

Erwan Le Pennec
lepenec@math.jussieu.fr

Analyse des Séries Temporelles

M1 - 2009

Université Paris Diderot

Table des matières

Avant propos	3
1 Série de Fourier	5
1.1 Introduction	5
1.2 Base de Fourier	6
1.3 Quelques rappels sur les séries de Fourier	10
2 Transformée de Fourier sur \mathbb{R}	11
2.1 Introduction	11
2.2 Transformée de Fourier sur $L^1(\mathbb{R})$	12
2.3 Transformée de Fourier sur $L^2(\mathbb{R})$	15
2.4 Transformée de Fourier dans \mathcal{S}	17
2.5 Transformée de Fourier dans \mathcal{S}'	18
3 Traitement du signal analogique	21
3.1 Introduction	21
3.2 Filtrage stationnaire linéaire, réponse impulsionnelle et fonction de transfert	22
3.3 Filtrés idéaux et synthèse de filtre	24
3.4 Exemples	28
4 Échantillonnage et signaux discrets	31
4.1 Introduction	31
4.2 Distribution périodique et transformée de Fourier	32
4.3 Échantillonnage	35
5 Traitement du signal discret	43
5.1 Introduction	43
5.2 Filtrage discret homogène	44
5.3 Transformée en z et synthèse de filtre discret	45
5.4 Signaux finis	48
6 Traitement du signal aléatoire	49
6.1 Introduction	49
6.2 Processus stationnaire au sens large	50
6.3 Filtrage de Wiener	55
6.4 Filtrés auto-régressifs	58

Avant propos

Ce document correspond au cours de Master 1 d'« Analyse des Séries Temporelles » que j'ai donné à l'université Paris Diderot en 2007-2008 et 2008-2009. L'objectif y était de reprendre l'analyse de Fourier avec pour objectif l'analyse des séries temporelles dans un cadre aléatoire avec comme sommets le filtrage de Wiener et les processus auto-régressifs. Le coeur du cours est le traitement des signaux discrets mais le traitement du signal continu est abordé « en passant ». La question de l'échantillonnage y est notamment présente avec un chapitre montrant comment les distributions permettent un éclairage agréable du théorème de Shannon.

Cette version correspond plus ou moins aux notes manuscrites que j'avais mise en ligne pendant le cours. Il ne s'agit pas d'une version « définitive » mais plutôt d'un document de travail mis à la disposition des autres... N'hésitez pas à me contacter si vous trouvez des fautes, des imprécisions ou pour toute autre question !

Ce cours repose pour beaucoup sur les notes manuscrites que Francis Comets m'a transmises en même temps que le cours ainsi que sur les notes de TDs offertes par Thierry Meyre. Inspiré par le cours d'ANalyse en FRÉquence de l'ENPC, j'y ai ajouté une touche de distributions et sans doute pas mal d'erreurs. En plus de ces deux sources principales, on pourra trouver des morceaux inspirés du cours de M1 « Processus stationnaires et prévision » de Jean Lacroix et Paolo Baldi. Pour la partie distribution, deux références glanées sur le Web m'ont été d'un grand secours « Advance Fourier Analysis » de Jan Wiegerinck et « Distribution Theory (Generalized Functions) » de Ivan F. Wilde. Je remercie également Stéphane Boucheron et Danièle Tibi pour leurs différents commentaires sur le cours qui m'ont souvent obligé à préciser un peu les choses...

Je finirai avec une petite pensée pour les 4 générations d'étudiants qui ont du « subir » cette enseignement avec moi soit en TD soit en cours... Je sais que certains d'entre eux ont un peu souffert, j'espère juste qu'ils n'en gardent pas un trop mauvais souvenir...

Erwan LE PENNEC

Chapitre 1

Série de Fourier

Sommaire

1.1	Introduction	5
1.2	Base de Fourier	6
1.2.1	Base orthonormée de Fourier	6
1.2.2	Preuve par le noyau de Poisson	6
1.3	Quelques rappels sur les séries de Fourier	10

1.1 Introduction

Historique Aux alentours de 1815, Joseph Fourier décompose une fonction 1-périodique en somme de sinus et de cosinus afin de résoudre l'équation de la chaleur sur une tige.

Cadre Fonctions sur $[0, 1[$ \equiv fonctions sur \mathbb{R} 1-périodique.

Topologie : $\Pi = \mathbb{R}/\mathbb{Z} \simeq [0, 1[$ compact

⚡ La restriction sur $[0, 1[$ d'une fonction continue sur \mathbb{R} n'est continue pour cette topologie que si $f(0) = f(1)$!

Notation

$$\int_{\Pi} f(x) dx = \int_0^1 f(x) dx = \int_a^{a+1} f(x) dx$$

$$L^2(\Pi, dx) := \left\{ f : \Pi \rightarrow \mathbb{C}, \int_{\Pi} \|f(x)\|^2 dx < +\infty \right\}$$

Espace de Hilbert pour le produit scalaire $\langle f, g \rangle = \int_{\Pi} f(x) \overline{g(x)} dx$.

On définit les caractères

$$\gamma_n(x) := e^{i2\pi nx} \text{ qui sont } \mathbf{C}^\infty \text{ sur } \Pi$$

Pulsation : $2\pi n$ / Fréquence : n / Période $1/n$

1.2 Base de Fourier

1.2.1 Base orthonormée de Fourier

Proposition 1. $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est une suite orthonormée.

Démonstration.

$$\langle \gamma_n, \gamma_m \rangle = \int_{\Pi} e^{i2\pi(n-m)x} dx = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq m \\ 1 & \text{si } n = m \end{cases}$$

□

Théorème 1. La famille $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est totale dans $L^2(\pi, dx)$.

Corollaire 1. La famille $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est une base de Riesz de $L^2(\pi, dx)$ (on parlera par commodité de base orthonormée).

Démonstration. $F = \{\text{Polynômes trigonométriques avec } P(0) = P(1)\} \subset \mathbf{C}(\Pi, \mathbb{C}) \subset L^2(\Pi, dx)$

Le théorème de Stone-Weierstrass sur Π compact s'applique à F car

- $F \ni$ les constantes,
- $f, g \in F \implies fg \in F$ et $\bar{f} \in F$ et
- $\forall x, y \in \Pi, \exists f \in F, f(x) \neq f(y)$.

On en déduit que F est dense dans $\mathbf{C}(\Pi)$ pour $\|\cdot\|_{\infty}$, puis que F est dense dans $\mathbf{C}(\Pi)$ pour $\|\cdot\|_2$ puisque $\|\cdot\|_2 \leq \|\cdot\|_{\infty}$. Enfin, F est dense dans $L^2(\Pi)$ pour $\|\cdot\|_2$ puisque $\mathbf{C}(\Pi)$ l'est. □

Définition On pose pour $f \in L^2(\Pi)$,

$$\widehat{f}[n] = \langle f, \gamma_n \rangle = \int_0^1 f(x) e^{-i2\pi nx} dx \quad \text{et} \quad S_N f(x) = \sum_{n=-N}^N \widehat{f}[n] \gamma_n(x).$$

$\widehat{f}[n]$ est appelé le n ième coefficient de Fourier de f . $S_N f$ est la somme partielle de Fourier jusqu'à la fréquence N .

La famille γ_n étant une base hilbertienne de $L^2(\Pi)$, on en déduit $S_N f \xrightarrow{L^2} f$. En d'autres termes, f est égale à sa série de Fourier :

$$f \stackrel{L^2}{=} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \langle f, \gamma_n \rangle = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{f}[n] e^{2i\pi n \cdot}$$

1.2.2 Preuve par le noyau de Poisson

La preuve du caractère totale de $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est assez abstraite. On propose maintenant une preuve un peu plus constructive qui est l'occasion de reprendre des techniques classiques en analyse.

Preuve plus constructive par le noyau de Poisson. Le noyau de Poisson est défini sur Π par

$$P_r(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} r^{|n|} \gamma_n(x)$$

pour $r \in [0, 1[$. Cette fonction est bien définie car la série est uniformément convergente pour ces valeurs de r .

L'idée est alors de montrer que

$$P_r \star f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} r^{|n|} \widehat{f}[n] \gamma_n(x)$$

qui reste dans L^2 puis que $P_r \star f \xrightarrow{L^2} f$.

Proposition 2.

$$1) P_r(x) = \frac{1-r^2}{|1-r\gamma_1(x)|^2} \geq 0 \quad \text{et} \quad 2) \int_{\Pi} P_r(x) dx = 1$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} 1) P_r(x) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} r^{|n|} \gamma_n(x) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} r^n (\gamma_1(x))^n + \sum_{n=1}^{+\infty} r^n (\gamma_{-1}(x))^n \\ &= 1 + \frac{r\gamma_1(x)}{1-r\gamma_1(x)} + \frac{r\gamma_{-1}(x)}{1-r\gamma_{-1}(x)} = 1 + r \frac{\gamma_1(x) + \gamma_{-1}(x) - 2r\gamma_1(x)\gamma_{-1}(x)}{(1-r\gamma_1(x))(1-r\gamma_{-1}(x))} \\ &= \frac{(1-r\gamma_1(x))(1-r\gamma_{-1}(x)) + r(\gamma_1(x) + \gamma_{-1}(x)) - 2r^2}{|1-r\gamma_1(x)|^2} \\ P_r(x) &= \frac{1-r^2}{|1-r\gamma_1(x)|^2} \end{aligned}$$

$$2) \int_{\Pi} P_r(x) dx = \int_{\Pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} r^{|n|} \gamma_n(x) dx = \sum_{n \in \mathbb{Z}} r^{|n|} \int_{\Pi} \gamma_n(x) dx = 1$$

où l'on a utilisé la convergence normale de la somme (ce qui implique sa convergence dans L^1). \square

On remarque que $P_r(x) \xrightarrow[r \rightarrow 1]{} 0$ si $x \neq 0$. P_r est donc une approximation de l'unité (P_r converge vers le dirac δ_0 au sens des distributions).

Proposition 3. *Si g est dans $L^1(\Pi)$ et est continue en 0 alors*

$$\int_{\Pi} P_r(x) g(x) dx \xrightarrow[r \rightarrow 1]{} g(0).$$

Démonstration. Soit $\epsilon > 0$, il existe un voisinage \mathcal{V} de 0 tel que $\forall x \in \mathcal{V}, |g(x) - g(0)| \leq \epsilon$.
On a alors

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Pi} P_r(x)g(x)dx - g(0) \right| &= \left| \int_{\Pi} P_r(x)(g(x) - g(0))dx \right| \\ &\leq \int_{\Pi} P_r(x)|g(x) - g(0)|dx \\ &\leq \int_{\mathcal{V}} P_r(x)|g(x) - g(0)|dx + \int_{\Pi \setminus \mathcal{V}} P_r(x)|g(x) - g(0)|dx \\ &\leq \epsilon + \|g(x) - g(0)\|_1 \times \sup_{\Pi \setminus \mathcal{V}} P_r(x) \end{aligned}$$

On note alors que, comme $\Pi \setminus \mathcal{V}$ ne contient pas 0, $\sup_{\Pi \setminus \mathcal{V}} P_r(x) \xrightarrow{r \rightarrow 1} 0$ et donc qu'il existe r_ϵ tel que $\forall r > r_\epsilon$,

$$\left| \int_{\Pi} P_r(x)g(x)dx - g(0) \right| \leq 2\epsilon.$$

□

Proposition 4. Soit $f \in L^2(\Pi)$,

$$1) P_r \star f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} r^{|n|} \widehat{f}[n] \gamma_n(x) \in L^2(\Pi) \quad \text{et} \quad 2) P_r \star f \xrightarrow{L^2} f$$

Démonstration.

$$1) P_r \star f = \langle f, P_r(x - \cdot) \rangle$$

qui est bien défini car $P_r(x - \cdot)$ est dans $L^2(\Pi)$

$$= \langle f, \sum_{n \in \mathbb{Z}} r^{|n|} \gamma_n(x) \gamma_{-n}(\cdot) \rangle$$

La convergence de la somme étant absolue dans L^2

$$\begin{aligned} &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} r^{|n|} \gamma_{-n}(x) \langle f, \gamma_{-n} \rangle \\ P_r \star f &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} r^{|n|} \gamma_{-n}(x) \widehat{f}[-n] \end{aligned}$$

Cette fonction est dans L^2 car elle s'obtient à partir de la projection de f sur l'espace engendré par les γ_n en diminuant la valeur absolue des coefficients dans la base de cet espace constituée des γ_n .

$$\begin{aligned} 2) |P_r \star f(x) - f(x)|^2 &= \left| \int_{\Pi} P_r(u)(f(x-u) - f(x))du \right|^2 \\ &= \left| \int_{\Pi} (P_r(u))^{1/2} (P_r(u))^{1/2} (f(x-u) - f(x))du \right|^2 \\ &\leq \int_{\Pi} P_r(u) |f(x-u) - f(x)|^2 du \times \int_{\Pi} P_r(u) du \\ &\leq \int_{\Pi} P_r(u) |f(x-u) - f(x)|^2 du \end{aligned}$$

On en déduit donc

$$\begin{aligned}\|P_r \star f - f\|_2^2 &= \int_{\Pi} |P_r \star f(x) - f(x)|^2 dx \\ &\leq \int_{\Pi} \int_{\Pi} P_r(u) |f(x-u) - f(x)|^2 du dx\end{aligned}$$

Toutes les fonctions étant positives on peut appliquer Fubini

$$\|P_r \star f - f\|_2^2 \leq \int_{\Pi} P_r(u) \|f - \tau_u f\|_2^2 du$$

où $\tau_u f$ est obtenue en translatant la fonction f de u .

Il reste alors à montrer que $\|f - \tau_u f\|_2^2 = g(u)$ est une fonction de L^1 continue en 0. Ceci s'obtient assez facilement.

