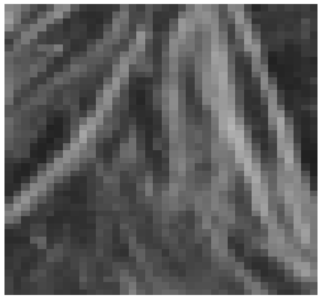
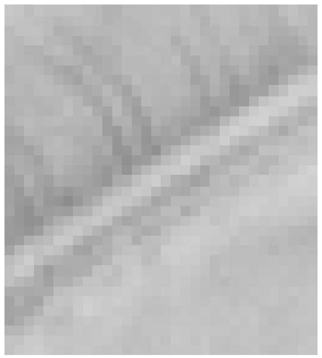
Détection des contours

- Un problème mal posé.


- Les contours sont des singularités lissées.

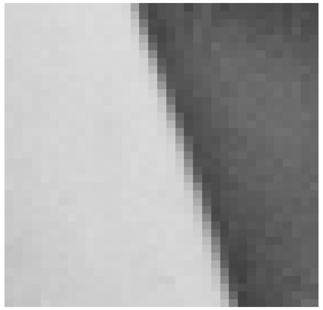
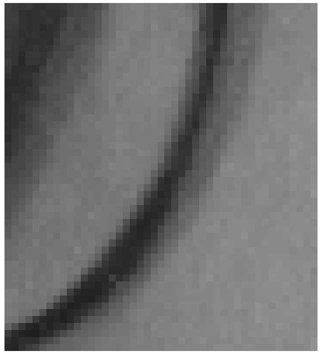
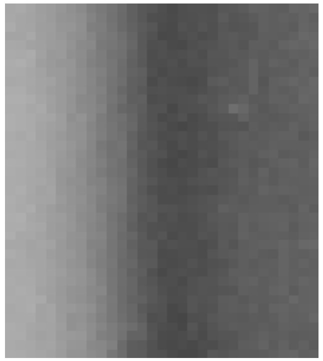
- Où sont ces contours ?

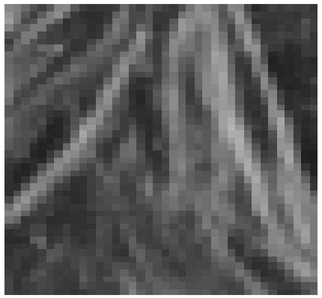
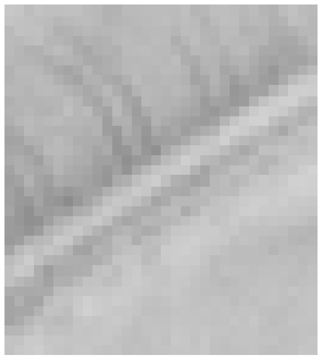
Détection des contours

- Un problème mal posé.


- Les contours sont des singularités lissées.

- Où sont ces contours ?

- L'estimation de la géométrie peut-elle être *bien posée* ?

Plan

Plan

- Motivations

Plan

- Motivations
- Constructions des bandelettes

Plan

- Motivations
- Constructions des bandelettes
- Approximation non-linéaire

Plan

- Motivations
- Constructions des bandelettes
- Approximation non-linéaire
- Améliorations et conclusion

Représentation creuse

Représentation creuse

- Décomposition dans une base orthonormée $\mathcal{B} = \{g_m\}_{m\in\mathbb{N}}$

$$f = \sum_{m\in\mathbb{N}} \langle f, g_m \rangle \, g_m$$

Représentation creuse

- Décomposition dans une base orthonormée $\mathcal{B} = \{g_m\}_{m\in\mathbb{N}}$

$$f = \sum_{m\in\mathbb{N}} \langle f, g_m\rangle \, g_m$$

- Approximation avec M vecteurs choisis adaptativement

$$f_M = \sum_{m\in I_M} \langle f, g_m\rangle \, g_m$$

Représentation creuse

- Décomposition dans une base orthonormée $\mathcal{B} = \{g_m\}_{m\in\mathbb{N}}$

$$f = \sum_{m\in\mathbb{N}} \langle f, g_m \rangle \, g_m$$

- Approximation avec M vecteurs choisis adaptativement

$$f_M = \sum_{m\in I_M} \langle f, g_m \rangle \, g_m$$

- On veut minimiser $\|f - f_M\|^2 = \sum_{m\notin I_M} |\langle f, g_m \rangle|^2$

Représentation creuse

- Décomposition dans une base orthonormée $\mathcal{B} = \{g_m\}_{m\in\mathbb{N}}$

$$f = \sum_{m\in\mathbb{N}} \langle f, g_m\rangle \, g_m$$

- Approximation avec M vecteurs choisis adaptativement

$$f_M = \sum_{m\in I_M} \langle f, g_m\rangle \, g_m$$

- On veut minimiser $\|f - f_M\|^2 = \sum_{m\notin I_M} |\langle f, g_m\rangle|^2$
- I_M doit correspondre au M plus grands produits scalaires :

$$I_M = \{m, |\langle f, g_m\rangle| > T_M\} \text{ : seuillage}$$

Représentation creuse

- Décomposition dans une base orthonormée $\mathcal{B} = \{g_m\}_{m\in\mathbb{N}}$

$$f = \sum_{m\in\mathbb{N}} \langle f, g_m \rangle \, g_m$$

- Approximation avec M vecteurs choisis adaptativement

$$f_M = \sum_{m\in I_M} \langle f, g_m \rangle \, g_m$$

- On veut minimiser $\|f - f_M\|^2 = \sum_{m\notin I_M} |\langle f, g_m \rangle|^2$
- I_M doit correspondre au M plus grands produits scalaires :

$$I_M = \{m, |\langle f, g_m \rangle| > T_M\} \text{ : seuillage}$$

- **Problème :** Comment choisir la base $\mathcal{B}$ pour que

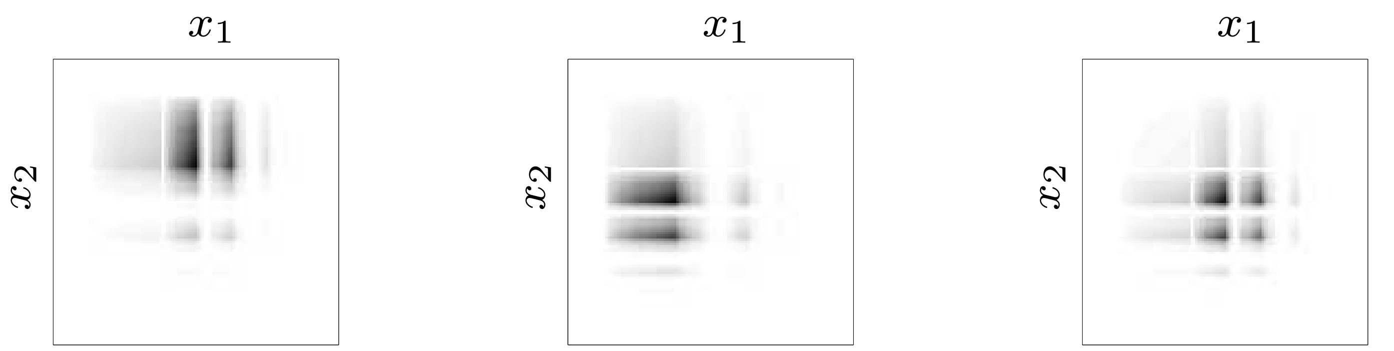
$$\|f - f_M\|^2 \leqslant C M^{-\alpha} \quad \text{avec un grand } \alpha \text{ ?}$$

Ondelettes 2D

Ondelettes 2D

- Construites à partir de 3 ondelettes $\psi^k(x_1, x_2)$ avec $k = 1, 2, 3$ dilatées par 2^j et translatées par $2^j(n_1, n_2)$

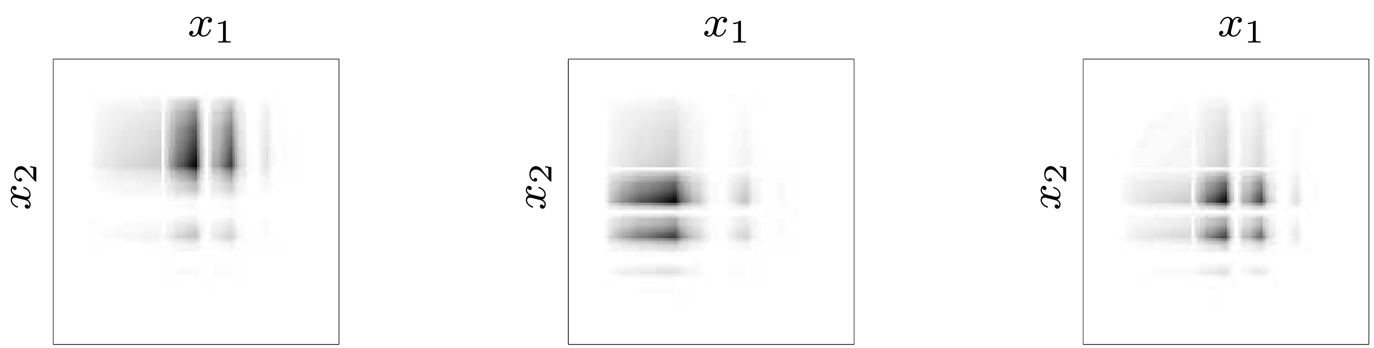
$$\psi^k_{j,n}(x_1, x_2) = \frac{1}{2^j}\, \psi^k\left(\frac{x_1 - 2^j n_1}{2^j}, \frac{x_2 - 2^j n_1}{2^j}\right) .$$



Ondelettes 2D

- Construites à partir de 3 ondelettes $\psi^k(x_1, x_2)$ avec $k = 1, 2, 3$ dilatées par 2^j et translatées par $2^j(n_1, n_2)$

$$\psi_{j,n}^k(x_1, x_2) = \frac{1}{2^j}\, \psi^k\left(\frac{x_1 - 2^j n_1}{2^j}, \frac{x_2 - 2^j n_1}{2^j}\right) .$$

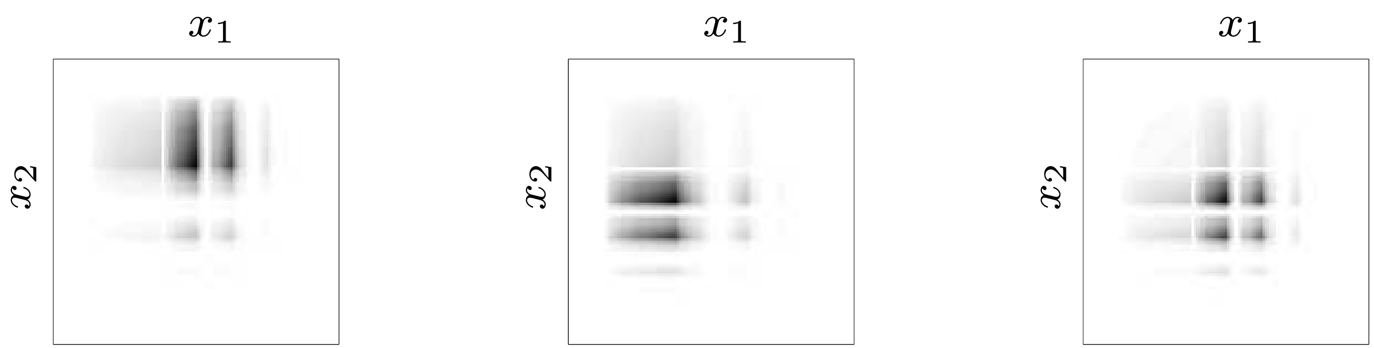


- $\mathcal{B} = \left\{\psi_{j,n}^k\right\}_{j\in\mathbb{N}\,,\,2^j n\in[0,1)^2\,,\,1\leqslant k\leqslant 3}$ est une base orthonormée de $L^2([0,1]^2)$.

Ondelettes 2D

- Construites à partir de 3 ondelettes $\psi^k(x_1, x_2)$ avec $k = 1, 2, 3$ dilatées par 2^j et translatées par $2^j(n_1, n_2)$

$$\psi^k_{j,n}(x_1, x_2) = \frac{1}{2^j}\,\psi^k\left(\frac{x_1 - 2^j n_1}{2^j}, \frac{x_2 - 2^j n_1}{2^j}\right) .$$



- $\mathcal{B} = \left\{\psi^k_{j,n}\right\}_{j \in \mathbb{N}\,,\, 2^j n \in [0,1)^2\,,\, 1 \leqslant k \leqslant 3}$ est une base orthonormée de $L^2([0, 1]^2)$.
- Ondelettes *isotropes*.