D'une part, $\|f - \tau_u f\|_2^2 \leq 2(\|f\|_2^2 + \|\tau_u f\|_2^2) = 4\|f\|_2^2$ et donc $g \in L^\infty(\Pi) \subset L^1(\Pi)$. D'autre part, pour toute fonction $\tilde{f} \in L^2$,

$$\begin{aligned}\|f - \tau_u f\|_2 &\leq \|f - \tilde{f}\|_2 + \|\tilde{f} - \tau_u \tilde{f}\|_2 + \|\tau_u \tilde{f} - \tau_u f\|_2 \\ &\leq 2\|f - \tilde{f}\|_2 + \|\tilde{f} - \tau_u \tilde{f}\|_2\end{aligned}$$

On conclut alors en utilisant la densité des fonctions uniformément continues dans $L^2(\Pi)$ qui satisfont clairement $\|\tilde{f} - \tau_u \tilde{f}\|_2 \xrightarrow{u \rightarrow 0} 0$. \square

On en déduit donc que si $f \in L^2$ telle que $\forall n, \langle f, \gamma_n \rangle = 0$ alors $P_r \star f = 0$ et par passage à la limite $f = 0$.

Ceci conclut la preuve de la "totalité" de la famille γ_n . \square

Bilan

$$\forall f \in L^2(\Pi), f \stackrel{L^2}{=} \sum_n \widehat{f}[n] \gamma_n$$

De plus, la transformée de Fourier sur $L^2(\Pi)$

$$\begin{aligned}f &\mapsto \widehat{f} \\ L^2(\Pi) &\rightarrow \ell^2(\mathbb{Z})\end{aligned}$$

est une isométrie linéaire bijective d'inverse

$$\begin{aligned}c &\rightarrow \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n \gamma_n \\ \ell^2(\mathbb{Z}) &\rightarrow L^2(\Pi)\end{aligned}$$

On appelle propriété de Bessel-Parseval, la relation

$$\int_{\Pi} \|f(x)\|^2 dx = \|f\|_2^2 = \|\widehat{f}\|_2^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\widehat{f}[n]|^2.$$

1.3 Quelques rappels sur les séries de Fourier

Convergence et régularité $a \in \ell^1 \implies \sum_n a_n \gamma_n$ converge uniformément vers une fonction continue. On en déduit que si $\widehat{f} \in \ell^1$ alors f est continue.

De manière générale, on a une “équivalence” entre \widehat{f} décroît vite en l’infini et f est régulière...

Rieman-Lebesgue $f \in L^1 \implies \widehat{f}[n] \rightarrow 0$. (On remarque que $f \in L^1$ suffit pour assurer l’existence des coefficients de Fourier mais n’implique pas que la suite des coefficients soit dans ℓ^2 .)

Noyau de Fejer $J_N = \sum_{n=-N}^N e^{2i\pi n}$, $S_N = f \star J_N = \sum_{n=-N}^N \widehat{f}[n] \gamma_n$,

$$f \in L^1 \implies \frac{S_1 + \dots + S_N}{N} \xrightarrow{L^1} f.$$

Dirichlet f dérivable à gauche et à droite en $x_0 \implies S_N f(x_0) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \frac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2}$.

Chapitre 2

Transformée de Fourier sur \mathbb{R}

Sommaire

2.1	Introduction	11
2.2	Transformée de Fourier sur $L^1(\mathbb{R})$	12
2.2.1	Définition et propriétés	12
2.2.2	Convolution	13
2.2.3	Formule d'inversion de \mathcal{F}	15
2.3	Transformée de Fourier sur $L^2(\mathbb{R})$	15
2.3.1	Cadre	15
2.3.2	Construction	16
2.4	Transformée de Fourier dans \mathcal{S}	17
2.4.1	Motivation	17
2.4.2	Espace de Schwartz	17
2.4.3	Transformée de Fourier	17
2.4.4	Parseval-Bessel	18
2.5	Transformée de Fourier dans \mathcal{S}'	18
2.5.1	Distributions	18
2.5.2	Transformée de Fourier sur \mathcal{S}'	19

2.1 Introduction

Histoire Fourier, Cauchy et Poisson aux environs de 1810-1820.

Heuristique Soit f une fonction réelle, sous de bonnes hypothèses, on peut définir $F_T = f \times \mathbf{1}_{[-T/2, T/2[}$ la restriction de f à $[-T/2, T/2[$ et la considérer comme une fonction T -périodique. On obtient alors des coefficients de Fourier

$$\widehat{f}_T[n] = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-i2\pi(n/T)t} dt$$

La transformée de Fourier de f en ϕ s'obtient en faisant tendre n/T vers ϕ tout en assurant que T tende vers l'infini, et en posant

$$\widehat{f}(\phi) = \lim T \widehat{f}_T(n/T) \simeq \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i2\pi\phi t} dt$$

On obtient de manière heuristique la transformée inverse par un passage à la limite sur les séries de Fourier :

$$\begin{aligned} f_T(t) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{f}_T[n] e^{i2\pi(n/T)t}, \quad \forall t \in [-T/2, T/2[\\ &= \frac{1}{T} \sum_{n \in \mathbb{Z}} T \widehat{f}_T[n] e^{i2\pi(n/T)t} \\ &\rightarrow \int \widehat{f}(\phi) e^{i2\pi\phi t} dt. \end{aligned}$$

On souhaite donc poser $\widehat{f}(\phi) = \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-i2\pi\phi t} dt$ pour $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ et pouvoir parler de son inverse donné par la formule $f(t) = \int \widehat{f}(\phi) e^{i2\pi\phi t} dt$.

Toute la difficulté est maintenant de donner du sens à ces formules. La transformée de Fourier de f est ainsi clairement définie pour $f \in L^1$. On va montrer qu'alors $\widehat{f} \in L^\infty$, comment définir l'inverse? De manière similaire au cadre des séries de Fourier, peut-on obtenir une formule de type Parseval pour les fonctions L^2 ? et pour commencer, comment définir une transformée de Fourier pour ces fonctions?...

2.2 Transformée de Fourier sur $L^1(\mathbb{R})$

2.2.1 Définition et propriétés

Définition La transformée de Fourier \mathcal{F} sur $L^1(\mathbb{R})$ est donnée par

$$\begin{aligned} \mathcal{F} : L^1 &\rightarrow L^\infty \\ f &\mapsto \widehat{f} \text{ avec } \widehat{f}(\phi) = \int f(t) e^{-i2\pi\phi t} dt \end{aligned}$$

Proposition 5. $\widehat{f}(\phi)$ existe pour tout ϕ et $|\widehat{f}(\phi)| \leq \|f\|_1$.

Proposition 6. $f \in L^1 \implies \widehat{f} \in C_0$ (fonctions continues qui tendent vers 0 en l'infini).

Démonstration.

$$\begin{aligned} |\widehat{f}(\phi+h) - \widehat{f}(\phi)| &\leq \int |\gamma_{-h}(t) - \gamma_0(t)| |f(t)| dt \\ &\xrightarrow{h \rightarrow 0} 0 \text{ par convergence dominée} \end{aligned}$$

La propriété $\widehat{f}(\phi) \rightarrow 0$ correspond au lemme de Riemann-Lebesgue qui se démontre en 3 temps : on vérifie par calcul que c'est vrai pour les indicatrices, on en déduit que c'est vrai pour les combinaisons linéaires finies puis que c'est vrai pour toute fonction de L^1 en utilisant un argument de densité pour la norme L^1 des combinaisons linéaires finies d'indicatrices et la continuité de la TF ($|\widehat{f}(\phi) - \widehat{g}(\phi)| \leq \|f - g\|_1$). \square

Proposition 7. La transformée de Fourier \mathcal{F} échange la régularité et la décroissance à l'infini :

- i) $f \in L^1$ et $g = tf \in L^1 \implies \widehat{f} \in C^1$ et $\widehat{f}'(\phi) = -2i\pi\widehat{g}(\phi)$
- ii) $f \in L^1 \cap C^1$ et $f' \in L^1 \implies \widehat{f}(\phi) = \frac{\widehat{f}'(\phi)}{2i\pi\phi}$

Démonstration. i) Lebesgue :

$$\frac{\widehat{f}(\phi+h) - \widehat{f}(\phi)}{h} = \int f(t)\gamma_{-\phi}(t) \frac{\gamma_{-\phi}(t) - 1}{h} dt$$

or $\left| \frac{\gamma_{-\phi}(t) - 1}{h} \right| \leq 2\pi t$ et $\frac{\gamma_{-\phi}(t) - 1}{h}$ tend vers $-2i\pi t$ lorsque h tend vers 0, on a donc

$$\xrightarrow{h \rightarrow 0} \int -2i\pi t f(t)\gamma_{-\phi}(t) dt = -2i\pi\widehat{g}(\phi)$$

ii) $f' \in L^1$ implique que $\int_0^{+\infty} f'(t)dt$ est bien défini. Ceci implique que $f(t) = f(0) + \int_0^t f'(u)du$ admet une limite. Comme $f \in L^1$, cette limite ne peut que valoir 0.

On en déduit alors que

$$\widehat{f}'(\phi) = \int f'(t)e^{-i2\pi\phi t} dt$$

par intégration par parties

$$\begin{aligned} &= [f(t)e^{-i2\pi\phi t}]_{-\infty}^{+\infty} + \int 2i\pi\phi f(t)e^{-i2\pi\phi t} dt \\ &= 2i\pi\phi\widehat{f}(\phi). \end{aligned}$$

□

Remarque

- i) $f \in L^1$ et $t^p f \in L^1 \implies \widehat{f} \in C^p$
- ii) $f \in L^1 \cap C^p, f', \dots, f^{(p)} \in L^1 \implies t^p \widehat{f} \in C_0$

Ex $f(t) = \mathbf{1}_{[-a,a]}(t)$ n'est pas régulier et sa transformée de Fourier $\widehat{f}(\phi) = \frac{\sin(a\phi)}{\pi\phi} \notin L^1$.

2.2.2 Convolution

Proposition 8. $f, g \in L^1$, la convoluée $f \star g$ définie ponctuellement par

$$f \star g(t) = \int f(u)g(t-u)du = \int f(t-u)g(u)du$$

est bien définie et appartient à L^1

Démonstration. Par Fubini, on vérifie que $\int |f \star g(t)|dt \leq \|f\|_1 \|g\|_1$.

□

Proposition 9. $f, g \in L^2 \implies f \star g \in L^\infty$ et $f \star g \in C^0$

Démonstration. Cauchy-Schwartz donne $\|f \star g\|_\infty \leq \|f\|_2 \|g\|_2$. La deuxième propriété s'obtient par un argument de densité et de stabilité de C^0 pour la norme $\|\cdot\|_\infty$. \square

Proposition 10. $f, g \in L^1, \widehat{f \star g} = \widehat{f} \widehat{g}$.

Démonstration. On utilise encore une fois Fubini pour obtenir

$$\begin{aligned} \widehat{f \star g}(\phi) &= \int e^{-i2\pi\phi t} \int f(t-u)g(u) du dt \\ &= \int \int e^{-i2\pi\phi(t-u)} f(t-u) e^{-i2\pi\phi u} g(u) dt du \\ &= \widehat{f}(\phi) \widehat{g}(\phi) \end{aligned}$$

\square

Exemple $g = \mathbf{1}_{[-a,a]} \star \mathbf{1}_{[-a,a]}$ est la fonction triangle qui est plus régulière que la fonction indicatrice. Sa transformée de Fourier est $\widehat{g}(\phi) = \frac{\sin^2(a\phi)}{\pi^2\phi^2}$ qui décroît plus vite que celle de l'indicatrice...

Gaussienne $f(t) = e^{-t^2/(2\sigma^2)} \in L^1$ ($\int |(f)| dt = \sigma\sqrt{2\pi}$)

$$\begin{aligned} \widehat{f}(\phi) &= \int e^{-t^2/(2\sigma^2)} e^{-2i\pi\phi t} dt \\ \widehat{f}'(\phi) &= \int e^{-t^2/(2\sigma^2)} 2i\pi t e^{-2i\pi\phi t} dt = \int 2i\pi t e^{-t^2/(2\sigma^2)} e^{-2i\pi\phi t} dt \end{aligned}$$

Par IPP

$$\begin{aligned} &= \int 2i\pi 2\sigma^2 e^{-t^2/(2\sigma^2)} 2i\pi\phi e^{-2i\pi\phi t} dt \\ \widehat{f}'(\phi) &= -4\pi^2 2\sigma^2 \phi \widehat{f}(\phi) \end{aligned}$$

On en déduit donc que $\widehat{f}(\phi) = ce^{-4\pi^2\sigma^2\phi^2}$. Pour déterminer la constante c , on utilise $\widehat{f}(0) = \int f(t) dt = \sigma\sqrt{2\pi} = c$. On a donc démontré que $\widehat{f}(\phi) = \sigma\sqrt{2\pi} e^{-4\pi^2\sigma^2\phi^2}$.

Remarque $g = \widehat{f}(\phi) = \widehat{f}(-\phi)$.

$$\begin{aligned} \widehat{g}(t) &= \sigma\sqrt{2\pi} e^{-4\pi^2\sigma^2\sigma^2 \cdot 2} (t) \\ &= \sigma\sqrt{2\pi} \times \frac{\sqrt{2\pi}}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{4\pi^2}{8\pi^2\sigma^2} t^2} \\ &= e^{-t^2/(2\sigma^2)} = f(t) \end{aligned}$$

soit

$$\widehat{\widehat{f}} = f$$

Remarque $\sigma^2 \times \frac{1}{8\pi^2\sigma^2}$, le produit des “variances” de f et de sa transformée de Fourier est indépendant de σ (principe d’incertitude...)

2.2.3 Formule d’inversion de \mathcal{F}

On a le théorème suivant :

Théorème 2. Si $f \in L^1$ et $\widehat{f} \in L^1$ alors

$$\int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\phi) e^{2i\pi\phi t} d\phi = f(t) \text{ p.p. } \quad \mathcal{F}(\widehat{f}(\cdot)) = f$$

Esquisse de démonstration. Pour les séries de Fourier, on a un résultat semblable : si $\widehat{f}[n] \in \ell^1$,

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{f}[n] e^{i2\pi n t} = f(t) \text{ p.p. avec } \widehat{f}[n] = \int_0^1 f(t) e^{-i2\pi n t} dt$$

Pour le démontrer, on pose $S(t) = \sum \widehat{f}[n] e^{i2\pi n t}$ qui est bien définie car la série est absolument convergente. On vérifie alors que $\widehat{S}[k] = \int_0^1 S(t) e^{-i2\pi k t} dt = \sum_k \widehat{f}[k] \int_0^1 e^{-i2\pi(n-k)t} dt = \widehat{f}[n]$. On en déduit donc que $\widehat{S} = \widehat{f}$ puis que $s = f$ p.p. (par exemple parce que $\widehat{S - f} = 0$, $f \in \mathbf{C}^0 \subset L^2$ and $S \in \mathbf{C}^0 \subset L^2$).