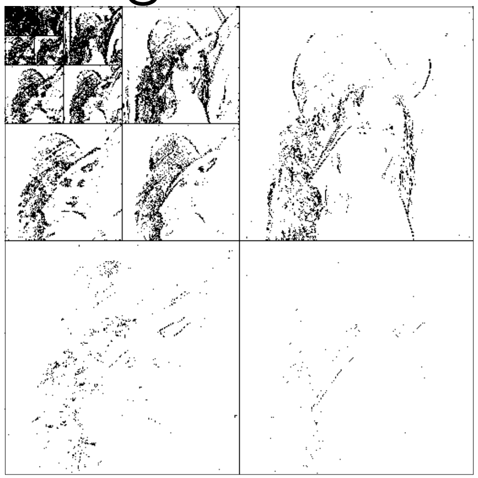
Succès et échecs des ondelettes

Succès et échecs des ondelettes

- Les images sont représentées dans une base d'ondelettes bi-dimensionnelles et les plus grands coefficients sont conservés (JPEG2000).

f

M coefficients significatifs

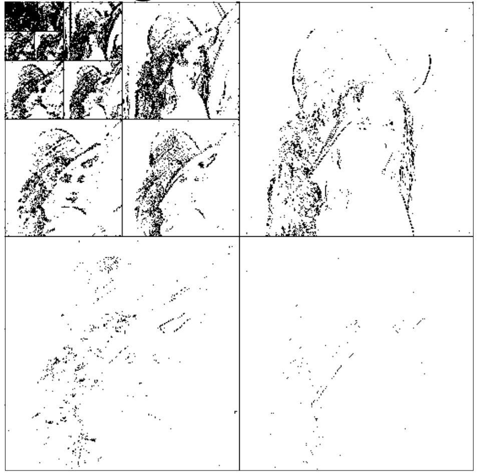


f_M

Succès et échecs des ondelettes

- Les images sont représentées dans une base d'ondelettes bi-dimensionnelles et les plus grands coefficients sont conservés (JPEG2000).

f | M coefficients significatifs | f_M



- Ne tient pas en compte la géométrie.

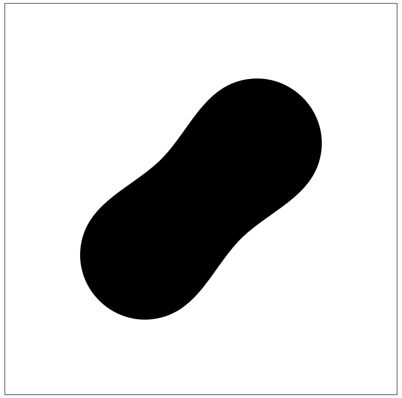
Utilisation de la géométrie

Utilisation de la géométrie

- La plupart des contours des images sont des courbes régulières.

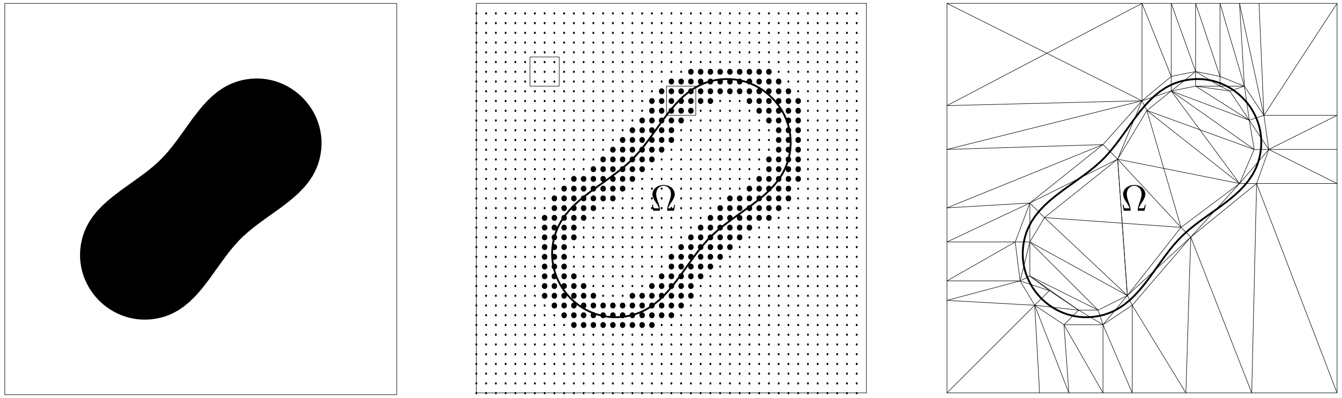
Utilisation de la géométrie

- La plupart des contours des images sont des courbes régulières.
- Exemple : $f = \mathbb{1}_\Omega$ où la frontière $\partial\Omega$ est régulière ($\mathcal{C}^\alpha$ avec $\alpha \geqslant 2$).



Utilisation de la géométrie

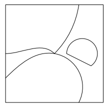
- La plupart des contours des images sont des courbes régulières.
- Exemple : $f = \mathbb{1}_\Omega$ où la frontière $\partial\Omega$ est régulière ($\mathcal{C}^\alpha$ avec $\alpha \geqslant 2$).



- Approximations :
  - avec M ondelettes : $\|f - f_M\|^2 \leqslant C\,M^{-1}$,
  - linéaire par morceaux avec M triangles : $\|f - f_M\|^2 \leqslant C\,M^{-2}$,
  - linéaire par morceaux avec M éléments géométriques d'ordre plus élevé : $\|f - f_M\|^2 \leqslant C\,M^{-\alpha}$,
  - avec M curvelets ($Candes,\ Donoho$) : $\|f - f_M\|^2 \leqslant C\,(\log M)\,M^{-2}$,
  - avec M coefficients dans une décomposition adaptée aux contours ($Cohen,\ Matei$) : $\|f - f_M\|^2 \leqslant C\,M^{-2}$.

Modèle des images

Modèle des images



- f : Image en dehors d'un ensemble de courbes $\mathcal{C}^\alpha$

$$f\ (x) = \qquad\qquad\qquad\qquad .$$

Modèle des images

- f : Image $\mathcal{C}^\alpha$ en dehors d'un ensemble de courbes $\mathcal{C}^\alpha$

$$f\ (x) = \qquad f(x) \qquad .$$

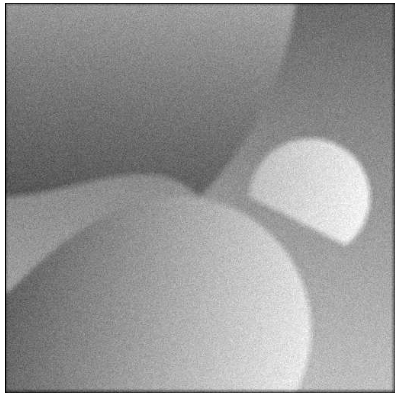
Modèle des images

- f_s : Image $\mathcal{C}^\alpha$ en dehors d'un ensemble de courbes $\mathcal{C}^\alpha$ rendue floue

$$f_s(x) = g_s \star f(x) \qquad \text{avec} \quad g_s(x) = \frac{1}{s}\, g(\frac{x}{s}) \ .$$

- g est inconnu mais $\mathcal{C}^\alpha$ à support dans $[-1, 1]^2$.
- $s > 0$ est inconnu et peut varier selon x.

Modèle des images

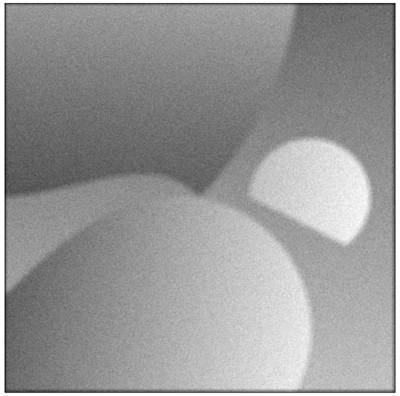


- f_s : Image $\mathcal{C}^\alpha$ en dehors d'un ensemble de courbes $\mathcal{C}^\alpha$ rendue floue et bruitée

$$f_s(x) = g_s \star f(x) + b(x) \quad \text{avec} \quad g_s(x) = \frac{1}{s}\, g(\frac{x}{s}) \ .$$

- g est inconnu mais $\mathcal{C}^\alpha$ à support dans $[-1,1]^2$.
- $s > 0$ est inconnu et peut varier selon x.
- b est un *bruit*.

Modèle des images



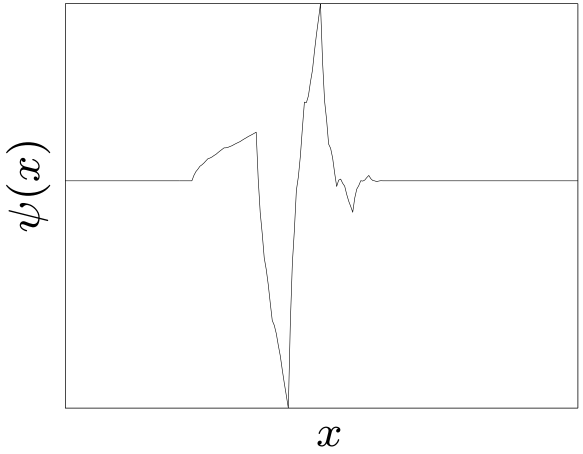
- f_s : Image $\mathcal{C}^\alpha$ en dehors d'un ensemble de courbes $\mathcal{C}^\alpha$ rendue floue et bruitée

$$f_s(x) = g_s \star f(x) + b(x) \quad \text{avec} \quad g_s(x) = \frac{1}{s}\, g(\frac{x}{s}) \ .$$

- g est inconnu mais $\mathcal{C}^\alpha$ à support dans $[-1,1]^2$.
- $s > 0$ est inconnu et peut varier selon x.
- b est un *bruit*.
- Difficultés :
  - Représenter et détecter la géométrie.
  - Utiliser la régularité géométrique.

Ondelettes anisotropes

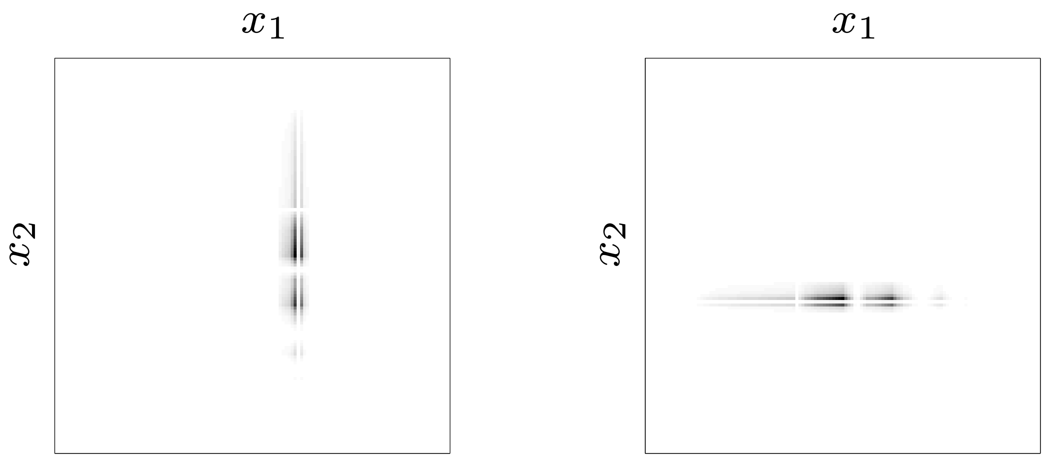
Ondelettes anisotropes



- Base d'ondelettes 1D :

$$\{\psi_{j,n}(x) = 2^{-j/2}\psi(2^{-j}(x - 2^j n))\}_{j\in\mathbb{Z},2^j n\in[0,1]} \ .$$

Ondelettes anisotropes



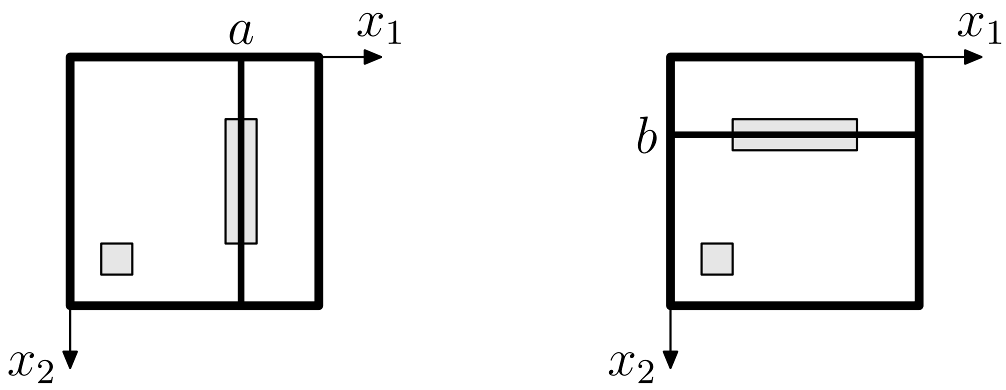
- Base d'ondelettes 1D :

$$\{\psi_{j,n}(x) = 2^{-j/2}\psi(2^{-j}(x - 2^j n))\}_{j\in\mathbb{Z},2^j n\in[0,1]} \ .$$

- Base d'*ondelettes anisotropes* : produit tensoriel de base 1D

$$\{\psi_{j_1,n_1}(x_1)\,\psi_{j_2,n_2}(x_2)\}_{j_1,n_1,j_2,n_2} \ .$$

Ondelettes anisotropes



- Base d'ondelettes 1D :

$$\{\psi_{j,n}(x) = 2^{-j/2}\psi(2^{-j}(x - 2^j n))\}_{j\in\mathbb{Z},2^j n\in[0,1]} \ .$$

- Base d'*ondelettes anisotropes* : produit tensoriel de base 1D

$$\{\psi_{j_1,n_1}(x_1)\,\psi_{j_2,n_2}(x_2)\}_{j_1,n_1,j_2,n_2} \ .$$

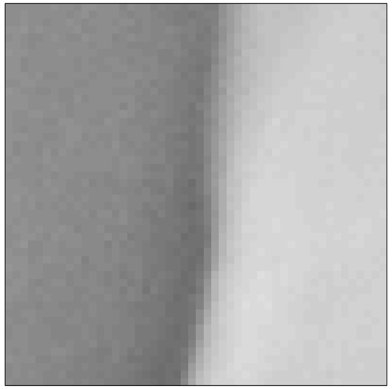
- **Théorème :** Si $f(x_1, x_2)$ est $\mathcal{C}^\alpha$ pour $x_1 < a$ et $x_1 > a$ ou pour $x_2 < b$ et $x_2 > b$ alors que $f_s = f$ ou $f_s = g_s \star f$ son approximation $f_{s,M}$ avec M ondelettes anisotropes satisfait

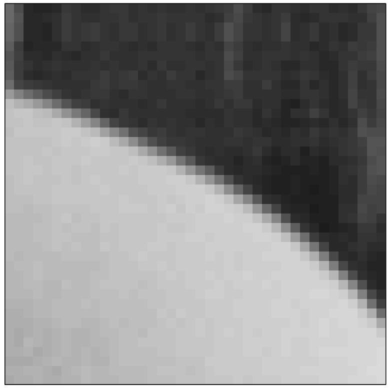
$$\|f_s - f_{s,M}\|^2 \leqslant C\, M^{-\alpha} \ .$$

Direction de régularité / Flot

Direction de régularité / Flot

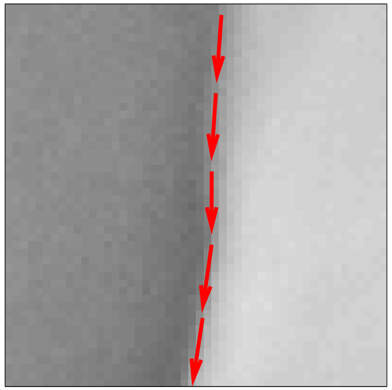
- Direction dans laquelle la fonction est régulière.

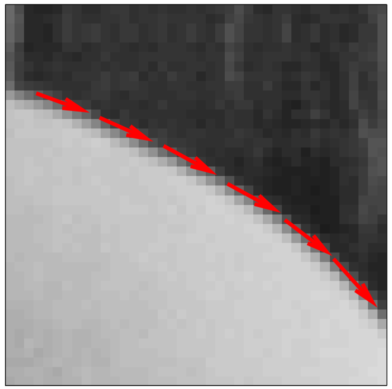




Direction de régularité / Flot

- Direction dans laquelle la fonction est régulière.
- Notion plus générale que celle de contour.

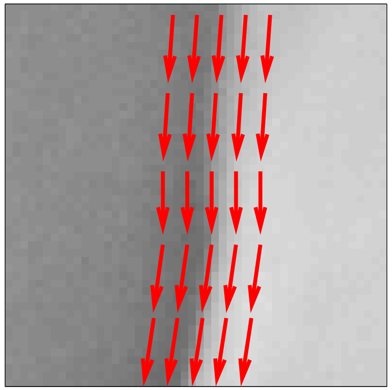


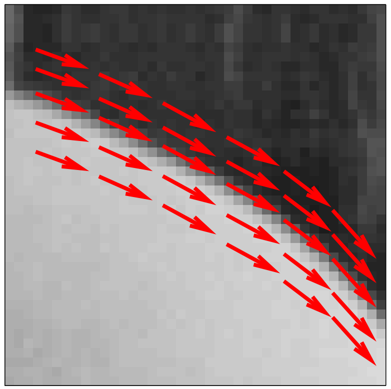


Direction de régularité / Flot

- Direction dans laquelle la fonction est régulière.
- Notion plus générale que celle de contour.
- Sur un domaine Ω, le flot géométrique τ est un champ de direction de régularité parallèle :

$$\vec{\tau}(x_1, x_2) = \vec{\tau}(x_2) \quad \text{ou} \quad \vec{\tau}(x_1, x_2) = \vec{\tau}(x_1)$$

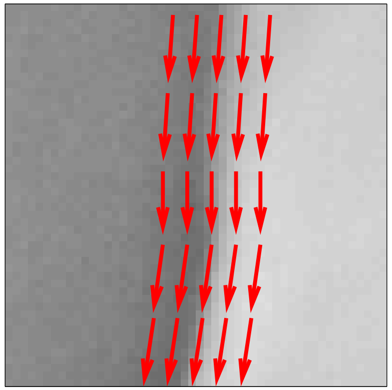


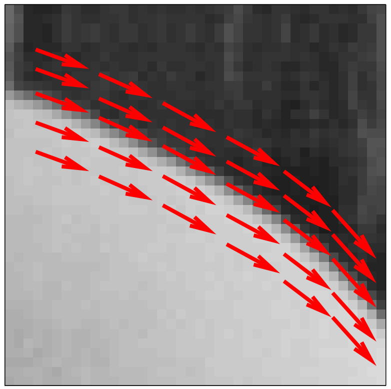


Direction de régularité / Flot

- Direction dans laquelle la fonction est régulière.
- Notion plus générale que celle de contour.
- Sur un domaine Ω, le flot géométrique τ est un champ de direction de régularité parallèle :

$$\vec{\tau}(x_1, x_2) = \vec{\tau}(x_2) \quad \text{ou} \quad \vec{\tau}(x_1, x_2) = \vec{\tau}(x_1)$$



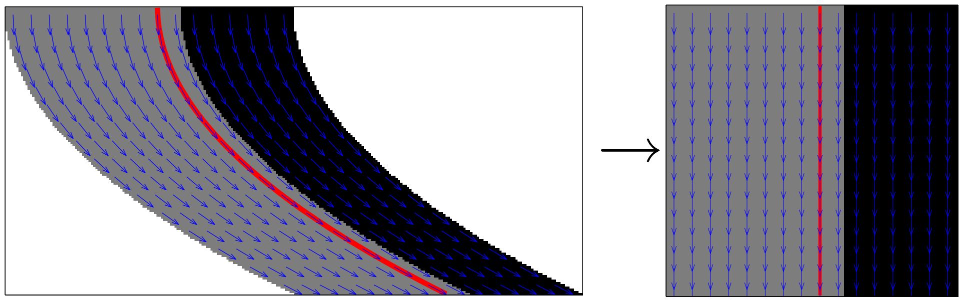


- Dans la thèse, obtenu à partir de la direction du gradient en des maxima locaux.

Flots, courbes et déformation

Flots, courbes et déformation

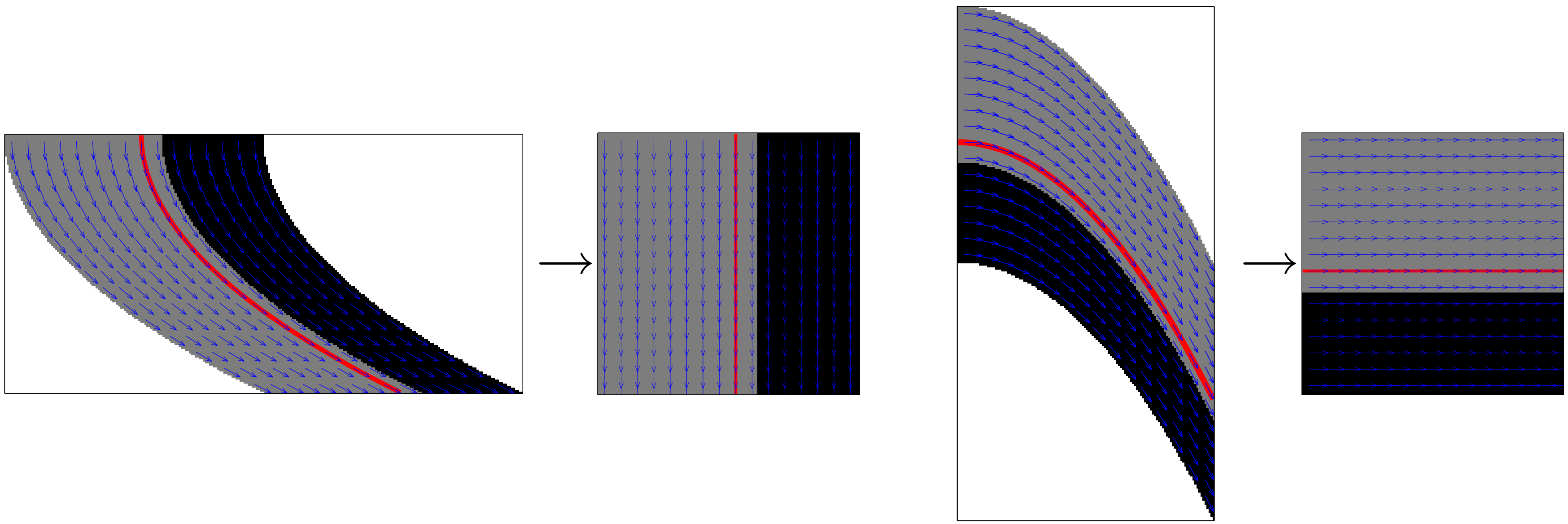
- Soit $x_1 = c(x_2)$ une courbe intégrale du flot $\vec{\tau}(x_1, x_2) = \vec{\tau}(x_2)$. L'image $f_c(x_1, x_2) = f(x_1 + c(x_2), x_2)$ admet un flot strictement vertical.



Flots, courbes et déformation

- Soit $x_1 = c(x_2)$ une courbe intégrale du flot $\vec{\tau}(x_1, x_2) = \vec{\tau}(x_2)$. L'image $f_c(x_1, x_2) = f(x_1 + c(x_2), x_2)$ admet un flot strictement vertical.

- Soit $x_2 = c(x_1)$ une courbe intégrale du flot $\vec{\tau}(x_1, x_2) = \vec{\tau}(x_1)$. L'image $f_c(x_1, x_2) = f(x_1, x_2 + c(x_1))$ admet un flot strictement horizontal.



Bandelettes

Bandelettes

- Décomposer $f(x_1 + c(x_2), x_2)$ dans une base orthogonale d'ondelettes isotropes

$$\{\psi_{j_1,n_1}(x_1)\,\psi_{j_2,n_2}(x_2)\}_{j_1,j_2,n_1,n_2}$$

est équivalent à décomposer $f(x_1, x_2)$ dans une base orthogonale de *bandelettes*

$$\{\psi_{j_1,n_1}(x_1 - c(x_2))\,\psi_{j_2,n_2}(x_2)\}_{j_1,j_2,n_1,n_2}\ .$$

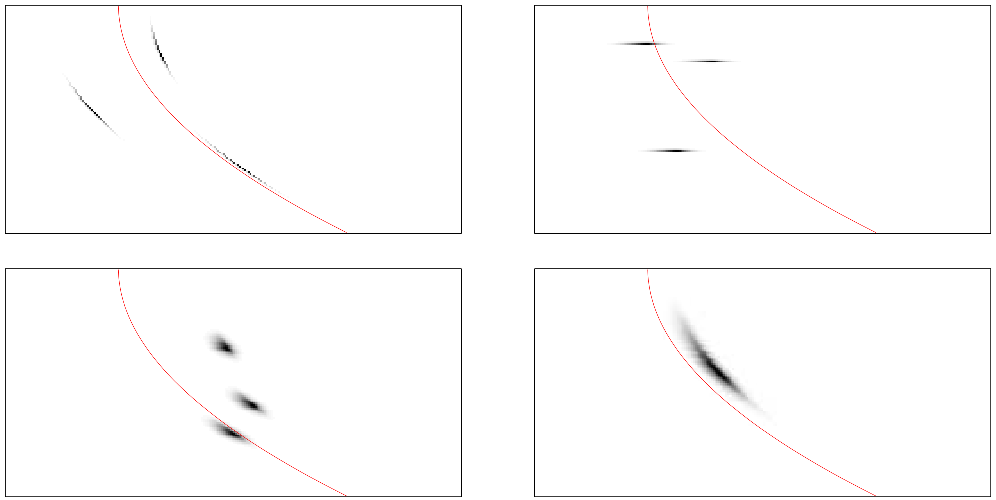
Bandelettes

- Décomposer $f(x_1 + c(x_2), x_2)$ dans une base orthogonale d'ondelettes isotropes

$$\{\psi_{j_1,n_1}(x_1)\,\psi_{j_2,n_2}(x_2)\}_{j_1,j_2,n_1,n_2}$$

est équivalent à décomposer $f(x_1, x_2)$ dans une base orthogonale de *bandelettes*

$$\{\psi_{j_1,n_1}(x_1 - c(x_2))\,\psi_{j_2,n_2}(x_2)\}_{j_1,j_2,n_1,n_2} \; .$$



Bandelettes sur un domaine

Bandelettes sur un domaine

- Domaine Ω muni d'un flot représenté par une courbe intégrale.