Cette démonstration ne fonctionne pas pour L^1 . On peut définir

$$S(t) = \int \widehat{f}(\phi) e^{i2\pi\phi t} d\phi$$

et chercher à calculer $\widehat{S}(\phi)$

$$\widehat{S}(\phi) = \int S(t) e^{-i2\pi\phi t} dt = \int \int \widehat{f}(\Phi) e^{i2\pi(\Phi-\phi)t} d\Phi dt$$

mais on ne peut utiliser Fubini ici car $e^{i2\pi(\Phi-\phi)t} \notin L^1 \dots$

La preuve est plus technique et passe par la densité des fonctions continues. □

2.3 Transformée de Fourier sur $L^2(\mathbb{R})$

2.3.1 Cadre

Problème $\widehat{f}(\phi) = \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-i2\pi\phi t} dt$ n’est pas définie pour $f \in L^2$.

Extension On souhaite définir une transformée de Fourier sur L^2 telle que pour $f \in L^1 \cap L^2$ la transformée de Fourier L^2 coïncide avec la transformée de Fourier L^1 : $\mathcal{F}f(\phi) = \widehat{f}(\phi)$.

2.3.2 Construction

Par densité On peut obtenir une construction de cette transformée par densité mais on propose ici une version plus constructive basée sur l'application \mathcal{F}_A définie par

$$\mathcal{F}_A f(\phi) = \int_{-A}^A f(t) e^{-i2\pi\phi t} dt.$$

Théorème 3. $\forall f \in L^2, \exists \mathcal{F}f \in L^2$ tel que $\mathcal{F}f = \lim_{A \rightarrow \infty} \mathcal{F}_A f$. L'application \mathcal{F} est une isométrie linéaire bijective sur L^2 de réciproque

$$\check{\mathcal{F}}g \stackrel{L^2}{=} \lim_{A \rightarrow \infty} \int_{-A}^A g(\phi) e^{i2\pi\phi t} dt.$$

Démonstration. $f \in L^2 \implies f \mathbf{1}_{[-A,A]} \in L^1 \cap L^2, \forall A > 0$

Le seul point technique est alors de montrer que $\mathcal{F}_A f = \widehat{f \mathbf{1}_{[-A,A]}} \in L^2$ et $\|\mathcal{F}_A f\|_2^2 = \|f \mathbf{1}_{[-A,A]}\|_2^2$.

$(\mathcal{F}_A f)_{A \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de Cauchy dans $L^2(\mathbb{R})$ donc $\lim_{A \rightarrow \infty} \mathcal{F}_A f$ existe et appartient à $L^2(\mathbb{R})$.

On pose $\mathcal{F}f = \lim_{A \rightarrow \infty} \mathcal{F}_A f$, on vérifie que \mathcal{F} est linéaire et isométrique.

Par convergence dominée, si $f \in L^1 \cap L^2$, $\mathcal{F}_A f \rightarrow \widehat{f}$ et donc on vérifie $\mathcal{F}f = \widehat{f}$.

On admettra encore la formule d'inversion.... □

Proposition 11. $\|\mathcal{F}_A f\|_2 = \|f \mathbf{1}_{[-A,A]}\|$

Démonstration. On part de f_A l'extension $2A$ -périodique de $f \mathbf{1}_{[-A,A]}$. Cette fonction est dans $L^2([-A,A])$ et on peut la développer en série de Fourier. Ses coefficients sont

$$\begin{aligned} \widehat{f_A}[n] &= \frac{1}{\sqrt{2A}} \int_{-A}^A f(t) e^{-i2\pi n t / (2A)} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2A}} \mathcal{F}_A f(n/(2A)). \end{aligned}$$

On en déduit donc que

$$\int_{-A}^A |f(t)|^2 dt = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\widehat{f_A}[n]|^2 = \frac{1}{2A} \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\mathcal{F}_A f(n/(2A))|^2.$$

On applique alors ce résultat à $f e^{-i2\pi\delta t}$ pour obtenir

$$\int_{-A}^A |f(t)|^2 dt = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\widehat{f_A}[n]|^2 = \frac{1}{2A} \sum_b |\mathcal{F}_A f(n/(2A) + \delta)|^2$$

et on obtient le résultat souhaité en intégrant sur $\delta \in [0, 1/(2A)]$ □

2.4 Transformée de Fourier dans \mathcal{S}

2.4.1 Motivation

Stabilité et formules \mathcal{F} a une formule explicite pour L^1 mais n'y est pas stable puisque l'on arrive dans \mathbf{C}_0 tandis qu'elle est stable de L^2 vers L^2 mais sans formule explicite.

Objectif Trouver une classe $\mathcal{S} \subset L^1 \cap L^2$ tel que $\mathcal{F}\mathcal{S} = \mathcal{S}$, on vérifie aisément que \mathcal{S} doit vérifier $\mathcal{S} \subset \mathbf{C}_0 \cap L^1 \cap L^2$.

2.4.2 Espace de Schwartz

La classe de Schwart \mathcal{S} est l'ensemble des fonctions \mathbf{C}^∞ à décroissance rapide :

$$\mathcal{S} = \{f \in \mathbf{C}^\infty, \forall p > 0, \mathcal{N}_p(f) = \sup_{\alpha \leq p} \sup_{\beta \leq p} \|t^\alpha \partial^\beta f\|_\infty < +\infty\}.$$

Topologie séquentielle $f_n \xrightarrow{\mathcal{S}} f$ si et seulement si $\forall p, \mathcal{N}_p(f_n - f) \rightarrow 0$.

Proposition 12.

- \mathcal{S} est stable par dérivation et par multiplication par des polynômes.
- $\forall f \in \mathcal{S}, \sup_{\alpha \leq p} \sup_{\beta \leq p} \|t^\alpha \partial^\beta f\|_1 \leq C\mathcal{N}_{p+2}(f)$.

Démonstration. Le premier point est évident.

Pour le second,

$$\begin{aligned} \int |t^\alpha \partial^\beta f(t)| dt &= \int |(1+t^2)t^\alpha \partial^\beta f(t)| \left| \frac{1}{1+t^2} \right| dt \\ &\leq \|(1+t^2)t^\alpha \partial^\beta f(t)\|_\infty \left\| \frac{1}{1+t^2} \right\|_1 \\ \int |t^\alpha \partial^\beta f(t)| dt &\leq 2 \left\| \frac{1}{1+t^2} \right\|_1 \mathcal{N}_{p+2}(f) \end{aligned}$$

□

2.4.3 Transformée de Fourier

Théorème 4. $\forall f \in \mathcal{S}, \widehat{f} \in \mathcal{S}$ et $\forall p, \exists C_p, \forall f \in \mathcal{S} \mathcal{N}_p(\widehat{f}) \leq C_p \mathcal{N}(f)$. De plus la transformée de Fourier définit un isomorphisme séquentiellement bicontinu de \mathcal{S} dans \mathcal{S} d'inverse \mathcal{F}^{-1} .

Démonstration.

$$\begin{aligned} \|\phi^\alpha \partial^\beta \widehat{f}(\phi)\|_\infty &\leq C'_p \|\mathcal{F}(\partial^\alpha(t^\beta f(t)))\|_\infty \\ &\leq C'_p \|\partial^\alpha(t^\beta f(t))\|_1 \\ &\leq C''_p \sup_{\alpha \leq p} \sup_{\beta \leq p} \|t^\beta \partial^\alpha f\|_1 \\ \|\phi^\alpha \partial^\beta \widehat{f}(\phi)\|_\infty &\leq C_p \mathcal{N}_{p+2}(f) \end{aligned}$$

Reste à démontrer la formule d'inversion... On montre aisément que si $f \in L^1$ et $\widehat{f} \in L^1$ alors $\int \widehat{f}(\phi) e^{i2\pi\phi t} dt = f(t)$ en tout point de continuité, ce qui donne le résultat ici. \square

2.4.4 Parseval-Bessel

On montre directement que sur \mathcal{S} , $\|f\|_2 = \|\mathcal{F}f\|_2$ sans passer par $\mathcal{S} \subset L^2$.

En effet $e^{-i2\pi t\phi} f(t) \overline{g(\phi)}$ appartient à $L^1(\mathbb{R}^2)$ si f et g sont dans \mathcal{S} et on obtient alors grâce à Fubini,

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{F}f, g \rangle &= \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}f(\phi) \overline{g(\phi)} d\phi \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{-i2\pi t\phi} f(t) \overline{g(\phi)} dt d\phi \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(t) \overline{g(\phi)} e^{i2\pi t\phi} d\phi dt \\ &= \langle f, \mathcal{F}^{-1}g \rangle. \end{aligned}$$

La propriété souhaitée s'obtient en appliquant ce résultat pour $g = \mathcal{F}f$.

2.5 Transformée de Fourier dans \mathcal{S}'

2.5.1 Distributions

Objectif On souhaite étendre la transformée de Fourier sur $L^1 \cup L^2$ à une classe stable. Il va falloir pour cela abandonner les fonctions pour les fonctions généralisées ou distributions.

Fonctions test On définit \mathcal{D} l'ensemble des fonctions continues indéfiniment dérivables à support compact. On munit cet ensemble de la topologie suivante : on dit que U est ouvert si et seulement si $\forall K$ compact et $\forall f \in U$ à support dans K , $\exists \epsilon > 0$, $\exists k \geq 0$ tel que

$$\{g, \text{supp}(g) \subset K, \forall x \in K |f^{(k)}(x) - g^{(k)}(x)| \leq \epsilon\} \subset U.$$

Distributions L'ensemble \mathcal{D}' des distributions est l'ensemble des formes linéaires continues sur \mathcal{D} (dual).

Soit $T \in \mathcal{D}'$ et $f \in \mathcal{D}$, on a $T(f) = \langle T, f \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}}$ avec pour tout compact K l'existence de k et de $C(k)$ tel que pour toute fonction f à support dans K $|T(f)| \leq C(k) \|f^{(k)}\|_{\infty}$.

Exemples

- $\forall g$ localement intégrable, $T_g(f) = \int g(t) f(t) dt$ définit une distribution. On identifie souvent T_g et g .
- $\delta_{t_0} : f \mapsto f(t_0)$ est une distribution.

Dérivation Soit $T \in \mathcal{D}'$, on définit sa dérivée $T' \in \mathcal{D}'$ par son action sur \mathcal{D}

$$\langle T', f \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} = -\langle T, f' \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}}.$$

Il s'agit bien d'une extension de la dérivée puisque par intégration par partie si g est localement intégrable et dérivable :

$$\int g'(t)f(t)dt = - \int g(t)f'(t)dt.$$

Distributions tempérées C'est l'ensemble des applications linéaires T sur \mathcal{S} continues au sens de l'existence de p et de C tel que pour toute fonction $f \in \mathcal{S}$, $T(f) \leq CN_p(f)$.

On peut vérifier que comme $\mathcal{D} \subset \mathcal{S}$ et que la condition de continuité est plus forte $\mathcal{S}' \subset \mathcal{D}'$. Toute distribution tempérée est une distribution mais la réciproque n'est pas vraie.

2.5.2 Transformée de Fourier sur \mathcal{S}'

Définition Soit $T \in \mathcal{S}'$, on définit sa transformée de Fourier $\mathcal{F}T$ par son action sur \mathcal{S} :

$$\langle \mathcal{F}T, f \rangle_{\mathcal{S}', \mathcal{S}} = \langle T, \widehat{f} \rangle_{\mathcal{S}', \mathcal{S}}.$$

Proposition 13. $\mathcal{F}T \in \mathcal{S}'$ et \mathcal{F} correspond bien à une extension de la transformée de Fourier de L^1 et de L^2 (et de \mathcal{S}).

Démonstration.

$$\begin{aligned} |\langle \mathcal{F}T, f \rangle_{\mathcal{S}', \mathcal{S}}| &= |\langle T, \widehat{f} \rangle_{\mathcal{S}', \mathcal{S}}| \\ &\leq CN_p(\widehat{f}) \\ |\langle \mathcal{F}T, f \rangle_{\mathcal{S}', \mathcal{S}}| &\leq CN_{p+2}(f) \end{aligned}$$

Pour tout $u \in L^1$,

$$\begin{aligned} \int u(t)\widehat{f}(t)dt &= \int \int u(t)f(v)e^{-i2\pi tv}dtdv \\ &= \int \widehat{u}(v)f(v)dv. \end{aligned}$$

L'extension à L^2 est immédiate en passant par \mathcal{F}_A . □

Proposition 14. $\mathcal{F} : \mathcal{S}' \rightarrow \mathcal{S}'$ est un isomorphisme séquentiellement bicontinu d'inverse \mathcal{F}^{-1} défini par

$$\langle \mathcal{F}^{-1}T, f \rangle_{\mathcal{S}', \mathcal{S}} = \langle T, \mathcal{F}^{-1}f \rangle_{\mathcal{S}', \mathcal{S}}.$$

Démonstration. La continuité de \mathcal{F} et de \mathcal{F}^{-1} est immédiate.

$$\langle \mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}T, f \rangle_{\mathcal{S}', \mathcal{S}} = \langle \mathcal{F}T, \mathcal{F}^{-1}f \rangle_{\mathcal{S}', \mathcal{S}} = \langle T, \mathcal{F}\mathcal{F}^{-1}f \rangle_{\mathcal{S}', \mathcal{S}} = \langle T, f \rangle_{\mathcal{S}', \mathcal{S}}.$$

D'où $\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}T = T$. □

Exemples

$$- \delta_{t_0} : f \rightarrow f(t_0)$$

$$\langle \mathcal{F}\delta_0, f \rangle_{\mathcal{S}', \mathcal{S}} = \langle \delta_0, \mathcal{F}f \rangle_{\mathcal{S}', \mathcal{S}} = \widehat{f}(t_0) = \int f(t)e^{-i2\pi t_0 t} dt$$

On peut donc identifier $\mathcal{F}\delta_{t_0}$ et $e^{-i2\pi t_0 t}$.

$$- e^{i2\pi t_0 t} : f \rightarrow \int e^{i2\pi t_0 t} f(t) dt$$

$$\langle \mathcal{F}e^{i2\pi t_0 t}, f \rangle_{\mathcal{S}', \mathcal{S}} = \langle e^{i2\pi t_0 t}, \mathcal{F}f \rangle_{\mathcal{S}', \mathcal{S}} = \int \widehat{f}(t)e^{i2\pi t_0 t} dt = f(t_0)$$

et donc $\mathcal{F}e^{i2\pi t_0 t} = \delta_{t_0}$.