Bandelettes sur un domaine

- Domaine Ω muni d'un flot représenté par une courbe intégrale.
- Famille orthonormée permettant la reconstruction constituée
  - des bandelettes à support dans Ω,
  - de bandelettes de bords traversant la frontière $\partial\Omega$.

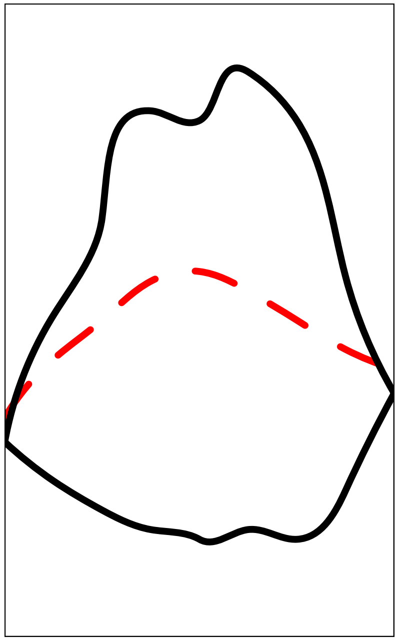
Bandelettes sur un domaine

- Domaine Ω muni d'un flot représenté par une courbe intégrale.
- Famille orthonormée permettant la reconstruction constituée
  - des bandelettes à support dans Ω,
  - de bandelettes de bords traversant la frontière $\partial\Omega$.
- Obtenue par un changement de base : *bandelettisation*.

Bandelettes sur un domaine

- Domaine Ω muni d'un flot représenté par une courbe intégrale.
- Famille orthonormée permettant la reconstruction constituée
  - des bandelettes à support dans Ω,
  - de bandelettes de bords traversant la frontière $\partial\Omega$.
- Obtenue par un changement de base : *bandelettisation*.

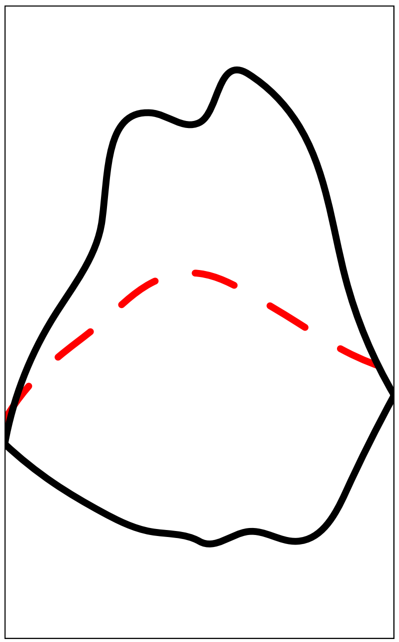
Image



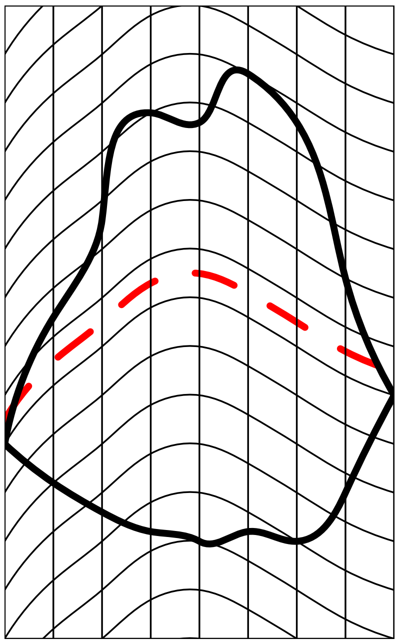
Bandelettes sur un domaine

- Domaine Ω muni d'un flot représenté par une courbe intégrale.
- Famille orthonormée permettant la reconstruction constituée
  - des bandelettes à support dans Ω,
  - de bandelettes de bords traversant la frontière $\partial\Omega$.
- Obtenue par un changement de base : *bandelettisation*.

Image

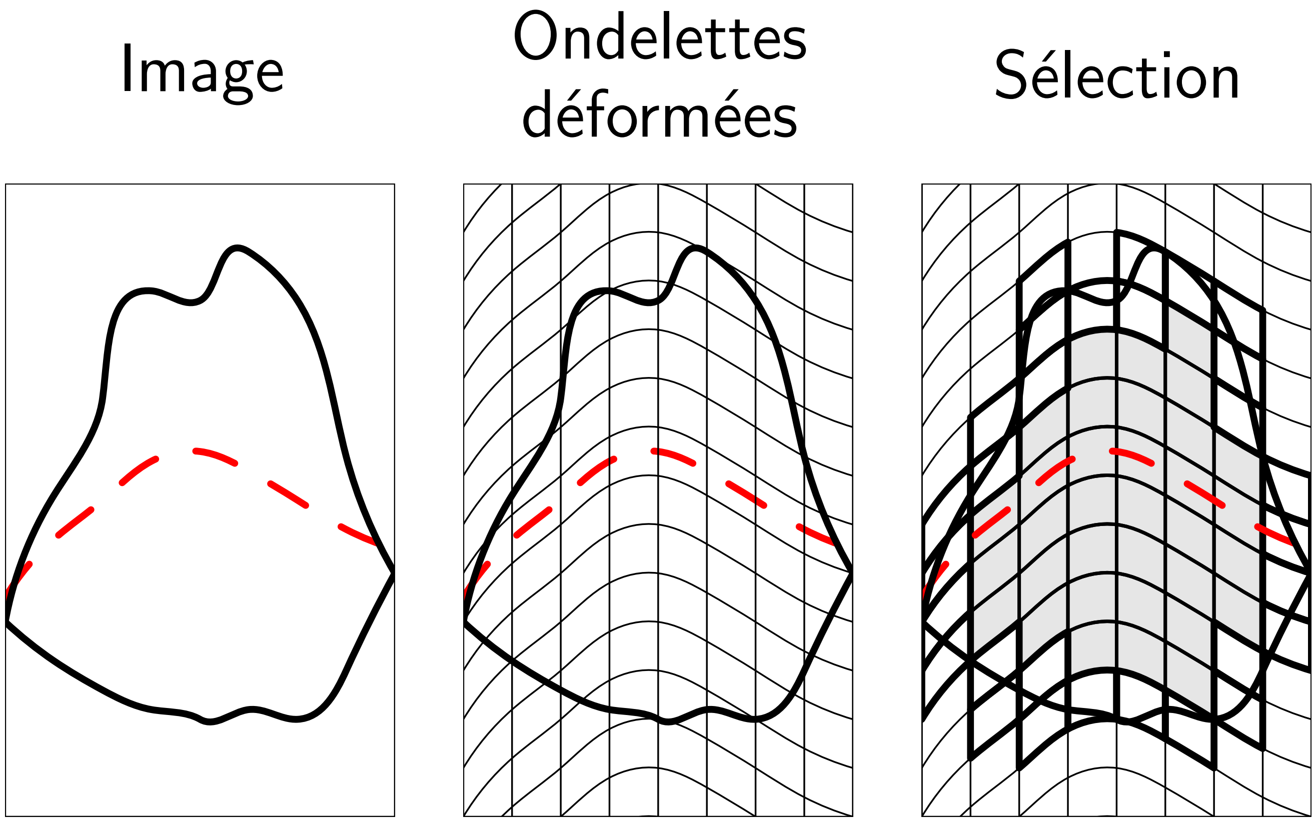


Ondelettes déformées



Bandelettes sur un domaine

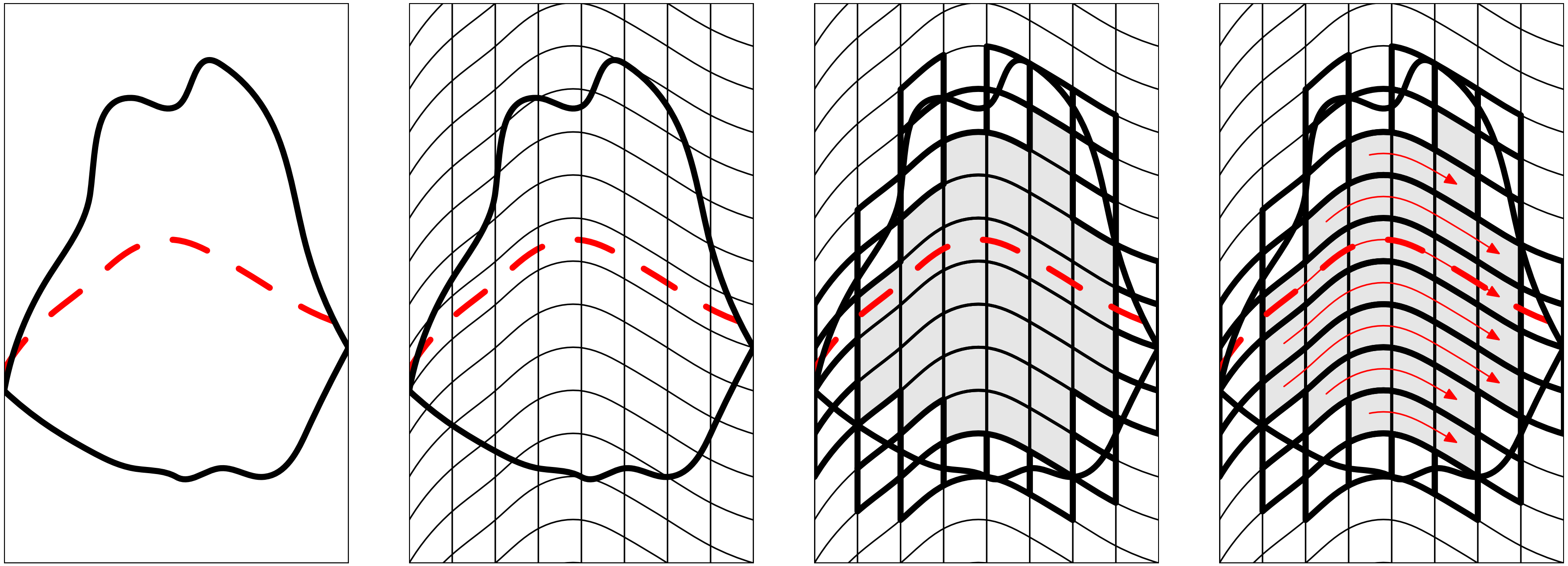
- Domaine Ω muni d'un flot représenté par une courbe intégrale.
- Famille orthonormée permettant la reconstruction constituée
  - des bandelettes à support dans Ω,
  - de bandelettes de bords traversant la frontière $\partial\Omega$.
- Obtenue par un changement de base : *bandelettisation*.



Bandelettes sur un domaine

- Domaine Ω muni d'un flot représenté par une courbe intégrale.
- Famille orthonormée permettant la reconstruction constituée
  - des bandelettes à support dans Ω,
  - de bandelettes de bords traversant la frontière $\partial\Omega$.
- Obtenue par un changement de base : *bandelettisation*.

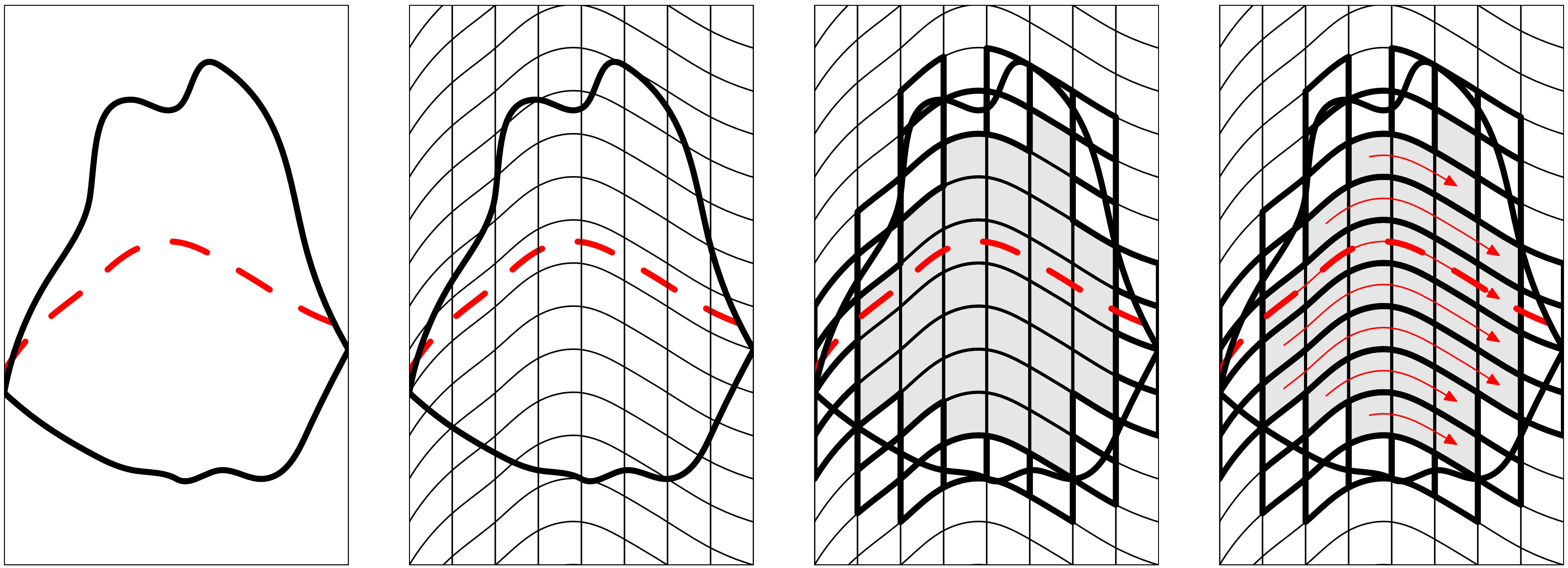
Image	Ondelettes déformées	Sélection	Bandelettes



Bandelettes sur un domaine

- Domaine Ω muni d'un flot représenté par une courbe intégrale.
- Famille orthonormée permettant la reconstruction constituée
  - des bandelettes à support dans Ω,
  - de bandelettes de bords traversant la frontière $\partial\Omega$.
- Obtenue par un changement de base : *bandelettisation*.

Image	Ondelettes déformées	Sélection	Bandelettes

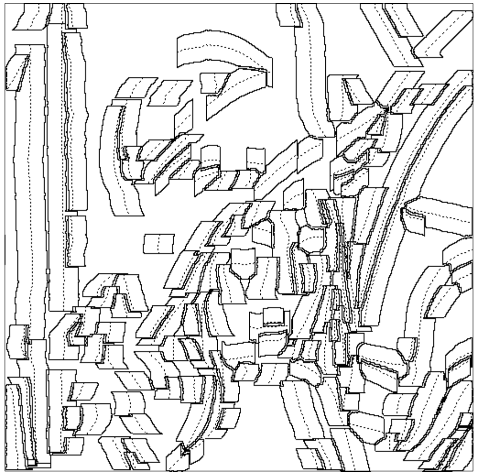


- Dans le cas discret, la déformation nécessite une interpolation.

Frame de bandelettes

Frame de bandelettes

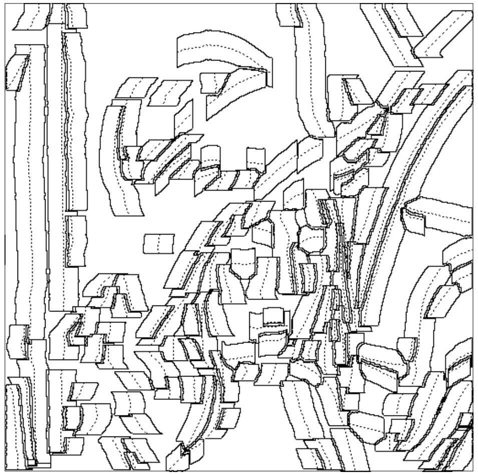
- Segmentation de l'image :



  - des régions disjointes Ω_i munies d'un flot géométrique $\vec{\tau}_i(x)$,
  - un complément $C = [0,1]^2 - \cup_i \Omega_i$ sans direction privilégiée.

Frame de bandelettes

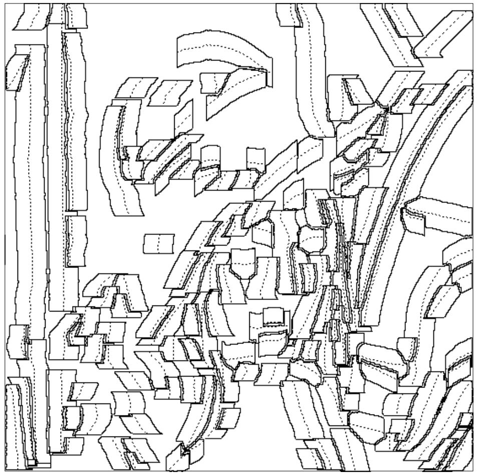
- Segmentation de l'image :



  - des régions disjointes Ω_i munies d'un flot géométrique $\vec{\tau}_i(x)$,
  - un complément $C = [0,1]^2 - \cup_i \Omega_i$ sans direction privilégiée.
- Géométrie :
  - Courbes intégrales c_i et contours $\partial\Omega_i$ des régions Ω_i.

Frame de bandelettes

- Segmentation de l'image :



  - des régions disjointes Ω_i munies d'un flot géométrique $\vec{\tau}_i(x)$,
  - un complément $C = [0,1]^2 - \cup_i \Omega_i$ sans direction privilégiée.
- Géométrie :
  - Courbes intégrales c_i et contours $\partial\Omega_i$ des régions Ω_i.
- Frame de bandelettes formé de l'union :
  - des bandelettes sur chacun des domaines Ω_i,
  - des ondelettes isotropes rencontrant C.

Approximation de la géométrie

Approximation de la géométrie

- Approximation linéaire des c_i dans une base d'ondelettes 1D avec une échelle adaptée 2^{J_i} :

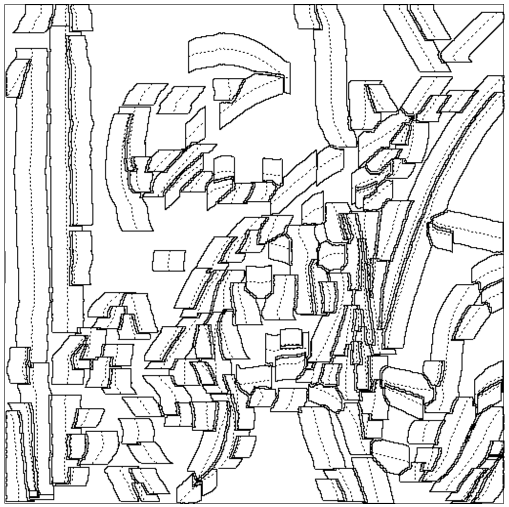
$$c_i = \sum_{j,n} \langle c_i \, , \, \psi_{j,n} \rangle \, \psi_{j,n} \quad \Rightarrow \quad \tilde{c}_i = \sum_{2^j \geqslant 2^{J_i}, n} \langle c_i \, , \, \psi_{j,n} \rangle \, \psi_{j,n} \ .$$

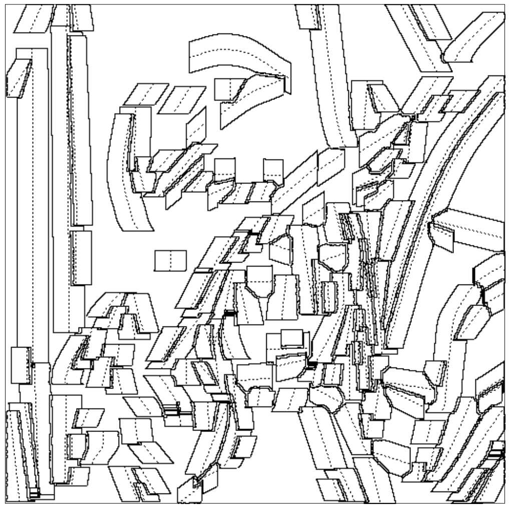
Approximation de la géométrie

- Approximation linéaire des c_i dans une base d'ondelettes 1D avec une échelle adaptée 2^{J_i} :

$$c_i = \sum_{j,n} \langle c_i \, , \, \psi_{j,n} \rangle \, \psi_{j,n} \quad \Rightarrow \quad \tilde{c}_i = \sum_{2^j \geqslant 2^{J_i}, n} \langle c_i \, , \, \psi_{j,n} \rangle \, \psi_{j,n} \ .$$

c_i et Ω_i $\Rightarrow$ $\tilde{c}_i$ et $\tilde{\Omega}_i$



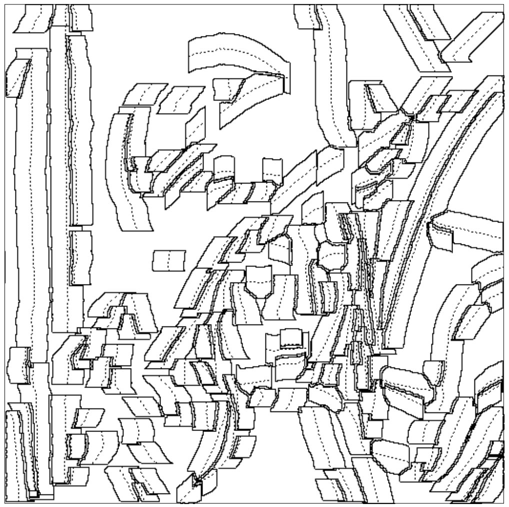


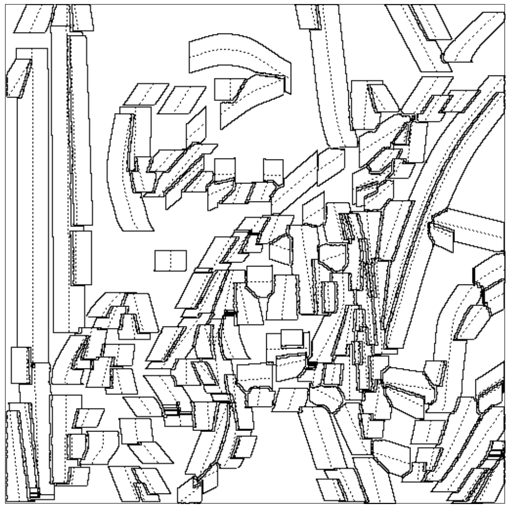
Approximation de la géométrie

- Approximation linéaire des c_i dans une base d'ondelettes 1D avec une échelle adaptée 2^{J_i} :

$$c_i = \sum_{j,n} \langle c_i\, ,\, \psi_{j,n} \rangle\, \psi_{j,n} \quad \Rightarrow \quad \tilde{c}_i = \sum_{2^j \geqslant 2^{J_i}, n} \langle c_i\, ,\, \psi_{j,n} \rangle\, \psi_{j,n}\ .$$

c_i et Ω_i $\Rightarrow$ $\tilde{c}_i$ et $\tilde{\Omega}_i$





- Modification du frame de bandelettes.

Approximation M-termes

Approximation M-termes

- Deux types de coefficients : géométrie et décomposition.

Approximation M-termes

- Deux types de coefficients : géométrie et décomposition.
- Géométrie : choix du frame par les échelles adaptées
  - $M_{g,i}$ coefficients d'ondelettes de c_i au dessus de l'échelle 2^{J_i}.
  - c_i et Ω_i sont remplacés par $\widetilde{c}_i$ et $\widetilde{\Omega}_i$.

Approximation M-termes

- Deux types de coefficients : géométrie et décomposition.
- Géométrie : choix du frame par les échelles adaptées
  - $M_{g,i}$ coefficients d'ondelettes de c_i au dessus de l'échelle 2^{J_i}.
  - c_i et Ω_i sont remplacés par $\widetilde{c}_i$ et $\widetilde{\Omega}_i$.
- Décomposition : coefficients plus grand que Δ :
  - $M_{b,i}$ coefficients pour les bandelettes sur le domaine $\tilde{\Omega}_i$,
  - $M_{w,C}$ coefficients pour les ondelettes sur le complément.

Approximation M-termes

- Deux types de coefficients : géométrie et décomposition.
- Géométrie : choix du frame par les échelles adaptées
  - $M_{g,i}$ coefficients d'ondelettes de c_i au dessus de l'échelle 2^{J_i}.
  - c_i et Ω_i sont remplacés par $\widetilde{c}_i$ et $\widetilde{\Omega}_i$.
- Décomposition : coefficients plus grand que Δ :
  - $M_{b,i}$ coefficients pour les bandelettes sur le domaine $\widetilde{\Omega}_i$,
  - $M_{w,C}$ coefficients pour les ondelettes sur le complément.
- L'approximation résultante f_M nécessite M coefficients avec

$$M = \sum_i \Big(M_{g,i} + M_{b,i} \Big) + M_{w,C} \ ,$$

Optimisation de la géométrie

Optimisation de la géométrie

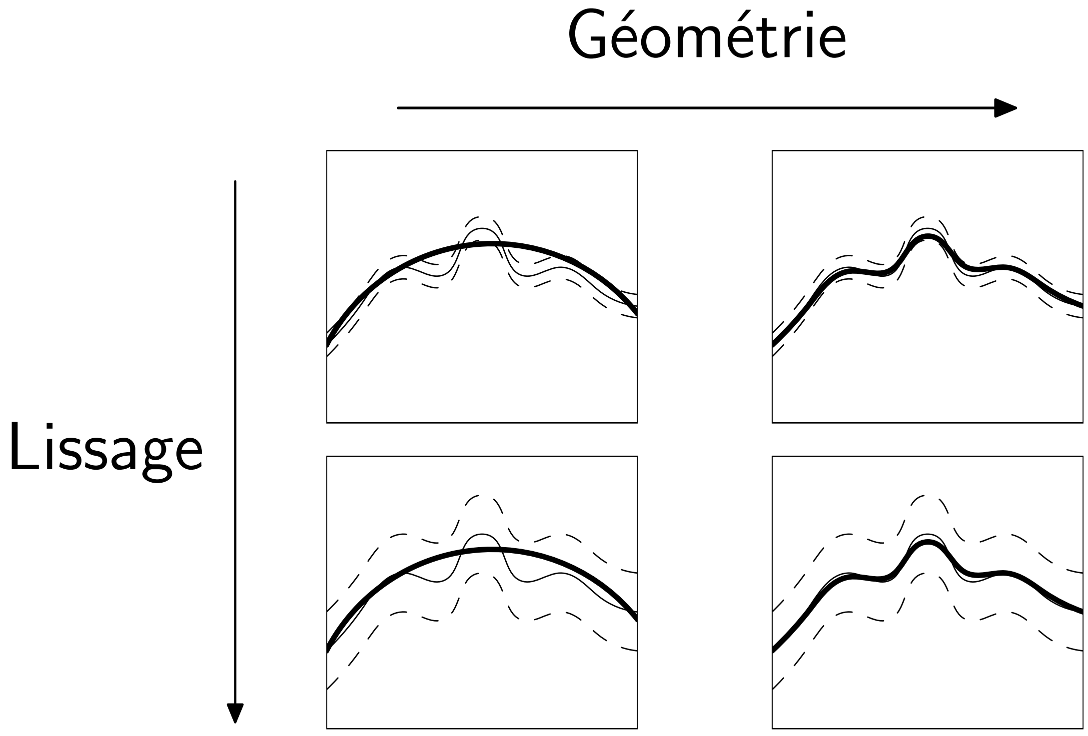
- Choix du frame qui conduit à la représentation la plus creuse.