Remarque Soit $f \in L^2([0, 1[)$, on vérifie que sa périodisée $f_p \in L^2_{\text{loc}}$ et donc que $f_p \in \mathcal{S}'$.

On verra que $\mathcal{F}f_p = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{f}[n]\delta_n$. De manière heuristique, ceci s'obtient en remarquant que $f_p = \sum \widehat{f}[n]e^{i2\pi n t}$ et que $\mathcal{F}e^{i2\pi n t} = \delta_n$.

Dérivation Soit $T \in \mathcal{S}'$, on définit T' comme pour les distributions et on vérifie que $T' \in \mathcal{S}$.

Proposition 15. $\mathcal{F}(T') = (2i\pi t)\mathcal{F}T$

Démonstration.

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{F}(T'), f \rangle_{\mathcal{S}', \mathcal{S}} &= \langle T', \mathcal{F}f \rangle_{\mathcal{S}', \mathcal{S}} \\ &= -\langle T, (\mathcal{F}f)' \rangle_{\mathcal{S}', \mathcal{S}} \\ &= -\langle T, \mathcal{F}(-2i\pi t f) \rangle_{\mathcal{S}', \mathcal{S}} \\ &= \langle \mathcal{F}T, 2i\pi t f \rangle_{\mathcal{S}', \mathcal{S}} \\ \langle \mathcal{F}(T'), f \rangle_{\mathcal{S}', \mathcal{S}} &= \langle 2i\pi t \mathcal{F}T, f \rangle_{\mathcal{S}', \mathcal{S}}. \end{aligned}$$

□

Chapitre 3

Traitement du signal analogique

Sommaire

3.1	Introduction	21
3.2	Filtrage stationnaire linéaire, réponse impulsionnelle et fonction de transfert	22
3.2.1	Filtrage stationnaire linéaire	22
3.2.2	Réponse impulsionnelle	22
3.2.3	Causalité et stabilité	22
3.2.4	Convolution et transformée de Fourier	23
3.3	Filtres idéaux et synthèse de filtre	24
3.3.1	Filtres idéaux	24
3.3.2	Filtrage par circuits électriques	24
3.3.3	Filtre passe-bas réalisable	27
3.4	Exemples	28
3.4.1	Modulation d'amplitude (A.M.)	28
3.4.2	Flou optique	30

3.1 Introduction

Signaux analogiques $f : \underbrace{\mathbb{R}}_{\text{continu}} \rightarrow \underbrace{\mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}}_{\text{continu}}$.

Exemples signaux électriques, ondes électromagnétiques, optique (à peu près tout sauf dans les ordinateurs).

Filtrage/Traitement $L : f \mapsto L(f)$ où $L(f)$ est une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} (ou \mathbb{C}).

3.2 Filtrage stationnaire linéaire, réponse impulsionnelle et fonction de transfert

3.2.1 Filtrage stationnaire linéaire

Filtrage $f \mapsto L(f)$

Linéaire $L(f + \lambda g) = Lf + \lambda Lg$

Stationnaire $L(f(\cdot - t_0)) = L(f)(\cdot - t_0)$.

Classe particulière mais assez générale de traitement de signal. Elle s'étudie efficacement à l'aide de l'outil Fourier.

3.2.2 Réponse impulsionnelle

Heuristique $f(t) = \int f(u)\delta(t-u)du = \delta \star f$

$$Lf(t) = \int L(f(u)\delta(t-u))du = \int f(u)L\delta(t-u)du = L\delta \star f.$$

On appelle réponse impulsionnelle du filtre le signal $L\delta$... si il est bien défini!

Restriction aux filtres de la forme $L = h \star$ avec $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} . Par construction, h est la réponse impulsionnelle du filtre L .

⚠ Il manque partout l'espace d'appartenance de f pour que tout ceci ait un sens. On essayera de régler le problème au cas par cas...

3.2.3 Causalité et stabilité

Causal Le filtre $L = h \star$ est dit causal si et seulement si $h(t) = 0, \forall t < 0$.

$$Lf(t) = h \star f(t) = \int f(u)h(t-u)du = \int_{-\infty}^t f(u)h(t-u)du$$

où l'on voit bien que l'on utilise que les valeurs du « passé » pour obtenir la valeur en t . C'est crucial pour les traitements en temps réel.

Anticausal Le filtre $L = h \star$ est dit anticausal si et seulement si $h(t) = 0, \forall t \geq 0$.

Stable Le filtre $L = h \star$ est dit stable si et seulement si

$$\forall f, \|f\|_{\infty} < +\infty \implies \|h \star f\|_{\infty} < +\infty.$$

Proposition 16. *Le filtre est stable si et seulement si $h \in L^1$.*

Démonstration. $h \in L^1 \implies \forall f \in L^{\infty}, h \star f \in L^{\infty}$.

$h \notin L^1 \implies \int h(x)\text{sigm}(h(x))dx = \int |h(x)|dx = +\infty$ et donc $\exists f(x) = \text{sigm}(h(x)), f \in L^{\infty}$ et $h \star f \notin L^{\infty}$. \square

Fonctions propres

$$\begin{aligned}L(e^{i2\pi\phi(t-t_0)})(u) &= L(e^{i2\pi\phi t})(u - t_0) \quad (\text{par stationnarité}) \\ &= e^{-i2\pi\phi t_0} L(e^{i2\pi\phi t})(u) \quad (\text{par linéarité}).\end{aligned}$$

En choisissant $u = t_0$, on obtient

$$L(e^{i2\pi\phi t})(t_0) = L(e^{i2\pi\phi t})(0)e^{i2\pi\phi t_0},$$

autrement dit les exponentielles complexes $e^{i2\pi\phi t}$ sont des fonctions propres du filtre de valeurs propres $L(e^{i2\pi\phi t})(0)$.

Si $L = h \star$ avec $h \in L^1$,

$$L(e^{i2\pi\phi t})(0) = \int h(u)e^{i2\pi\phi(0-u)} du = \widehat{h}(\phi).$$

3.2.4 Convolution et transformée de Fourier

Théorème 5.

$$\mathcal{F}L(f) = \mathcal{F}(h \star f) = \mathcal{F}h \times \mathcal{F}f$$

En utilisant ceci comme définition, on peut généraliser la définition des filtres pour tout h dont on peut déterminer une transformée de Fourier... et sous la condition que le produit précédent est un sens...

Inversion de Fourier Si f et \widehat{f} sont dans L^1

$$f(t) = \int \widehat{f}(\phi)e^{i2\pi\phi t} d\phi$$

et si $\widehat{h\widehat{f}}$ est dans L^1

$$Lf(t) = \int \widehat{h}(\phi)\widehat{f}(\phi)e^{i2\pi\phi t} d\phi.$$

Comme dans un égaliseur, chaque composante fréquentielle est amplifiée/atténuée par un facteur $\widehat{h}(\phi)$.

Filtrage Si $\widehat{h}(\phi) = 0$ sur un intervalle, les composantes fréquentielles correspondantes sont annulés par l'opérateur L , d'où le nom de filtrage.

Variante sur la transformée de Fourier On utilise souvent, en traitement du signal, la transformée de Fourier définie sur L^1 par

$$\widehat{f}^\omega(\omega) = \int f(t)e^{-i\omega t} dt$$

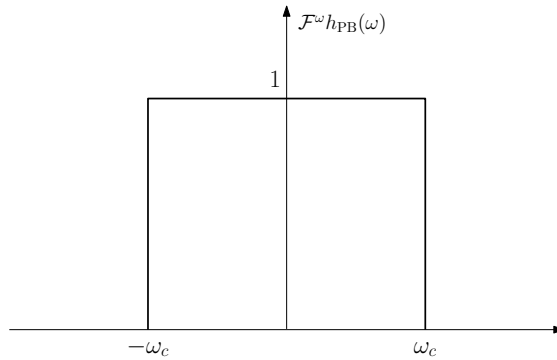


FIGURE 3.1 – Filtre passe bas idéal.

qui correspond juste au changement de variable $\omega = 2\pi\phi$. Toute la théorie reste valide dans ce cadre à des facteurs 2π près. Par exemple,

$$(\mathcal{F}^\omega)^{-1}f(t) = \frac{1}{2\pi} \int f(\omega)e^{i\omega t}d\omega.$$

L'intérêt de cet variante est que $\mathcal{F}^\omega(f') = i\omega\mathcal{F}^\omega f (= j\omega\mathcal{F}^\omega f$ en physique) dans lequel on a moins de facteurs 2π .

3.3 Filtres idéaux et synthèse de filtre

3.3.1 Filtres idéaux

Passe bas idéal $\mathcal{F}^\omega h_{PB}(\omega) = \mathbf{1}_{[-\omega_c, \omega_c]}$

Réponse impulsionnelle $h_{PB} = \frac{\sin \omega_c t}{\pi t}$ (noyau de lissage).

Ce filtre n'est ni stable ni causal...

Passe bande idéal $\mathcal{F}^\omega h_{Pb}(\omega) = \mathbf{1}_{|\omega| \in [\omega_0 - \omega_c, \omega_0 + \omega_c]}$

Si $\omega_c < \omega_0$, $\mathcal{F}^\omega h_{Pb}(\omega) = \mathcal{F}^\omega h_{PB}(\omega - \omega_0) + \mathcal{F}^\omega h_{PB}(\omega + \omega_0)$.

Réponse impulsionnelle $h_{Pb} = h_{PB}e^{-i\omega_0 t} + h_{PB}e^{i\omega_0 t} = 2 \cos(\omega_0 t) \frac{\sin \omega_c t}{\pi t}$

Ce filtre n'est ni stable ni causal...

3.3.2 Filtrage par circuits électriques

Filtres implémentables Seul certains filtres linéaires peuvent être implémentés par des circuits électroniques : ceux dont la fonction de transfert est une fraction rationnelle.

Very Large Scale Integrated circuits Circuits électriques présents dans les puces avec des résistances, des condensateurs, des amplificateurs opérationnels, des diodes... mais pas d'inductance pour des raisons de place.

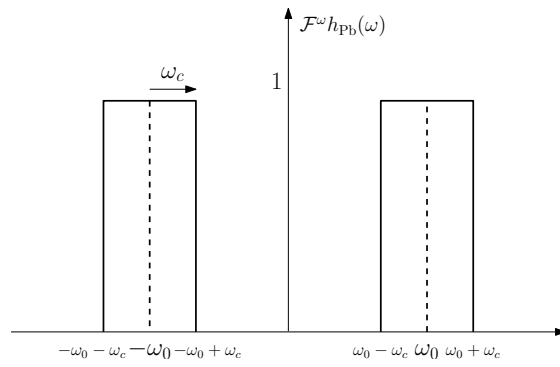


FIGURE 3.2 – Filtre passe bande idéal.

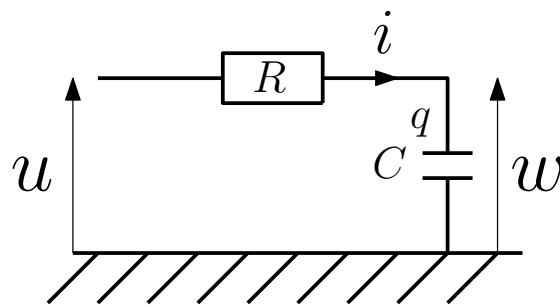


FIGURE 3.3 – Circuit RC.

Circuit RC

$$\begin{aligned} i &= C \frac{dw}{dt} & u &= Ri + w \\ q &= Cw \text{ et } i = \frac{dw}{dt} & & \text{Loi d'Ohm} \end{aligned}$$

On en déduit

$$\begin{aligned} u(t) &= RC \frac{dw}{dt} + w(t) \quad (\text{équation différentielle}) \\ \implies \mathcal{F}^\omega u(t) &= RC \mathcal{F}^\omega \left(\frac{dw}{dt} \right) + \mathcal{F}^\omega w \\ \implies \widehat{u}^\omega &= RC j\omega \widehat{w}^\omega + \widehat{w}^\omega \\ \implies \widehat{w}^\omega &= \frac{\widehat{u}^\omega}{1 + RC j\omega} \end{aligned}$$

Équation différentielle linéaire De façons plus générales, on obtient à l'aide de circuits électriques une équation différentielle linéaire de la forme

$$a_N \frac{d^N}{dt} u + \dots + a_0 u = b_M \frac{d^M}{dt} w + \dots + b_0 w$$

soit en Fourier,

$$\implies a_N (j\omega)^N \widehat{u}^\omega + \dots + a_0 \widehat{u}^\omega = b_M (j\omega)^M \widehat{w}^\omega + \dots + b_0 \widehat{w}^\omega.$$

On obtient donc une fonction de transfert

$$\widehat{h} = \frac{\widehat{h}^\omega}{\widehat{u}^\omega} = \frac{a_N (j\omega)^N + \dots + a_0}{b_M (j\omega)^M + \dots + b_0} \quad \text{impédance du filtre.}$$

Remarques

- $M \geq N$, sinon $\widehat{h}^\omega(\omega) \rightarrow \infty$ et $h \notin L^1 \cup L^2 \cup \dots$
- Le filtre $u \mapsto w$ est causal par construction.