Optimisation de la géométrie

- Choix du frame qui conduit à la représentation la plus creuse.
- Équilibre entre la géométrie et la décomposition.

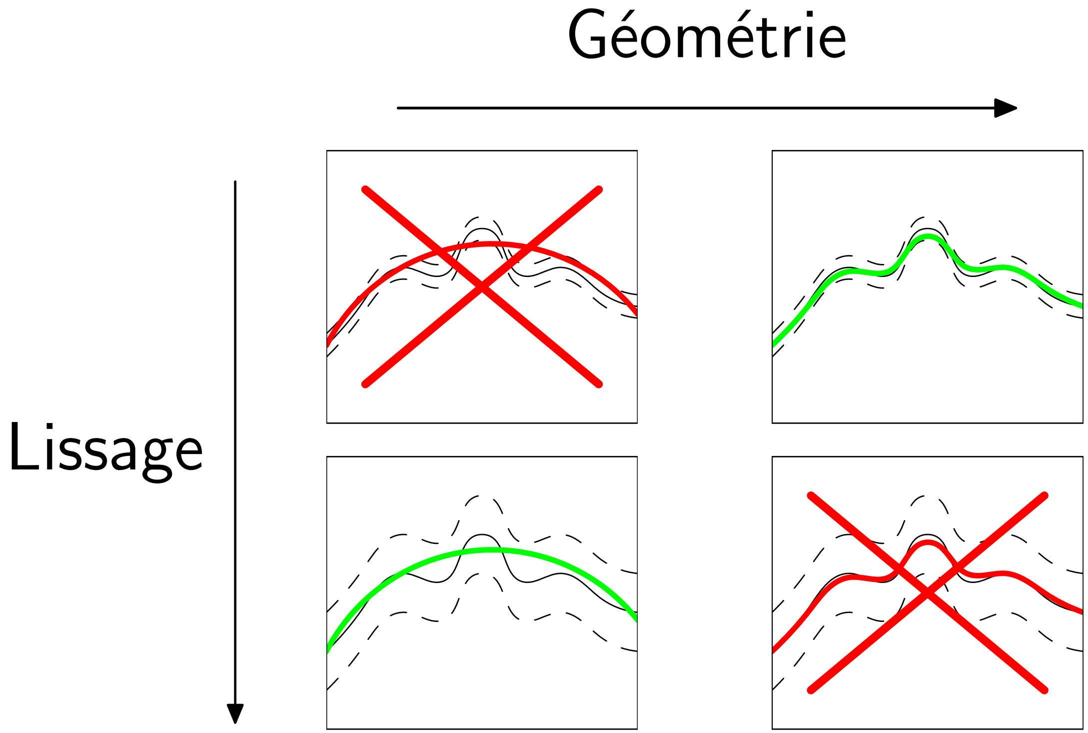
Optimisation de la géométrie

- Choix du frame qui conduit à la représentation la plus creuse.
- Équilibre entre la géométrie et la décomposition.



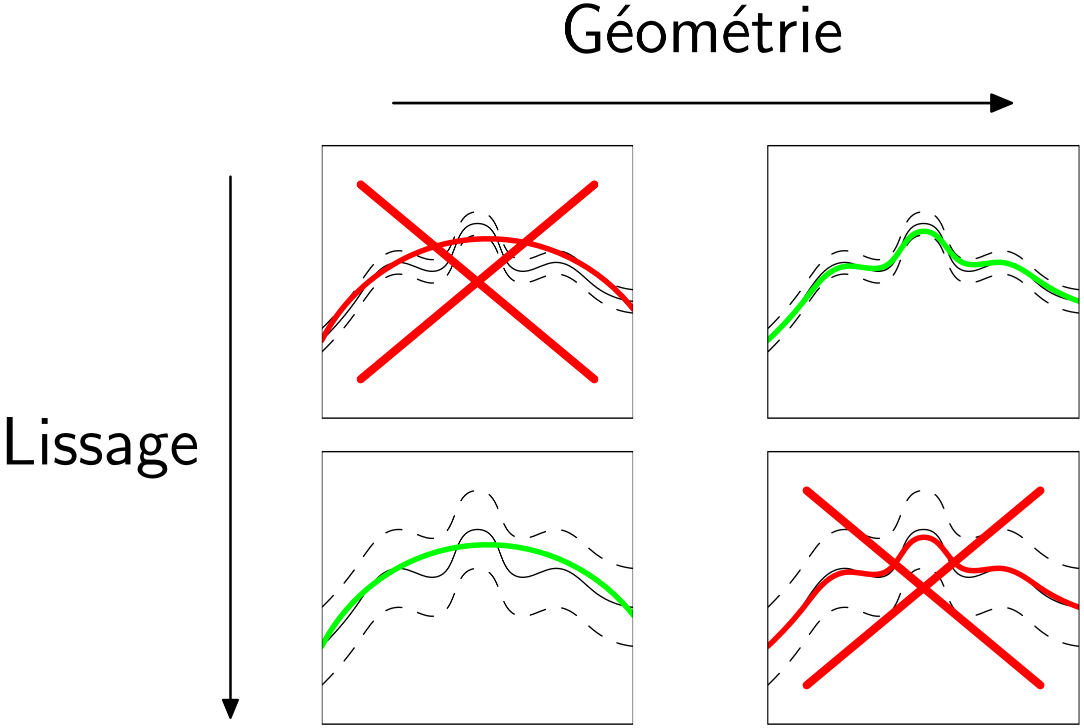
Optimisation de la géométrie

- Choix du frame qui conduit à la représentation la plus creuse.
- Équilibre entre la géométrie et la décomposition.



Optimisation de la géométrie

- Choix du frame qui conduit à la représentation la plus creuse.
- Équilibre entre la géométrie et la décomposition.



- Minimisation de $M = \sum_i \left(M_{g,i} + M_{b,i} \right) + M_{w,C}$ en minimisant $M_{g,i} + M_{b,i}$ pour chaque zone à seuil Δ fixé.

Approximation non-linéaire

Approximation non-linéaire

Théorème :

Soit f un fonction telle que, en dehors d'un ensemble de courbes dont les dérivées d'ordre α des paramétrisations normales sont bornées, les dérivées partielles d'ordre α sont bornées, il existe deux constantes K_1 et K_2 ne dépendant que de la fonction f, du noyau de lissage g et de l'ondelette ψ telles que pour tout ϵ si on connaît une détection à $\eta = \inf(\epsilon, s)$ près de la géométrie alors on peut construire une approximation $f_{s,\epsilon}$ de $f_s = g_s \star f$ avec $M_{s,\epsilon}$ coefficients où

$$M_{s,\epsilon} \leqslant K_1 \, \epsilon^{-1/\alpha} \tag{1}$$

$$\text{telle que} \qquad \|f_s - f_{s,\epsilon}\|_2^2 \leqslant K_2 \, \epsilon \tag{2}$$

$$\text{et donc} \qquad \|f_s - f_{s,\epsilon}\|_2^2 \leqslant K_1^\alpha K_2 \, M_{s,\epsilon}^{-\alpha} \tag{3}$$

où les constantes K_1 et K_2 ne dépendent que de la fonction f, du noyau de lissage h et des ondelettes utilisées.

Approximation non-linéaire

- **Théorème :**
Soit f une fonction $\mathcal{C}^\alpha$ en dehors d'un ensemble de courbes elles-même $\mathcal{C}^\alpha$, l'approximation $f_{s,M}$ de $f_s = g_s \star f$ avec M coefficients satisfait
$$\|f_s - f_{s,M}\|^2 \leqslant C\, M^{-\alpha} \ .$$
dès que la détection est suffisament précise.

Approximation non-linéaire

- **Théorème :**
  Soit f une fonction $\mathcal{C}^\alpha$ en dehors d'un ensemble de courbes elles-même $\mathcal{C}^\alpha$, l'approximation $f_{s,M}$ de $f_s = g_s \star f$ avec M coefficients satisfait
  $$\|f_s - f_{s,M}\|^2 \leqslant C\, M^{-\alpha} \ .$$
  dès que la détection est suffisament précise.
- Régularité α inconnue.

Approximation non-linéaire

- **Théorème :**
  Soit f une fonction $\mathcal{C}^\alpha$ en dehors d'un ensemble de courbes elles-même $\mathcal{C}^\alpha$, l'approximation $f_{s,M}$ de $f_s = g_s \star f$ avec M coefficients satisfait
  $$\|f_s - f_{s,M}\|^2 \leqslant C\, M^{-\alpha} \ .$$
  dès que la détection est suffisament précise.
- Régularité α inconnue.
- Noyau de lissage g_s inconnu.

Approximation non-linéaire

- **Théorème :**
  Soit f une fonction $\mathcal{C}^\alpha$ en dehors d'un ensemble de courbes elles-même $\mathcal{C}^\alpha$, l'approximation $f_{s,M}$ de $f_s = g_s \star f$ avec M coefficients satisfait
  $$\|f_s - f_{s,M}\|^2 \leqslant C\, M^{-\alpha} \ .$$
  dès que la détection est suffisament précise.
- Régularité α inconnue.
- Noyau de lissage g_s inconnu.
- Optimalité sous condition de détection.

Approximation non-linéaire

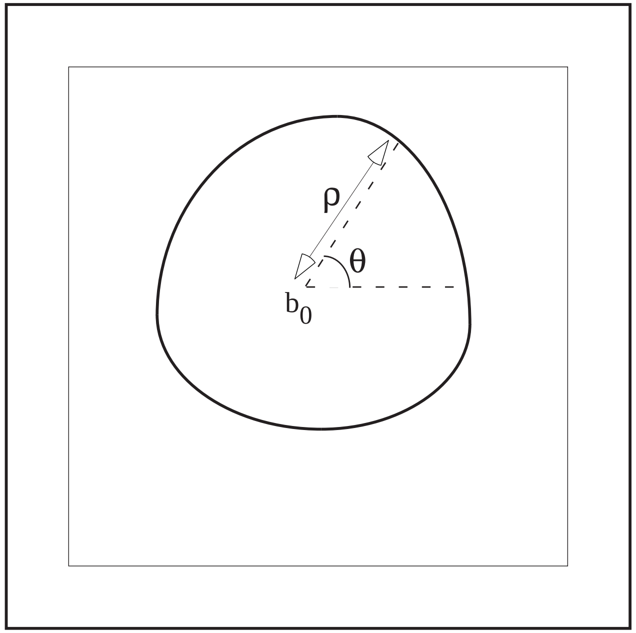
- **Théorème :**
  Soit f une fonction $\mathcal{C}^\alpha$ en dehors d'un ensemble de courbes elles-même $\mathcal{C}^\alpha$, l'approximation $f_{s,M}$ de $f_s = g_s \star f$ avec M coefficients satisfait
  $$\|f_s - f_{s,M}\|^2 \leqslant C\,M^{-\alpha} \ .$$
  dès que la détection est suffisament précise.
- Régularité α inconnue.
- Noyau de lissage g_s inconnu.
- Optimalité sous condition de détection.
- Amélioration par rapport :
  - aux ondelettes : $\|f_s - f_{s,M}\|^2 \leqslant C\,M^{-1}$,
  - aux *curvelets* : $\|f_s - f_{s,M}\|^2 \leqslant C\,(\log M)\,M^{-2}$.

Approximation non-linéaire

- **Théorème :**
  Soit f une fonction $\mathcal{C}^\alpha$ en dehors d'un ensemble de courbes elles-même $\mathcal{C}^\alpha$, l'approximation $f_{s,M}$ de $f_s = g_s \star f$ avec M coefficients satisfait
  $$\|f_s - f_{s,M}\|^2 \leqslant C\, M^{-\alpha} \ .$$
  dès que la détection est suffisament précise.
- Régularité α inconnue.
- Noyau de lissage g_s inconnu.
- Optimalité sous condition de détection.
- Amélioration par rapport :
  - aux ondelettes : $\|f_s - f_{s,M}\|^2 \leqslant C\, M^{-1}$,
  - aux *curvelets* : $\|f_s - f_{s,M}\|^2 \leqslant C\, (\log M)\, M^{-2}$.
- Détection de la géométrie ?