Circuit RC (suite)

$$\widehat{w}^\omega = \frac{\widehat{u}^\omega}{1 + RC j\omega} \implies \widehat{h}^\omega(\omega) = \frac{1}{1 + RC j\omega}.$$

On utilise alors

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^\omega (\alpha e^{-\alpha t} \mathbf{1}_{[0, +\infty[}) &= \int_0^{+\infty} \alpha e^{-\alpha t} e^{-i\omega t} dt \\ &= -\alpha \left[\frac{e^{-(i\omega + \alpha)t}}{\alpha + i\omega} \right]_0^{+\infty} \\ &= \frac{\alpha}{\alpha + i\omega} = \frac{1}{1 + i\omega/\alpha} \end{aligned}$$

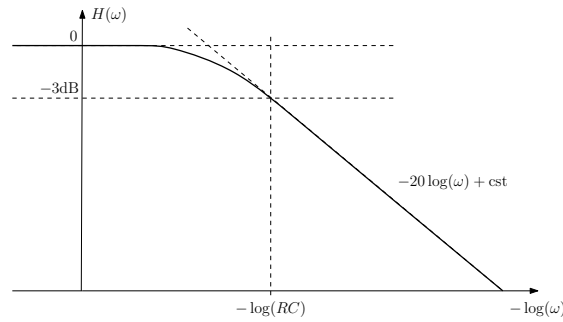


FIGURE 3.4 – Diagramme de Bode.

pour obtenir par identification le filtre stable et causal

$$h(t) = \frac{1}{RC} e^{-t/(RC)} \mathbf{1}_{[0, +\infty[}(t).$$

Diagramme de Bode

$$H = \underbrace{10 \log_{10}}_{\text{décibel}} \left| \frac{\widehat{\omega}^\omega}{\widehat{u}^\omega} \right|^2 = 10 \log_{10} |\widehat{h}(\omega)|^2$$

Circuit RC (fin)

$$\widehat{h}^\omega(\omega) = \frac{1}{1 + RCj\omega} \implies |\widehat{h}^\omega(\omega)|^2 = \frac{1}{1 + (RC\omega)^2}$$

$$H(\omega) = -10 \log_{10}(1 + (RC\omega)^2)$$

3.3.3 Filtre passe-bas réalisable

Approximation du passe-bas idéal Le filtre passe bas idéal $\widehat{h}_{\text{PB}}^\omega = \mathbf{1}_{[-\omega_c, \omega_c]}(\omega)$ n'est pas une fraction rationnelle et n'est donc pas réalisable par un circuit électrique. On souhaite l'approcher par une fraction rationnelle pour pouvoir l'implémenter de manière approchée.

Gabarit L'erreur d'approximation est contrôlée sur $|\widehat{h}^\omega|^2$ par un gabarit spécifiant ϵ_p et ϵ_a , les amplitudes des oscillations dans la bande de passage et d'atténuation, ainsi que $\Delta\omega$ la largeur de la bande de transition.

Phase On néglige ici le problème de la phase mais celui-ci est très important en pratique. On souhaite se rapprocher de $\widehat{h}^\omega(\omega) = |\widehat{h}^\omega| e^{i\delta\omega}$ (phase linéaire) qui permet d'éviter que les différentes fréquences se déphasent les unes par rapport aux autres

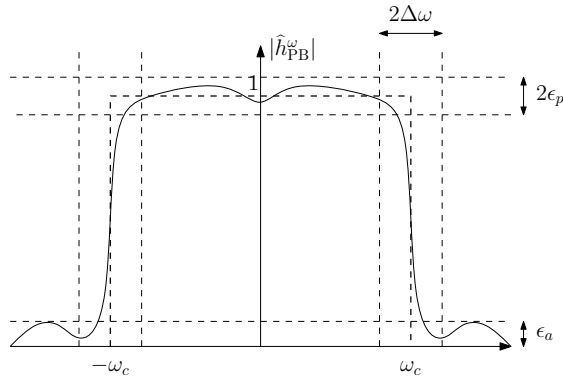


FIGURE 3.5 – Gabarit d'un filtre passe bas.

Partie passante On la définit souvent comme la partie telle que $|\widehat{h}^\omega(\omega)|^2 \geq 1/2$ ou encore $H(\omega) \geq -3\text{dB}$.

Filtres de Butterworth

$$|\widehat{h}_n^B{}^\omega(\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{2n}}.$$

Réalisable et tel que

- $n \geq 1$: $|\widehat{h}_n^B{}^\omega(\omega)|^2$ est plat au voisinage de 0 car les $(2n - 1)$ premières dérivées sont nulles.
- $\forall \omega \neq \pm\omega_c, |\widehat{h}_n^B{}^\omega(\omega)|^2 \rightarrow |\widehat{h}_{\text{PB}}^\omega|^2$.
- Le spectre est monotone.

Filtres de Chebyshev

$$|\widehat{h}_n^C{}^\omega(\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \epsilon^2 C_n\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2}.$$

où C_n est le polynôme de Chebyshev d'ordre n ($C_n(\cos \theta) = \cos(n\theta)$).

- Meilleure approximation à 1 ordre n donné que Butterworth.
- Oscillation mais monotonie dans la bande de rejet.

3.4 Exemples

3.4.1 Modulation d'amplitude (A.M.)

Transmission de signaux par onde radio A.M. plus simple à comprendre que F.M. (modulation de fréquence).

Problème Comment transporter N signaux réels g_0, \dots, g_{N-1} sur un même média avec comme seule hypothèse $\forall |\omega| > \omega_0, \widehat{g}(\omega) = 0 \dots$

Pour les sons par exemples, l'oreille humaine est sensible à la gamme $10 - 20000Hz$ et l'essentiel de l'information est dans la bande $300 - 3300Hz$.

AM Double Side Band No Carrier Le principe est de moduler les signaux d'entrées g_n en les multipliant par des $\cos(2n\omega_0 t)$, $h_n = \cos(2n\omega_0 t)g_n$, puis de mélanger ces signaux modulés dans un signal

$$s = \sum h_n = \sum \cos(2n\omega_0 t)g_n$$

qui est transmis. On va montrer que l'on peut récupérer g_n à partir de s par modulation et filtrage passe bas.

On obtient par calcul

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^\omega(h_n) &= \mathcal{F}^\omega(g_n(t) \cos(2n\omega_0 t)) \\ &= \frac{1}{2} (\mathcal{F}^\omega(g_n(t)e^{i2n\omega_0 t}) + \mathcal{F}^\omega(g_n(t)e^{-i2n\omega_0 t})) \\ &= \frac{1}{2} (\delta_{-2n\omega_0} \mathcal{F}^\omega(g_n) + \delta_{2n\omega_0} \mathcal{F}^\omega(g_n)) \end{aligned}$$

Le support fréquentiel de h_n est donc

$$[(-2n-1)\omega_0, (-2n+1)\omega_0] \cup [(2n-1)\omega_0, (2n+1)\omega_0]$$

On note que dans $\mathcal{F}^\omega s = \sum_n \mathcal{F}^\omega h_n$ les supports fréquentsiels des h_n sont disjoints.

On pose alors $f_{n,l} = \cos(2l\omega_0 t)h_n$. En réutilisant le calcul précédent, on obtient

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^\omega(f_{n,l}) &= \frac{1}{2} (\delta_{-2l\omega_0} \mathcal{F}^\omega(h_n) + \delta_{2l\omega_0} \mathcal{F}^\omega(h_n)) \\ &= \frac{1}{4} (\delta_{-2(l+n)\omega_0} \mathcal{F}^\omega(g_n) + \delta_{-2(l-n)\omega_0} \mathcal{F}^\omega(g_n) + \delta_{2(l-n)\omega_0} \mathcal{F}^\omega(g_n) + \delta_{2(l+n)\omega_0} \mathcal{F}^\omega(g_n)) \end{aligned}$$

Le support fréquentiel de $f_{n,l}$ est donc

$$\begin{aligned} &[(-2(n+l)-1)\omega_0, (-2(n+l)+1)\omega_0] \cup [(-2(n-l)-1)\omega_0, (-2(n-l)+1)\omega_0] \\ &\cup [(2(n-l)-1)\omega_0, (2(n-l)+1)\omega_0] \cup [(2(n+l)-1)\omega_0, (2(n+l)+1)\omega_0] \end{aligned}$$

On vérifie que la restriction de $\mathcal{F}^\omega f_{n,l}$ à $[-\omega_0, \omega_0]$ est nulle si $n \neq l$ et vaut $\frac{1}{2} \mathcal{F}^\omega g_n$ sinon.

On retrouve donc g_n à partir de s en multipliant s par $\cos(2n\omega_0 t)$ et en appliquant le filtre passe bas idéal h_{PB} de fréquence de coupure ω_0 en multipliant le résultat obtenu par 2.

⚡ La transformée de Fourier est uniquement un moyen de calcul, tout se fait par filtrage dans le domaine temporel.

3.4.2 Flou optique

On a travaillé uniquement en dimension 1 mais tout se prolonge en dimension supérieur. Par exemple, en dimension 2,

$$\widehat{f}(\phi_1, \phi_2) = \iint f(t_1, t_2) e^{-i2\pi \overbrace{(\phi_1 t_1 + \phi_2 t_2)}^{\langle \phi, t \rangle}} dt_1 dt_2.$$

La réponse g d'une optique (de caméra ou d'appareil photo) en fonction de l'image idéal d'entrée f s'obtient par convolution d'une réponse impulsionnelle h caractéristique de l'optique :

$$g = h \star f \Leftrightarrow \widehat{g} = \widehat{h} \widehat{f}.$$

Le phénomène de flou correspond à une atténuation des hautes fréquences (un lissage...).

Chapitre 4

Échantillonnage et signaux discrets

Sommaire

4.1	Introduction	31
4.2	Distribution périodique et transformée de Fourier	32
4.2.1	But	32
4.2.2	Distributions T -périodiques	32
4.2.3	Séries de Fourier	32
4.2.4	Série de Fourier d'une distribution T -périodique	33
4.2.5	Transformée de Fourier d'une distribution T -périodique	34
4.3	Échantillonnage	35
4.3.1	Échantillonnage et distribution	35
4.3.2	Formule de Poisson	35
4.3.3	Périodisation du spectre	36
4.3.4	Théorème de Shannon	38
4.3.5	Repliement spectral	39

4.1 Introduction

Signaux discrets $f: \underbrace{\mathbb{Z}}_{\text{discret}} \rightarrow \underbrace{\mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}}_{\text{continu}}$.

Cadre plus facile à analyser mais similaire à celui des signaux numériques :

$$f: \underbrace{\mathbb{Z}}_{\text{discret}} \rightarrow \underbrace{\mathbb{Z}}_{\text{discret}} .$$

Révolution numérique Les signaux numériques (que l'on étudiera à travers les signaux discrets) sont présents partout ou presque : microprocesseur, ordinateurs, CD, MP3, JPEG, téléphone, TV...

4.2 Distribution périodique et transformée de Fourier

4.2.1 But

On va montrer que les séries de Fourier des fonction périodiques et la Transformée de Fourier correspondent à la même chose dans le cadre de \mathcal{S}' .

Domaine de Fourier On va voir que

$$\begin{aligned} \mathcal{F} : \text{périodique} &\rightarrow \text{discret} \\ \text{discret} &\rightarrow \text{périodique} \end{aligned}$$

4.2.2 Distributions T -périodiques

Définition Soit $u \in \mathcal{D}'$, on définit $\tau_T u \in \mathcal{D}'$ par $\langle \tau_T u, f \rangle_{\mathcal{D}', D} = \langle u, \tau_{-T} f \rangle_{\mathcal{D}', D} = \langle u, f(\cdot + T) \rangle_{\mathcal{D}', D}$. On dit que $u \in \mathcal{D}'$ est T -périodique si $\tau_T u = u$.

Exemple $f \in L^2([0, 1[)$, $f_{\text{per}} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(t - nT) \mathbf{1}_{[0, 1[}(t - nT) \in \mathcal{D}'_T$ (ensemble des distributions T -périodiques).

Proposition 17. *Il existe $\chi \in \mathcal{D}$ telle que*

$$\forall t \in \mathbb{R}, \sum_{n \in \mathbb{Z}} \chi(t - nt) = 1.$$

On parle de partition de l'unité T -périodique. On remarque que la somme est finie à t fixé.

Démonstration. Soit $f \in \mathcal{D}$ telle que $f(t) \geq 0$ et $f(t) > 0$ sur $[0, T]$ alors

$$\chi(t) = \frac{f(t)}{\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(t - nt)}$$

convient. □

Intérêt Si g est T -périodique, $\int \chi(t)g(t)dt = \int_0^T g(t)dt$.

4.2.3 Séries de Fourier

Théorème 6. *Soit (γ_n) une suite à croissance lente ($\exists p, \exists C, |\gamma_n| \leq C(1 + |n|)^p$),*

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \gamma_n e^{2i\pi nt/T}$$

converge au sens des distributions et est T -périodique.

Démonstration. $\sum_{n \neq 0} \frac{\gamma_n}{n^{p+2}} e^{2i\pi nt/T}$ converge uniformément vers f continue, elle converge donc dans \mathcal{D}' . Par stabilité par dérivation, il est est de même pour $\sum_{n \neq 0} \gamma_n e^{2i\pi nt/T}$ et donc de $\sum_n \gamma_n e^{2i\pi nt/T}$.

La T -périodicité se déduit de la T -périodicité des sommes partielles. □

On va montrer l'unicité de la décomposition de ces séries de Fourier.

Théorème 7. *Si (γ_n) est une suite à croissance lente telle que $\sum_n \gamma_n e^{i2\pi nt/T} = 0$ au sens des distributions alors $\forall n, \gamma_n = 0$*

Démonstration. Soit $f \in \mathcal{D}$,

$$\begin{aligned} 0 &= \left\langle \sum_n \gamma_n e^{i2\pi nt/T}, f \right\rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} \\ &= \sum_n \langle \gamma_n e^{i2\pi nt/T}, f \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} \end{aligned}$$

en posant $f(t) = \chi(t) e^{-i2\pi n_0 t/T}$, on obtient

$$\begin{aligned} &= \sum_n \int_{\mathbb{R}} \chi(t) e^{i2\pi(n-n_0)t/T} dt \\ &= \sum_n \int_0^T e^{i2\pi(n-n_0)t/T} dt \\ 0 &= T\gamma_{n_0} \end{aligned}$$

□

4.2.4 Série de Fourier d'une distribution T -périodique

Théorème 8. *Soit u une distribution T -périodique, on définit*

$$\gamma_n(u) = \frac{1}{T} \langle u, \chi e^{-2i\pi nt/T} \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}}$$

où χ est une partition de l'unité, alors $\gamma_n(u)$ est à croissance lente, ne dépend pas de χ et

$$u = \sum_n \gamma_n(u) e^{2i\pi nt/T}.$$

Démonstration. On vérifie que $u = 1 \times u = \sum \tau_{nT} \chi u = \sum \tau_{nT} (\chi u)$. $\tilde{u} = \chi u$ est une distribution à support compact telle que $u = \sum_n \tau_{nT} \tilde{u}$.

\tilde{u} est à support compact K donc, si χ_K est une fonction de \mathcal{D} égale à 1 sur K , il existe une constante C et un ordre k tels que

$$\begin{aligned} |\gamma_n(u)| &= \left| \frac{1}{T} \langle \tilde{u}, \chi_K e^{-i2\pi nt/T} \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} \right| \\ &\leq C \sup_{t \in K} \left| \frac{\partial^k}{\partial t^k} (\chi_K e^{-i2\pi nt/T}) \right| = C \sup_{t \in K} \left| \frac{\partial^k}{\partial t^k} e^{-i2\pi nt/T} \right| \\ &\leq C' (1 + |n|)^k \end{aligned}$$

et la suite est bien à croissance lente.

Soit $\tilde{f} \in \mathcal{D}$, $f = \sum \tau_{nT} \tilde{f}$ est C^∞ et T -périodique. Ses coefficients de Fourier sont

$$\begin{aligned}\hat{f}[n] &= \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-i2\pi nt/T} dt \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T \sum \tau_T \tilde{f}(t) e^{-i2\pi nt/T} dt \\ &= \frac{1}{T} \int_{\mathbb{R}} \tilde{f}(t) e^{-i2\pi nt/T}\end{aligned}$$

A l'aide de Dirichlet, on obtient

$$\begin{aligned}\langle u, \tilde{f} \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} &= \langle \tilde{u}, f \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} \\ &= \langle \tilde{u}, \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}[n] e^{i2\pi nt/T} \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}[n] \langle \tilde{u}, e^{i2\pi nt/T} \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} \\ &= T \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}[n] \gamma_{-n}(u)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle \sum_{-N}^N \gamma_n(u) e^{i2\pi nt/T}, \tilde{f} \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} &= \sum_{-N}^N \gamma_n(u) \langle e^{i2\pi nt/T}, \tilde{f} \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} \\ &= T \sum_{-N}^N \gamma_n(u) \hat{f}[-n] \\ &\xrightarrow{N \rightarrow \infty} T \sum_{n \in \mathbb{Z}} \gamma_n(u) \hat{f}[-n] = \langle u, \tilde{f} \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}}.\end{aligned}$$

On en déduit que $u = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \gamma_n(u) e^{i2\pi nt/T}$ et que cette décomposition est unique de part l'unicité de la décomposition en série de Fourier. \square

4.2.5 Transformée de Fourier d'une distribution T -périodique

Théorème 9. $\forall u \in \mathcal{D}'_T, u \in \mathcal{S}'$ et $\mathcal{F}u = \sum_n \gamma_n(u) \delta_{n/T}$.

Démonstration. On décompose u en série de Fourier : $u = \sum \gamma_n(u) e^{i2\pi nt/T}$ avec $|\gamma_n(u)| \leq C(1 + |n|)^p$.

Montrons que $v = \sum_n \delta_{n/T} \in \mathcal{S}'$. On vérifie, $\forall f \in \mathcal{S}, \forall n \neq 0$,

$$\begin{aligned}|\langle \gamma_n(u) \delta_{n/T}, f \rangle_{\mathcal{S}', \mathcal{S}}| &= |\gamma_n(u)| |f(n/T)| \\ &\leq C'(1 + |n/T|^p) |f(n/T)| \\ &\leq C'' \mathcal{N}_{p+2}(f) / n^2\end{aligned}$$

et donc que

$$\begin{aligned}|\langle \sum \gamma_n(u) \delta_{n/T}, f \rangle_{\mathcal{S}', \mathcal{S}}| &\leq |\gamma_0| \mathcal{N}_0(f) + C''' \mathcal{N}_{p+2}(f) \\ &\leq C \mathcal{N}_{p+2}(f).\end{aligned}$$

On pose alors $v_N = \sum_{-N}^N \gamma_n(u) \delta_{n/T}$ dont on vérifie qu'il converge vers v dans \mathcal{S}' .

$\mathcal{F}^{-1}(v_N) = \sum_{-N}^N \gamma_n(u) e^{i2\pi n t/T}$ converge alors vers $\mathcal{F}^{-1}(v)$ dans \mathcal{S}' .

Par ailleurs, on vérifie aisément que $\mathcal{F}^{-1}(v_N)$ converge vers u dans \mathcal{D}' . Par unicité de la limite dans \mathcal{D}' , $u \in \mathcal{S}'$ et $\mathcal{F}^{-1}(v) = u$. On en déduit immédiatement $\mathcal{F}(u) = v$. □

4.3 Échantillonnage

4.3.1 Échantillonnage et distribution

Échantillonnage On mesure une fonction continue f à croissance lente avec un pas d'échantillonnage T , on obtient la collection de valeurs

$$(f(nT))_{n \in \mathbb{Z}}.$$

Discretisé La bonne manière de représenter ce procédé est de supposer que l'on connaît la distribution suivante

$$f_T = T \sum f(nT) \delta_{nT}$$

dont on montre, en utilisant les sommes de Riemann, qu'elle converge vers f dans \mathcal{S}' .

Problème On souhaite étudier les liens entre f et f_T à travers leur transformée de Fourier. On vérifie aisément que

$$\mathcal{F} f_T = T \sum f(nT) e^{-i2\pi n T t}$$

est $1/T$ -périodique. On va montrer que sous de bonnes hypothèses c'est la périodisée de la transformée de f :

$$\mathcal{F} f_T = \sum_n \delta_{n/T} \mathcal{F} f.$$

4.3.2 Formule de Poisson

Transformée de Fourier du peigne de Dirac $u = T \sum \delta_{nT} \in \mathcal{S}'$.

u est T -périodique donc $u = \sum_n \gamma_n(u) e^{i2\pi n t/T}$ et $\mathcal{F}u = \sum \gamma_n u \delta_{n/T}$. Reste à calculer $\gamma_n(u)$:

$$\gamma_n(u) = \frac{1}{T} \langle u, \chi e^{-i2\pi n t/T} \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} = \sum_k \xi(kT) e^{-i2\pi n k} = 1$$

On obtient donc

$$\begin{aligned} u &= T \sum \delta_{nT} = \sum e^{i2\pi n t/T} \\ \mathcal{F}u &= \sum \delta_{n/T} = T \sum e^{i2\pi n t/T} \end{aligned}$$

La transformée de Fourier d'un peigne de Dirac de pas T est un peigne de Dirac de pas $1/T$ (fréquence d'échantillonnage).

Théorème 10 (Poisson). $\forall f \in \mathcal{S}, T \sum_n f(nT) = \sum_n \hat{f}(n/T)$.

Démonstration. En remarquant que $\mathcal{F}^{-1}u = \sum_n \delta_{n/T}$, on obtient $\langle u, f \rangle_{\mathcal{S}', \mathcal{S}} = T \sum_n f(nt) = \langle \mathcal{F}^{-1}u, \mathcal{F}f \rangle_{\mathcal{S}', \mathcal{S}} = \sum \hat{f}(n/T)$. \square

4.3.3 Périodisation du spectre

Théorème d'échantillonnage Peut-on retrouver f à partir de f_T ? Réponse donnée par Whittaker (1925), Nyquist (1928), Kotelnikov (1933) mais la meilleure formalisation a été proposée par Shannon (1949).

Bande limitée La continuité de f est l'hypothèse minimale pour donner un sens à l'échantillonnage. Pour obtenir un résultat positif à la question précédente, on a besoin d'une hypothèse beaucoup plus forte : la fonction doit être bande-limitée...

Définition On dit que $f \in \mathcal{S}'$ est à bande limitée si et seulement si sa transformée de Fourier est à support compact.

Remarque C'est une hypothèse forte puisqu'elle implique

Proposition 18. Soit $f \in \mathcal{S}'$ à bande limitée (i.e. $\mathcal{F}f$ est à support compact et donc $\mathcal{F}f \in \mathcal{E}'$), f est \mathbf{C}^∞ à croissance lente et $f(x) = \langle \mathcal{F}f, e^{i2\pi x\xi} \rangle_{\mathcal{E}', \mathcal{E}}$.

Les espaces \mathcal{E} et \mathcal{E}' correspondent respectivement aux fonctions \mathbf{C}^∞ bornées et aux distributions à support compacts qui leur sont associés.

Démonstration. On pose $g(x) = \langle \mathcal{F}f, \chi e^{i2\pi x\cdot} \rangle_{\mathcal{E}', \mathcal{E}}$. Cette fonction est bien définie et au plus à croissance polynomiale par un argument similaire à celui utilisé pour contrôler la croissance des coefficients de Fourier des distributions T -périodiques. On vérifie aisément qu'elle est dérivable de dérivée $g'(x) = \langle \mathcal{F}f, \chi e^{i2\pi x\cdot} \times i2\pi\cdot \rangle_{\mathcal{E}', \mathcal{E}}$ et donc par récurrence qu'elle est \mathbf{C}^∞ .

Soit $h \in \mathcal{S}$,

$$\langle f, h \rangle_{\mathcal{S}', \mathcal{S}} = \langle \mathcal{F}f, \mathcal{F}^{-1}h \rangle_{\mathcal{S}', \mathcal{S}}$$

En utilisant le support compact de $\mathcal{F}f$, on peut passer à \mathcal{E}'

$$\begin{aligned} &= \langle \mathcal{F}f, \mathcal{F}^{-1}h \rangle_{\mathcal{E}', \mathcal{E}} \\ &= \langle \mathcal{F}f, \int h(t) e^{i2\pi\xi t} dt \rangle_{\mathcal{E}', \mathcal{E}} \\ &= \langle \mathcal{F}f \otimes h, e^{i2\pi\xi t} \rangle_{\mathcal{E}(\mathbb{R}^2)', \mathcal{E}(\mathbb{R}^2)} \\ &= \langle h, \langle \mathcal{F}f e^{i2\pi\xi t} \rangle_{\mathcal{E}', \mathcal{E}} \rangle_{\mathcal{E}', \mathcal{E}} \\ &= \langle h, g \rangle_{\mathcal{E}', \mathcal{E}} \end{aligned}$$

et en notant que $g \in \mathbf{C}^\infty$ à croissance lente $\in \mathcal{S}'$

$$= \langle g, h \rangle_{\mathcal{S}', \mathcal{S}}$$

et donc f a un représentant \mathbf{C}^∞

$$f(x) = g(x) = \langle \mathcal{F}f, \chi e^{i2\pi x} \rangle_{\mathcal{E}', \mathcal{E}}.$$

□

Théorème 11. *Si f est à bande limitée alors*

$$\mathcal{F}f_T = \sum_n \tau_{n/T} \mathcal{F}f$$

Démonstration. Supposons pour commencer que $\mathcal{F}f \in \mathcal{D}$, ceci implique que $\mathcal{F}f \in \mathcal{S}$ et donc que $f \in \mathcal{S}$, on peut donc parler de \hat{f} .

On a alors

$$\begin{aligned} \mathcal{F}f_T &= \mathcal{F}(T \sum_n f(nT) \delta_{nT}) \\ &= T \sum_n f(nT) \mathcal{F} \delta_{nT} \\ \mathcal{F}f_T &= T \sum_n f(nT) e^{-i2\pi nT}. \end{aligned}$$

Cette série converge vers une fonction continue et on peut donc écrire

$$\mathcal{F}f_T(\phi) = T \sum_n f(nT) e^{-i2\pi nT\phi}$$

On applique alors la formule de Poisson à $g(t) = f(t) e^{-i2\pi t\phi}$

$$\mathcal{F}f_T(\phi) = \sum \hat{g}(n/T).$$

Or

$$\begin{aligned} \hat{g}(n/T) &= \int g(t) e^{-i2\pi n/T t} dt \\ &= \int f(t) e^{-i2\pi t(n/T + \phi)} dt \\ \hat{g}(n/T) &= \hat{f}(\phi + n/T), \end{aligned}$$

on obtient donc pour $f \in \mathcal{S}$, telle que $\hat{f} \in \mathcal{D}$,

$$\mathcal{F}f_T(\phi) = \sum \hat{f}(\phi + n/T).$$

Soit $f \in \mathcal{S}'$ à bande limitée, il existe une suite $\hat{f}_k \in \mathcal{S}$ telle que \hat{f}_k soient à support compact et converge vers $\mathcal{F}f$ dans \mathcal{S}' , dans \mathcal{D}' et dans \mathcal{E}' .

$\forall h \in \mathcal{D}$, en utilisant le support fini des transformées de Fourier, il existe un ensemble fini I_h qui est tel que

$$\begin{aligned} \langle \sum_n \tau_{n/T} \hat{f}_k, h \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} &= \sum_{n \in I_h} \langle \tau_{n/T} \hat{f}_k, h \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} \\ &= \sum_{n \in I_h} \langle \hat{f}_k, \tau_{-n/T} h \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} \\ &\rightarrow \sum_{n \in I_h} \langle \mathcal{F}f, \tau_{-n/T} h \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} \\ &= \sum_{n \in I_h} \langle \tau_{n/T} \mathcal{F}f, h \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} = \langle \sum_n \tau_{n/T} \mathcal{F}f, h \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}}. \end{aligned}$$

On en déduit que $\hat{f}_{k,T} = \sum_n \tau_{n/T} \hat{f}_k \xrightarrow{\mathcal{D}' } \sum_n \tau_{n/T} \mathcal{F}f$ qui appartient \mathcal{S}' en tant que distribution T -périodique.