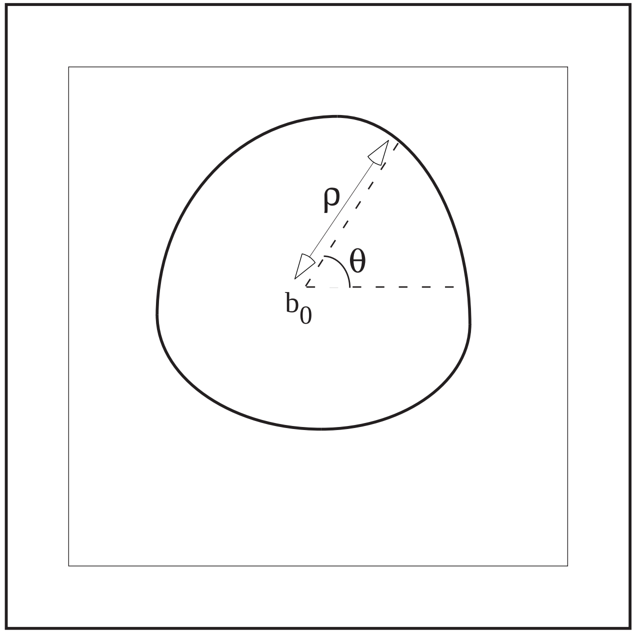
Le cas des fonctions étoilées

Le cas des fonctions étoilées



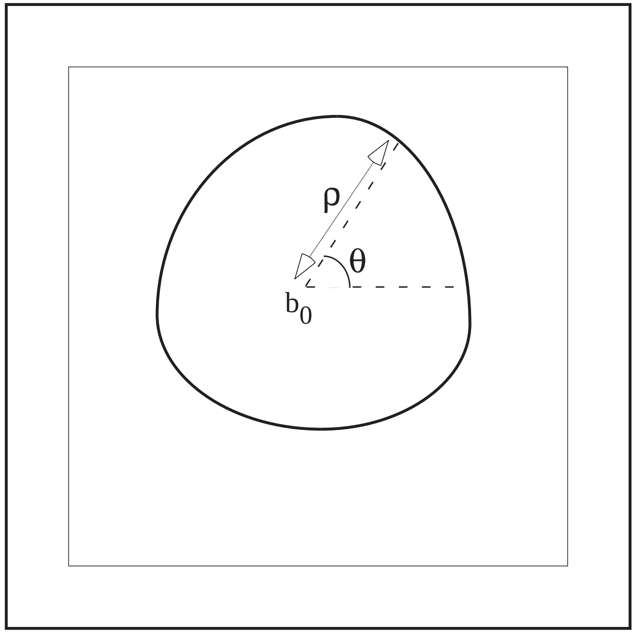
- Modèle simplifié : absence de coin.

Le cas des fonctions étoilées



- Modèle simplifié : absence de coin.
- Preuve de la précision de la détection de la géométrie utilisant la direction du gradient en des maxima locaux.

Le cas des fonctions étoilées



- Modèle simplifié : absence de coin.
- Preuve de la précision de la détection de la géométrie utilisant la direction du gradient en des maxima locaux.
- Géométrie et représentation optimale.

Application au débruitage

PSNR $= 20{,}2$ dB

Originale

Bruitée

Bandelettes

PSNR $= 30{,}2$ dB

Ondelettes

PSNR $= 29{,}7$ dB

Application au débruitage

Originale

PSNR $= 30{,}2\,$dB

Bruitée

Bandelettes

PSNR $= 30{,}2\,$dB

Ondelettes

PSNR $= 29{,}7\,$dB

Améliorations

Améliorations

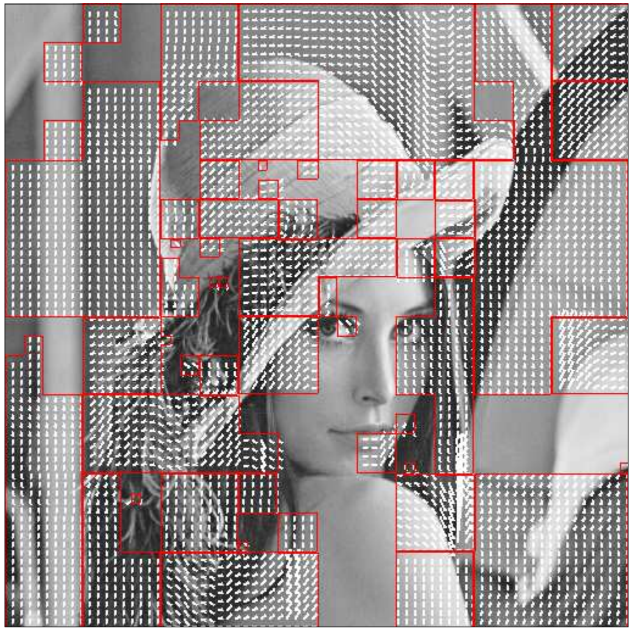
- Redondance :
  - D'un frame à une *base*.
  - Filtrage adapté à travers les frontières.

Améliorations

- Redondance :
  - D'un frame à une *base*.
  - Filtrage adapté à travers les frontières.
- Géométrie :
  - Recherche de meilleure base par un algorithme CART.
  - Découpage en carrés dyadiques suivie d'une fusion.
  - Partition avant estimation du flot.

Améliorations

- Redondance :
  - D'un frame à une *base*.
  - Filtrage adapté à travers les frontières.
- Géométrie :
  - Recherche de meilleure base par un algorithme CART.
  - Découpage en carrés dyadiques suivie d'une fusion.
  - Partition avant estimation du flot.

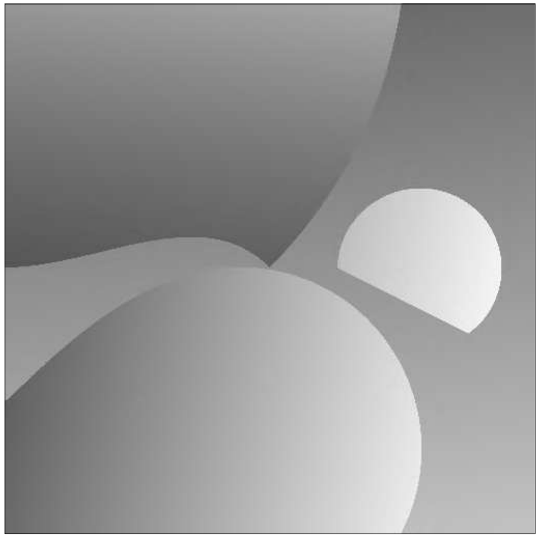


Approximation

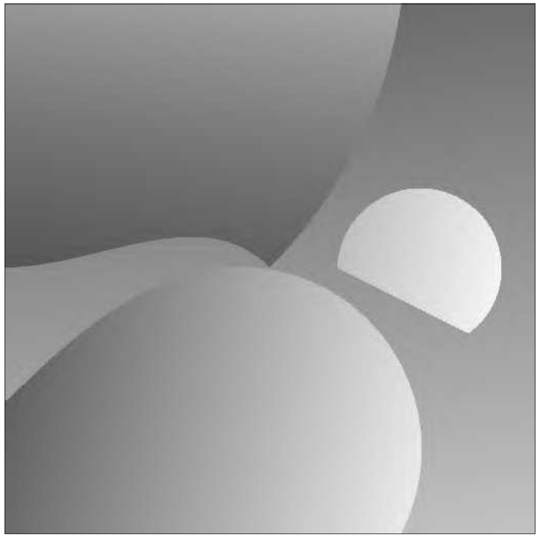
Approximation

PSNR $= 50{,}15\,\text{dB}$ PSNR $= 45{,}73\,\text{dB}$

$M = 2370$



Bandelettes



Ondelettes

$M = 4001$

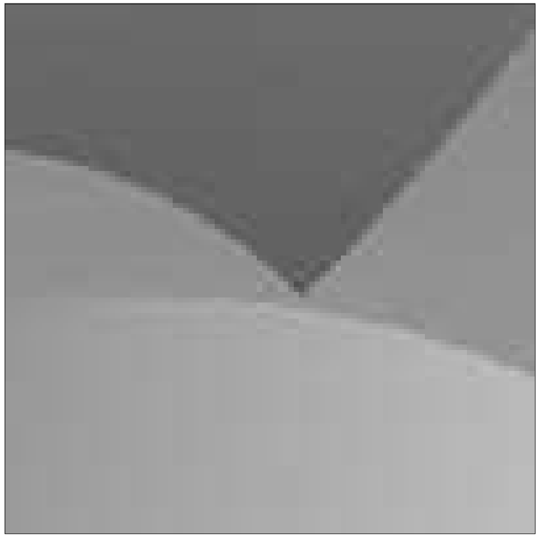
Ondelettes

Originale

Approximation

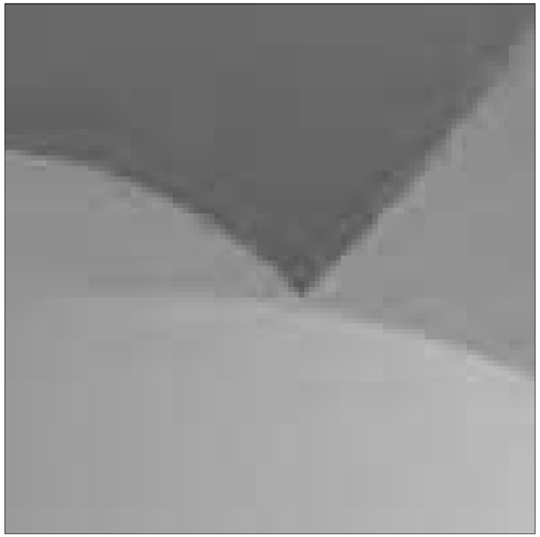
$M = 2370$

$\text{PSNR} = 50{,}15\,\text{dB}$



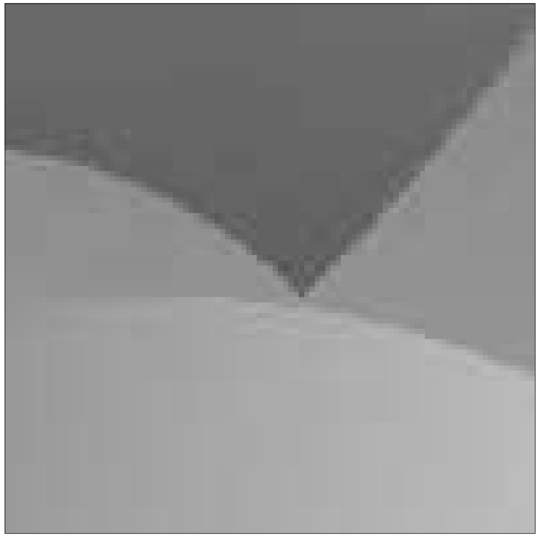
Bandelettes

$\text{PSNR} = 45{,}73\,\text{dB}$

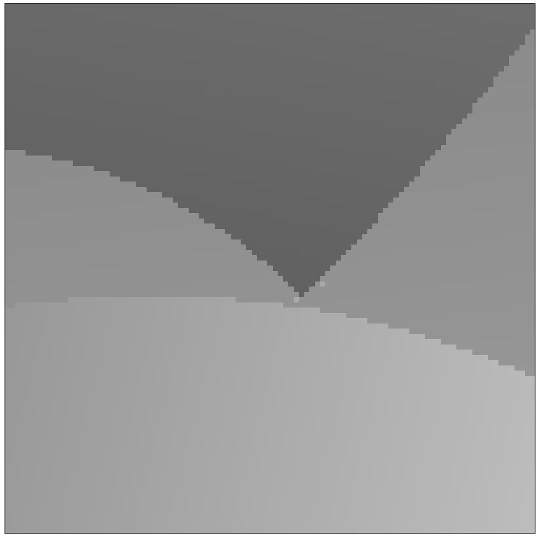


Ondelettes

$M = 4001$

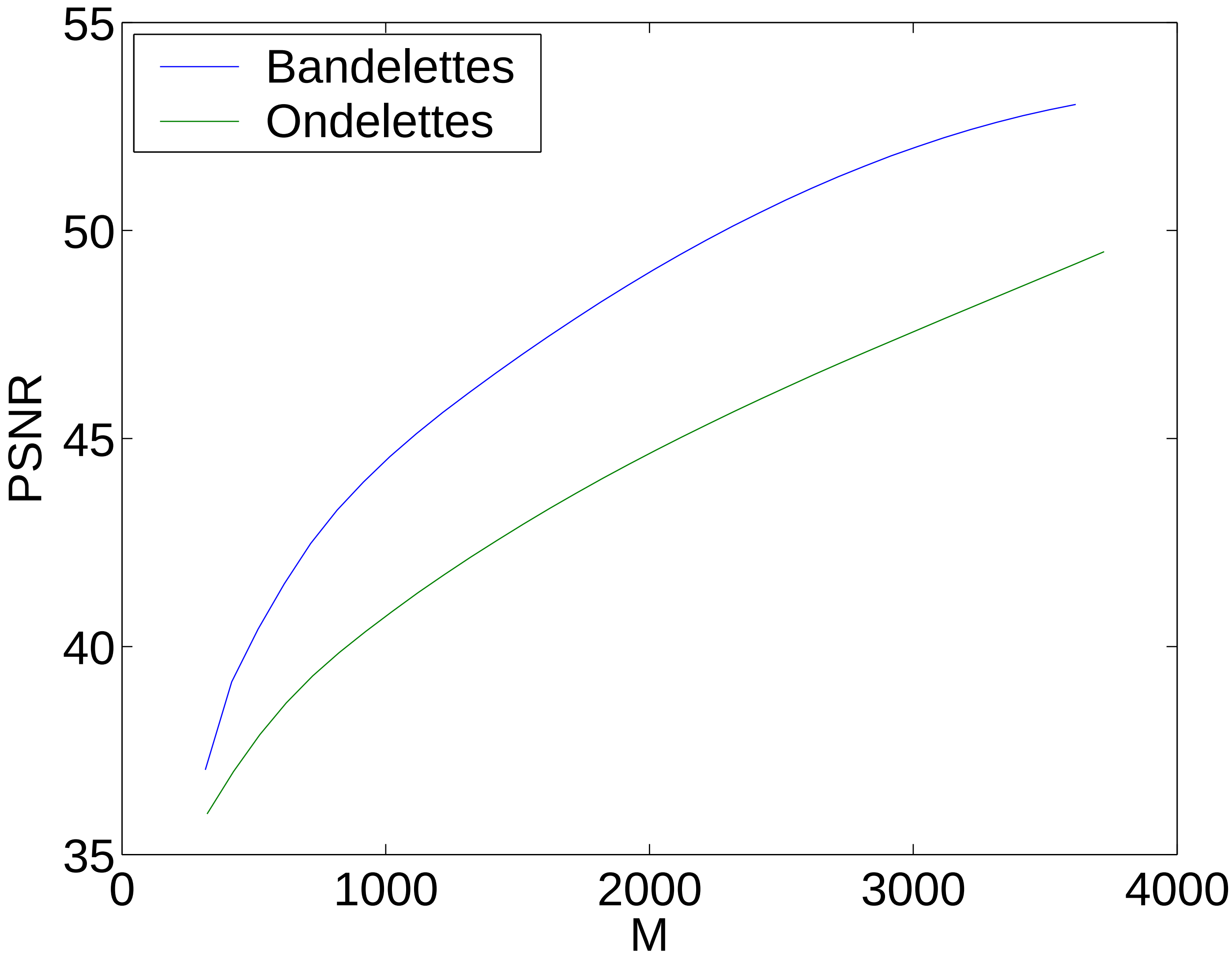


Ondelettes



Originale

Approximation



Approximation

PSNR $= 35{,}04$ dB

Bandelettes

PSNR $= 34{,}64$ dB

Ondelettes

$M = 11516$

Cosinus

PSNR $= 33{,}51$ dB

Originale

Approximation

PSNR $= 35{,}04\,$dB

Bandelettes

PSNR $= 34{,}64\,$dB

Ondelettes

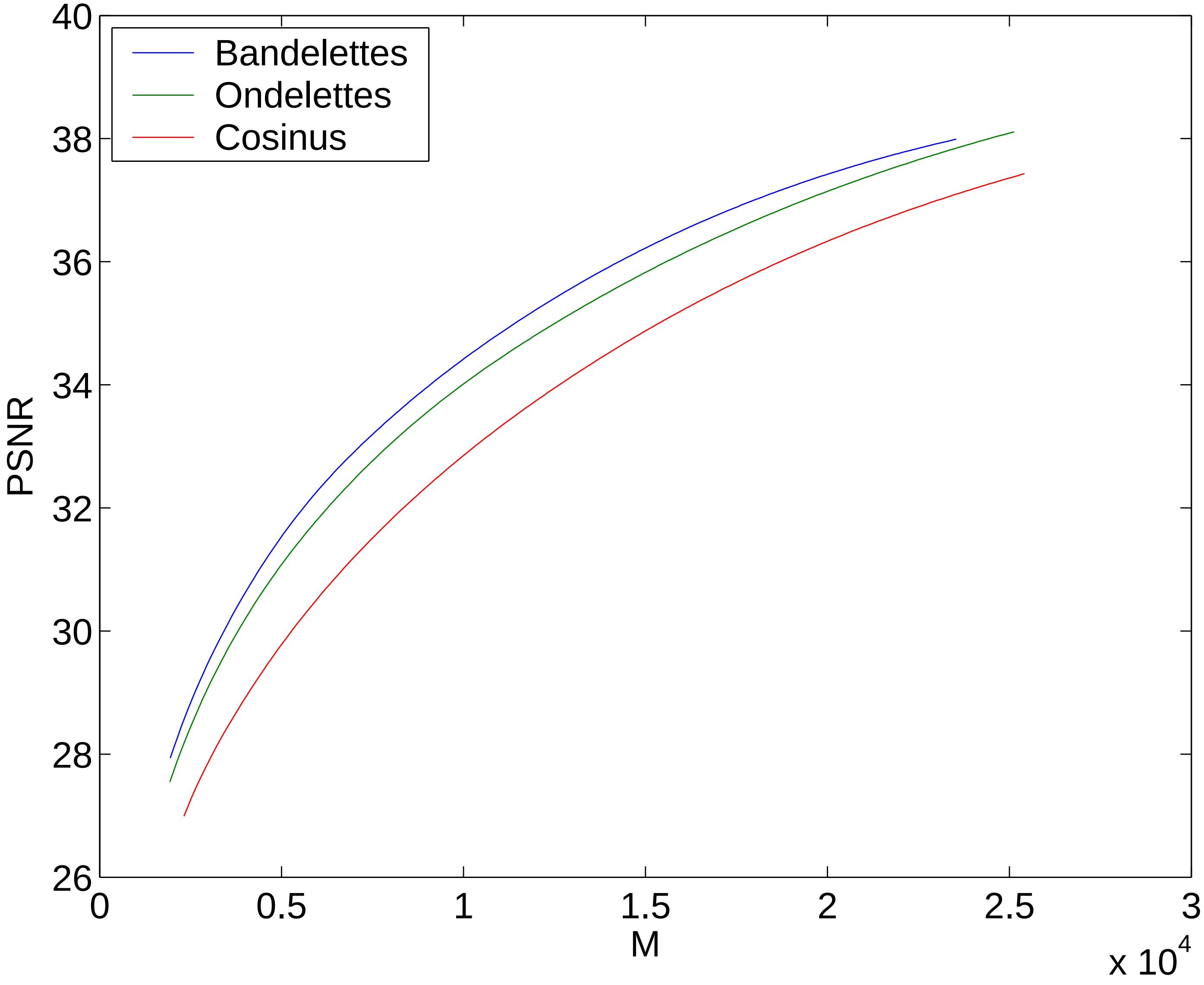
$M = 11516$

Cosinus

PSNR $= 33{,}51\,$dB

Originale

Approximation



Approximation

PSNR $= 31{,}47$ dB

Bandelettes

PSNR $= 31{,}06$ dB

Ondelettes

$M = 6709$

Cosinus

PSNR $= 30{,}91$ dB

Originale

Approximation

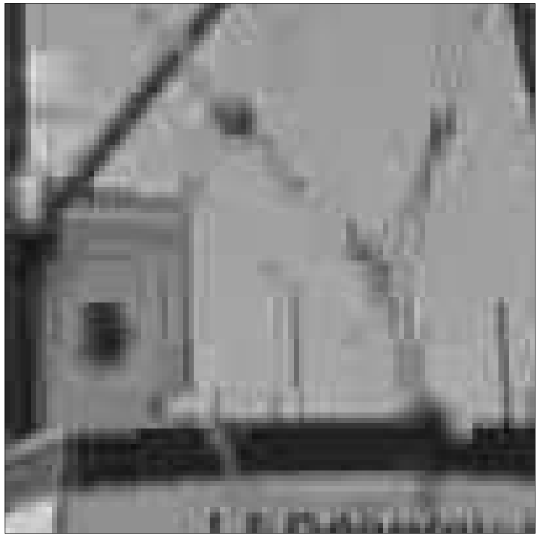
$M = 6709$

PSNR $= 31{,}47$ dB

Bandelettes

PSNR $= 31{,}06$ dB

Ondelettes

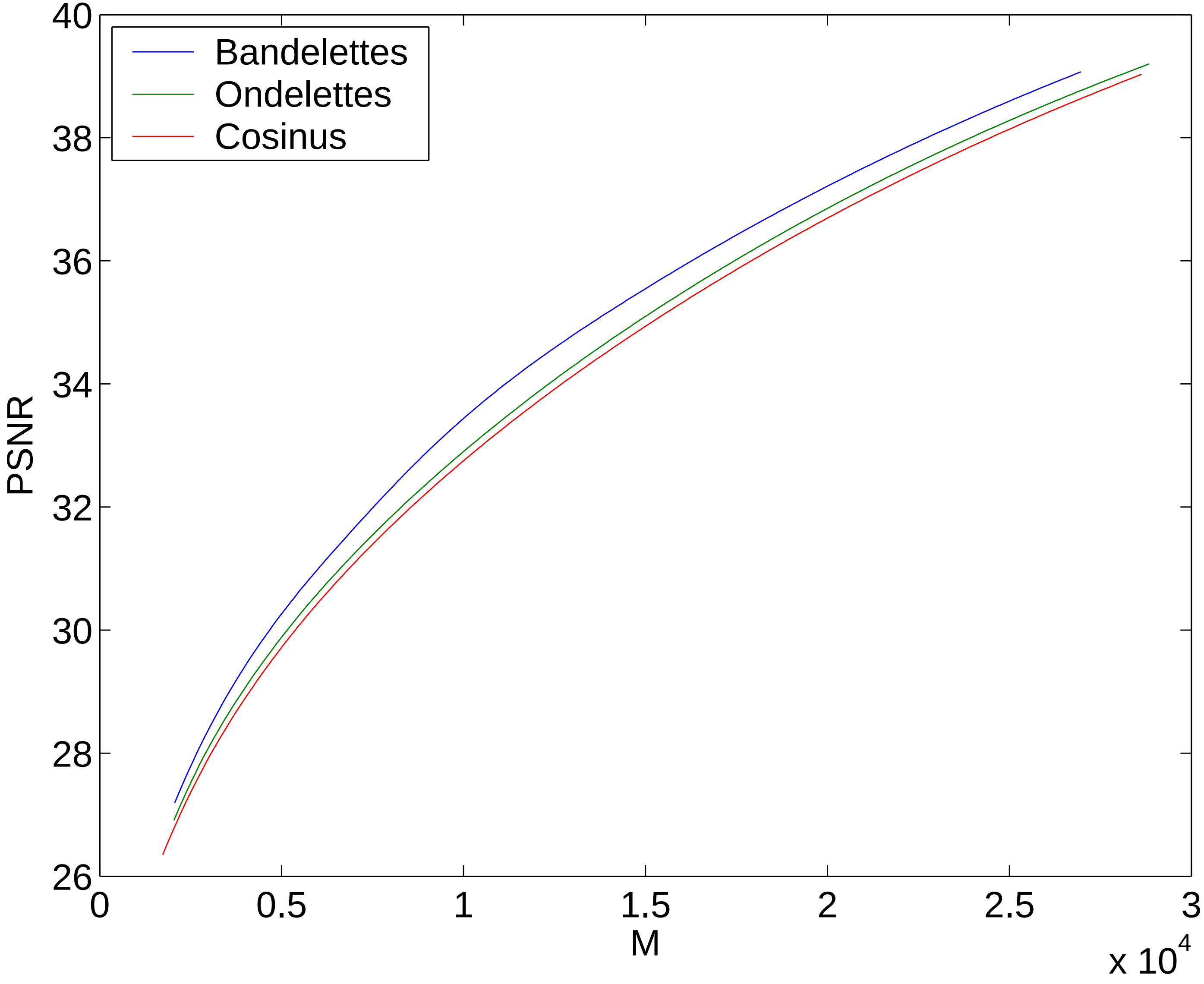


Cosinus

PSNR $= 30{,}91$ dB

Originale

Approximation



Conclusion

Conclusion

- Les bandelettes permettent une représentation creuse des images dans un frame (ou une base) adapté à la géométrie.

Conclusion

- Les bandelettes permettent une représentation creuse des images dans un frame (ou une base) adapté à la géométrie.
- Applications dans le traitement du signal :
  - Débruitage et restauration par seuillage.
  - Compression d'image.
  - Compression video.
  - Classification, indexation,. . .

Conclusion

- Les bandelettes permettent une représentation creuse des images dans un frame (ou une base) adapté à la géométrie.
- Applications dans le traitement du signal :
  - Débruitage et restauration par seuillage.
  - Compression d'image.
  - Compression video.
  - Classification, indexation,...
- Questions mathématiques :
  - Consistance statistique de l'estimation de la géométrie.
  - Théorèmes d'approximation dans des espaces fonctionnels adaptés.
  - Extension aux dimensions supérieures.