En utilisant, alors le fait que les f_k et f sont \mathbf{C}^∞ à croissance au plus polynomiale et que $\forall n$

$$f_k(nT) = \langle \hat{f}_k, e^{i2\pi nT \cdot} \rangle_{\mathcal{E}', \mathcal{E}} \rightarrow \langle \mathcal{F}f, e^{i2\pi nT \cdot} \rangle_{\mathcal{E}', \mathcal{E}} = f(nT),$$

on vérifie que $\forall h \in \mathcal{S}$,

$$\begin{aligned} \langle f_{k,T}, h \rangle_{\mathcal{S}', \mathcal{S}} &= \langle T \sum_n f_k(nT) \delta_{nT}, h \rangle_{\mathcal{S}', \mathcal{S}} \\ &= T \sum_n f_k(nT) h(nT) \\ &\rightarrow T \sum_n f(nT) h(nT) = \langle f_T, h \rangle_{\mathcal{S}', \mathcal{S}}. \end{aligned}$$

On en déduit donc que $f_{k,T} \xrightarrow{\mathcal{S}' } f_T$, et donc que $\hat{f}_{k,T} \xrightarrow{\mathcal{S}' } \mathcal{F}f_T$. Par unicité de la limite, on conclut alors

$$\mathcal{F}f_T = \sum_n \tau_{n/T} \mathcal{F}f.$$

□

4.3.4 Théorème de Shannon

Théorème 12. *Si f continue $\in L^2$ et si $\mathcal{F}f$ est à support dans $[-1/2T, 1/2T]$ alors*

$$f(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(nT) h_T(t - nT) \quad \text{avec } h_T = \frac{\sin(\pi t/T)}{\pi t/T}.$$

Démonstration. $f \in L^2$ à bande limitée donc d'après le théorème précédent

$$\mathcal{F}f_T = \sum_n \tau_{n/T} \hat{f}$$

dont on vérifie qu'elle est dans L^2_{loc} et $1/T$ périodique. Sa série de Fourier est donnée par

$$\mathcal{F}f_T = T \sum_n f(nT) e^{-i2\pi n t}.$$

L'hypothèse du théorème se traduit par $\mathcal{F}f_T \mathbf{1}_{[-1/(2T), 1/(2T)]} = \mathcal{F}f$. On en déduit alors

$$\frac{1}{T} T^2 \sum_n |f(nT)|^2 = \int_{-1/(2T)}^{1/(2T)} |\hat{f}_T(\phi)|^2 = \int_{-1/(2T)}^{1/(2T)} |\hat{f}(\phi)|^2 = \|f\|_2^2$$

ainsi que

$$\hat{(f)}(\phi) \stackrel{L^2}{=} T \sum_n f(nT) e^{-i2\pi n T \phi} \mathbf{1}_{[-1/(2T), 1/(2T)]}.$$

En notant que $\mathcal{F}^{-1}(T \mathbf{1}_{[-1/(2T), 1/(2T)]}) = \frac{\sin(\pi t/T)}{\pi t/T} = h_T(t)$, on en déduit, en utilisant la continuité de la transformée de Fourier dans L^2

$$f \stackrel{L^2}{=} \sum_n f(nT) h_T(t - nT).$$

La convergence ponctuelle s'obtient en remarquant que $\sum_n f(nT) h_T(t - nT)$ est continue puisque $(h_T(t - nT))_n \in \ell^2$ et $\|h_T(t - nT) - h_T(t + h - nT)\|_{\ell^2} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$. \square

Remarques

- Si f est un polynôme trigonométrique, on retrouve le résultat mais avec une preuve différente basée sur une décomposition en série de Fourier de $e^{-i2\pi\phi t} \mathbf{1}_{[-1/(2T), 1/(2T)]}(\phi)$ vue comme une fonction de ϕ .
- On peut obtenir des résultats sans l'hypothèse $f \in L^2$ mais en un sens plus faible.

Suréchantillonnage Si l'on suppose que $\mathcal{F}f$ est à support dans $] -1/(2\Omega), 1/(2\Omega)[$ avec $\Omega > T$ et que l'on échantillonne avec un pas T (on suréchantillonne), on peut remplacer l'indicatrice par une fonction $C^\infty \hat{g}$. On remplace alors dans le théorème h_T par g_T qui est plus régulière et assure une convergence plus rapide de la série.

4.3.5 Repliement spectral

Repliement spectral/aliasing Que se passe-t-il lorsque les hypothèses de support de $\mathcal{F}f$ ne sont pas vérifiées? Si f est à bande limitée, on a toujours $\mathcal{F}f_T = \sum_n \tau_{n/T} \mathcal{F}f$ mais on a plus $\mathcal{F}f = \mathcal{F}f_T \mathbf{1}_{[-1/(2T), 1/(2T)]}$. On reconstruit avec la formule de Shannon un signal différent de f ...

Exemple

- $f(t) = \cos(2\pi\phi_0 t)$ avec $\phi_0 \in [0, 1/(2T)[$

$$\mathcal{F}f = \frac{1}{2}(\delta_{\phi_0} + \delta_{-\phi_0}) \rightarrow \mathcal{F}f_T = \frac{1}{2} \sum_n (\delta_{\phi_0 + n/T} + \delta_{-\phi_0 + n/T})$$

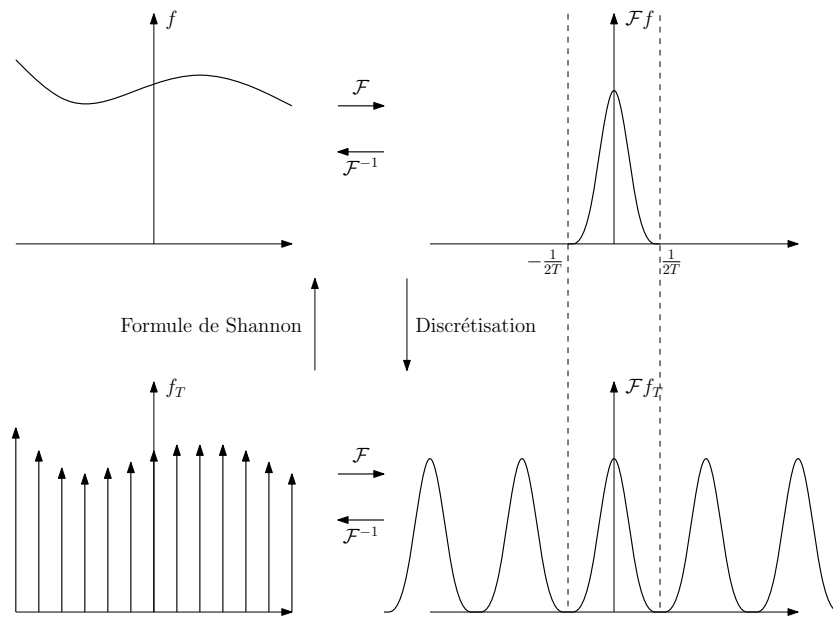


FIGURE 4.1 – Illustration du théorème de Shannon.

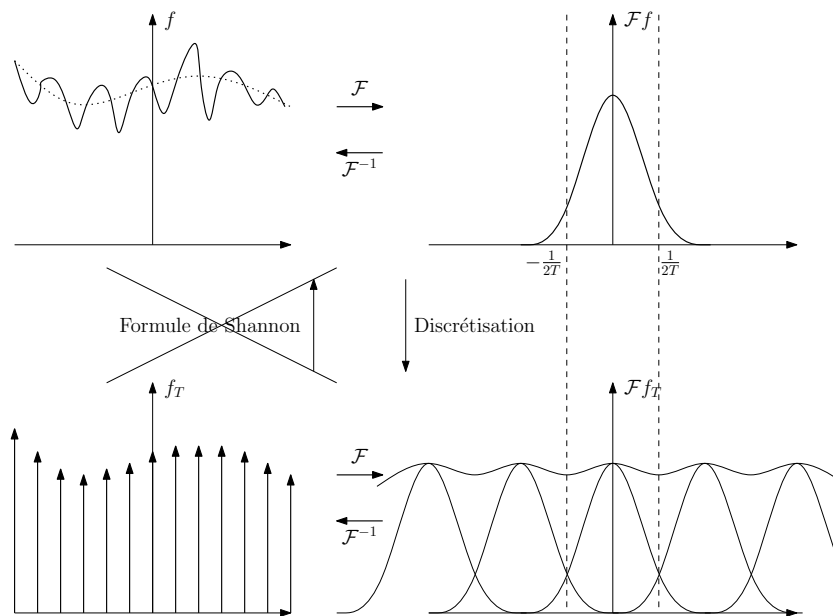


FIGURE 4.2 – Repliement spectral et échec de la formule de Shannon.

$$\phi_0 + n/T \in [-1/(2T), 1/(2T)] \Leftrightarrow n = 0 \quad -\phi_0 + n/T \in [-1/(2T), 1/(2T)] \Leftrightarrow n = 0$$

$$\Rightarrow \mathcal{F}f_T \mathbf{1}_{[-1/(2T), 1/(2T)]} = \frac{1}{2}(\delta_{\phi_0} + \delta_{-\phi_0}) = \mathcal{F}f$$

– $f(t) = \cos(2\pi\phi_0 t)$ avec $\phi_0 \in]1/(2T), 3/(2T)[$

$$\mathcal{F}f = \frac{1}{2}(\delta_{\phi_0} + \delta_{-\phi_0}) \rightarrow \mathcal{F}f_T = \frac{1}{2} \sum_n (\delta_{\phi_0+n/T} + \delta_{-\phi_0+n/T})$$

$$\phi_0 + n/T \in [-1/(2T), 1/(2T)] \Leftrightarrow n = -1 \quad -\phi_0 + n/T \in [-1/(2T), 1/(2T)] \Leftrightarrow n = 1$$

$$\Rightarrow \mathcal{F}f_T \mathbf{1}_{[-1/(2T), 1/(2T)]} = \frac{1}{2}(\delta_{\phi_0-1/T} + \delta_{-\phi_0+1/T}) \neq \mathcal{F}f$$

$$\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}f_T \mathbf{1}_{[-1/(2T), 1/(2T)]}) = \cos(2\pi(1/T - \phi_0)t) \neq f$$

On observe une fréquence plus lente que la fréquence réelle.

Cinéma Pour les films cinéma, on acquiert uniquement 24 images par seconde, ce n'est pas assez pour les mouvements rapides. Le repliement spectral qui en découle s'observe par exemple à travers le phénomène des roues de voitures qui tournent « à l'envers ».

Pré-lissage Comment échantillonner un signal f avec un pas T si celui-ci n'est pas à bande limitée dans $[-1/(2T), 1/(2T)]$? Dans le cas L^2 , la réponse est simple : on cherche une fonction $g \in L^2$ proche de f telle que $\mathcal{F}g$ soit à support dans $[-1/(2T), 1/(2T)]$. Le meilleur choix pour g est la projection de f sur l'espace des fonctions dont la transformée est à support dans $[-1/(2T), 1/(2T)]$:

$$\mathcal{F}g = \mathcal{F}f \times \mathbf{1}_{[-1/(2T), 1/(2T)]} \quad (\text{lissage par un filtre passe bas idéal})$$

CAN Un Convertisseur Analogique-Digital qui transforme un signal analogique en signal discret est ainsi composé d'un filtre passe bas suivi d'un échantillonneur uniforme.

Chapitre 5

Traitement du signal discret

Sommaire

5.1	Introduction	43
5.2	Filtrage discret homogène	44
5.2.1	Filtrage	44
5.2.2	Transformée de Fourier	44
5.3	Transformée en z et synthèse de filtre discret	45
5.3.1	Transformée en z	45
5.3.2	Filtres récursifs et fractions rationnelles	47
5.3.3	Transfert de filtres analogiques	47
5.4	Signaux finis	48

5.1 Introduction

Signal discret $f_T = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f[nT] \delta_{nt}$ à T fixé ou de manière équivalente $\{f[nT]\}_{n \in \mathbb{Z}}$.

Pour simplifier les notations, on suppose que $T = 1$:

$$f_1 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f[n] \delta_n \Leftrightarrow \{f[n]\}_{n \in \mathbb{Z}}.$$

Filtrage discret filtrage stable pour cette classe de distributions/les suites.

Dirac discret Avec un léger abus de notation, on pose

$$\delta_k[n] = \begin{cases} 1 & \text{si } n = k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

De sorte que on retrouve une écriture similaire à celle au sens des distributions

$$f[n] = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f[k] \delta_k[n].$$

5.2 Filtrage discret homogène

5.2.1 Filtrage

Filtre $L : \mathbb{C}^{\mathbb{Z}} \rightarrow \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ linéaire et homogène (stationnaire).

$$\begin{aligned} \Rightarrow Lf[n] &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} (L\delta[\cdot - k])[n] = \sum_{k \in \mathbb{Z}} L\delta[n - k] \\ &= L\delta \star f[n] \quad \text{où } \star \text{ est la convolution discrète.} \end{aligned}$$

On retrouve en $L\delta$ la réponse impulsionnelle et le fait qu'un filtre correspond à une convolution.

Définitions

- L est causal si et seulement si $L\delta[n] = 0, \forall n < 0$.
- L est stable si et seulement si $f \in \ell^\infty \implies Lf \in \ell^\infty$ (i.e. $L\delta \in \ell^1$)

5.2.2 Transformée de Fourier

Définition $h = L\delta = \sum_{n \in \mathbb{Z}} h[n]\delta_n \mapsto \widehat{h}(\phi) = \sum_n h[n]e^{-i2\pi\phi n}$ (fonction de transfert). Cette définition est valide si $h \in \ell^1$ mais s'étend sans soucis si ce n'est pas le cas. Elle reste de plus cohérente avec la transformée au sens des distributions.

Vecteurs propres Les exponentielles complexes sont des vecteurs propres de L :

$$(Le^{i2\pi\phi\cdot})[n] = \widehat{h}(\phi)e^{i2\pi\phi n}.$$

Variante On note parfois $\widehat{h}^\omega(\omega) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} h[n]e^{-i\omega n}$ comme on l'a fait pour les signaux analogiques.

Propriété $\widehat{Lf}^\omega(\omega) = \widehat{h}^\omega(\omega)\widehat{f}^\omega(\omega)$.

Exemple Filtre passe bas idéal est défini par la restriction de sa fonction de transfert 2π -périodique sur sur $[-\pi, \pi]$ par $\widehat{h}_{\text{PB}}^\omega(\omega) = \mathbf{1}_{[-\omega_c, \omega_c]}$.

Sa réponse impulsionnelle est

$$\begin{aligned} h_{\text{PB}}[n] &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \widehat{h}_{\text{PB}}^\omega(\omega) e^{i\omega n} d\omega \\ &= \frac{\text{sinc}(\omega_c n)}{\pi n} \end{aligned}$$

On obtient comme filtre l'échantillonné uniforme du filtre analogique passe-bas.

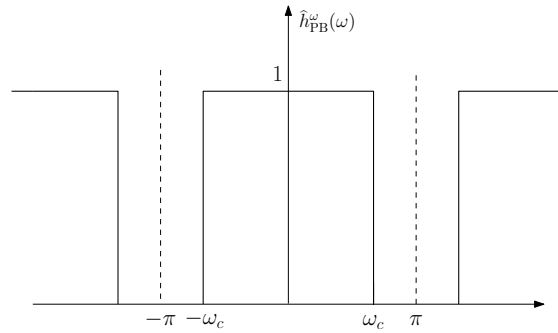


FIGURE 5.1 – Filtre passe bas idéal.

5.3 Transformée en z et synthèse de filtre discret

5.3.1 Transformée en z

Cadre Extension de la T.F. du cercle unité au plan complexe.

Continu (Laplace) Pour f continue,

$$\omega \in \mathbb{R} \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-i\omega t} dt \xrightarrow{\text{Laplace}} p \in \mathbb{C} \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-pt} dt$$

Fourier correspond à $p = i\omega$.

Discret (transformé en z) Pour f discret,

$$\omega \in \mathbb{R} \mapsto \sum_{n \in \mathbb{Z}} f[n]e^{-i\omega n} \xrightarrow[\text{en } z]{\text{transformée}} z \in \mathbb{C} \mapsto \sum_{n \in \mathbb{Z}} f[n]z^{-n}$$

Fourier correspond à $z = e^{i\omega}$.

Notation $\tilde{f}(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f[n]z^{-n}$

Convergence $\tilde{f}(z)$ est une série de Laurent (somme d'une série entière S_1 en z et d'une série entière S_2 en z^{-1})

$$\tilde{f}(z) = \underbrace{\sum_{n>0} f[-n]z^n}_{S_1} + \underbrace{\sum_{n \geq 0} f[n](z^{-1})^n}_{S_2}.$$

Le domaine de convergence de z est donc l'intersection des domaines de convergences de S_1 et S_2 . Pour S_1 , on utilise les propriétés des séries entières pour obtenir l'existence de

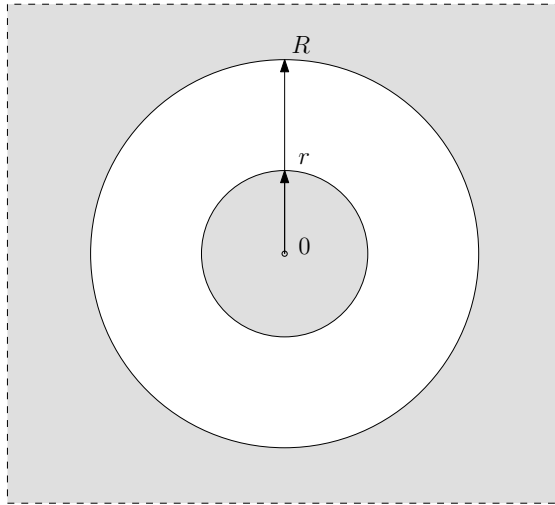


FIGURE 5.2 – Domaine de convergence d’une transformée en z .

$R \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall |z| < R, \quad \left| \sum_{n>0} f[-n]z^n \right| < +\infty$$

$$\forall |z| > R, \quad \left| \sum_{n>0} f[-n]z^n \right| = +\infty \text{ ou n'admet pas de limite.}$$

Pour S_2 , on obtient l’existence de $1/r \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall |z^{-1}| < 1/r, \quad \left| \sum_{n \geq 0} f[n](z^{-1})^n \right| < +\infty$$

$$\forall |z^{-1}| > 1/r, \quad \left| \sum_{n \geq 0} f[n](z^{-1})^n \right| = +\infty \text{ ou n'admet pas de limite.}$$

On en déduit que le domaine de convergence de la série de Laurent $\tilde{f}(z)$ est une couronne comprise entre les rayons r et R .

Propriétés

- Un filtre h est stable si et seulement si sa transformée en z est définie au voisinage du cercle unité
- Si filtre h est causal alors $R = +\infty$.

Convolution $\widetilde{h \star f}(z) = \tilde{h}(z)\tilde{f}(z)$ (comme pour la transformée de Fourier)

Exemples

$$\begin{aligned}
 h[n] = \delta[k - n] &\implies \tilde{h}(z) = z^{-k} && \text{(retard)} \\
 h[n] = a^n \mathbf{1}_{n \geq 0} &\implies \tilde{h}(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}} && |z| > |a| \\
 h[n] = na^n \mathbf{1}_{n \geq 0} &\implies \tilde{h}(z) = \frac{az^{-1}}{1 - az^{-1}} && |z| > |a|
 \end{aligned}$$

5.3.2 Filtres récursifs et fractions rationnelles

Filtres récursifs Famille de filtres implémentables en pratique : $g = Lf$ est défini de manière récursive par

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=0}^N a_k g[n-k] &= \sum_{k=0}^M b_k f[n-k] \quad (\text{cf équations différentielles en continue}) \\
 \Leftrightarrow g[n] &= a_0^{-1} \left(\sum_{k=0}^M b_k f[n-k] - \sum_{k=1}^N a_k g[n-k] \right).
 \end{aligned}$$

Filtres causaux par construction.

Transformée en z La transformée en z de l'équation de définition donne

$$\sum_{k=0}^N a_k z^{-k} \tilde{g}(z) = \sum_{k=0}^M b_k z^{-k} \tilde{f}(z).$$

La transformée en z du filtre h associé est donc la fraction rationnelle en z^{-1}

$$\tilde{h}(z) = \frac{\tilde{g}(z)}{\tilde{f}(z)} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}}$$

qui peut se décomposer en éléments simples dans \mathbb{C}

$$\tilde{h}(z) = \sum_{k=0}^{M-N} c_k z^{-k} + \sum_{r=1}^{\text{nb racines}} \sum_{d=1}^{d_r} \frac{c_{r,d}}{\left(1 - \frac{z^{-1}}{\xi_r}\right)^d}$$

où les ξ_r sont les racines de $\sum_{k=0}^N a_k x^k$, d_r est le degré de multiplicité de ξ_r .

Propriétés Le filtre est stable et causal si et seulement si $|\xi_r| > 1$ pour tout r .

5.3.3 Transfert de filtres analogiques

Problème Comment transformer un filtrer continu en un filtre discret analogue ?

$$\begin{aligned}
 \tilde{h}_c^\omega(\omega) &\rightarrow \tilde{h}_d(z) \\
 \text{continu} &\quad \text{discret}
 \end{aligned}$$

Filtres rationnels

$$\widehat{h}_c^\omega(\omega) = \frac{N(i\omega)}{D(i\omega)} \rightarrow \widetilde{h}_d(z) = \frac{N(F(z))}{D(F(z))} \quad \text{avec } F \text{ fraction rationnelle}$$

Fraction rationnelle F idéale telle que $F(e^{i\omega}) = i\omega$ n'existe pas. On la remplace par des approximations : par exemple,

$$F(z) = 1 - z$$

$$F(z) = \frac{1 - z}{1 + z}.$$

5.4 Signaux finis

Cadre Que faire lorsqu'on a uniquement N valeurs de $f : (f[n])_{0 \leq n \leq N-1}$?

Périodisation $f_{\text{per}}[n] = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f[n - kN] \mathbf{1}_{[0, N-1]}[n - kN]$ permet de se ramener aux signaux discrets. Attention la périodisation entraîne des problèmes de bords.

Transformée de Fourier Signal discret et périodiques ($\simeq N$ échantillons) \implies TF discrète et périodiques ($\simeq N$ fréquences).

Théorème 13. $\{e_k[n] = \frac{1}{\sqrt{N}} e^{i2\pi kn/N}\}_{0 \leq k \leq N-1}$ est une base orthonormée de \mathbb{C}^N .

On retrouve à l'aide de ce théorème ce que l'on aurait pu dans le cadre des distributions périodiques :

– Parseval $\sum_{n=0}^{N-1} |\langle f, e_n \rangle|^2 = \sum_{n=0}^{N-1} |f[n]|^2$

– Inversion : $f[n] = \sum_k \langle f, e_k \rangle e_k[n]$

On note habituellement $\widehat{f}[n]$ le coefficient de Fourier $\langle f, e_n \rangle$.

Convolution circulaire Pour les fonctions N -périodiques discrètes, on pose

$$f \otimes h[n] = \sum_{k=0}^{N-1} f[k] h[n - k]$$

et on vérifie que

$$\widehat{f \otimes h} = \widehat{f} \times \widehat{h} \quad (5.1)$$

Intérêt C'est en fait la seule TF que manipule les ordinateurs. Il existe un algorithme rapide pour la calculer l'algorithme de FFT (Fast Fourier Transform).

Chapitre 6

Traitement du signal aléatoire

Sommaire

6.1	Introduction	49
6.2	Processus stationnaire au sens large	50
6.2.1	Définitions	50
6.2.2	Estimation de la moyenne et de la covariance	50
6.2.3	Opérateurs de covariance et puissance spectrale	51
6.2.4	Filtrage linéaire homogène	53
6.2.5	Interprétation de la puissance spectrale	53
6.2.6	Classification, innovation	54
6.3	Filtrage de Wiener	55
6.3.1	Le problème du filtrage	55
6.3.2	Espérance conditionnelle et filtrage linéaire	56
6.3.3	Filtre de Wiener	57
6.4	Filtres auto-régressifs	58
6.4.1	Définition	58
6.4.2	Décomposition canonique	59
6.4.3	Prédiction	60
6.4.4	Estimation des coeffs d'A.R.	61

6.1 Introduction

Cadre discret $(f[n])_{n \in \mathbb{Z}}$ mais variables aléatoires au lieu de variables scalaires.

Intérêt Modélisation de classe de signaux à la place d'une seule réalisation.

Exemple Parole : prise en compte de la variabilité intra/inter personnes.

$$f[n] \rightarrow X[n](\omega) = X[n]$$

6.2 Processus stationnaire au sens large

6.2.1 Définitions

Processus aléatoire : $(X[n])_{n \in \mathbb{Z}}$ suite aléatoire $X[n] \in \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} .

Loi jointe : $\mathbb{P}\{X[n_1] \in A_1, \dots, X[n_k] \in A_k\}$ caractérise le processus.

Hypothèse : $\forall n, X[n] \in L^2(\Omega)$ (Existence d'une moyenne et d'une variance).

Moyenne : $\mu[n] = \mathbb{E}(X[n])$

(Auto-)covariance : $R_X[n, m] = \text{Cov}(X[n], X[m]) = \mathbb{E}\left((X[n] - \mu[n])\overline{(X[m] - \mu[m])}\right)$.

Définition Un processus stationnaire au sens large (PSSL) $(X[n])_{n \in \mathbb{Z}}$ est une suite de variables aléatoires réelles ou complexes de carrés intégrables telle que $\mu[n]$ est constant et $R_X(n, m)$ ne dépend que de $n - m$.

On pose $\mu = \mu_n = \mathbb{E}(X[n])$ et, avec un léger abus de notation, $R_X(n) = R_X(n, 0) = R_X(n + k, k)$.

R_X est parfois appelée “fonction de covariance”.

La définition de la covariance donne immédiatement :

Proposition 19. $R_X[n - m] = \overline{R_X[m - n]}$

Exemples

- Une suite de variables L^2 i.i.d. est un PSSL, (c'est même un processus stationnaire au sens strict),
- une suite de variables non corrélés de même moyenne et de même variance est un PSSL,
- une suite constante faite de la même variable L^2 est un PSSL

En traitement du signal, on a souvent une seule réalisation, l'hypothèse de stationnarité permet de réduire la “dimension” du problème en se ramenant à l'étude de 2 paramètres μ et R_X .

6.2.2 Estimation de la moyenne et de la covariance

Estimateur de la moyenne Moyenne empirique $\tilde{\mu}_N = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} X[n]$.

Estimateur sans biais $\mathbb{E}\tilde{\mu}_N = \mu$.

Définition Le processus est “ergodique pour la moyenne” si $\lim_{N \rightarrow \infty} \tilde{\mu}_N = \mu$ (au sens de la convergence L^2).

Proposition 20.

$$\mathbb{E}(|\tilde{\mu}_N - \mu|^2) = \frac{1}{N} \sum_{n=-N+1}^{N-1} \left(1 - \frac{|n|}{N}\right) R_X[n]$$

$(X[n])$ est ergodique pour la moyenne si et seulement si cette quantité tend vers 0 et donc si $R_X[n]$ tend vers 0 assez rapidement.

Démonstration.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(|\tilde{\mu}_N - \mu|^2) &= \frac{1}{N^2} \mathbb{E} \left(\sum_{0 \leq n, m} N-1 (X[n] - \mu) \overline{(X[m] - \mu)} \right) \\
&= \frac{1}{N^2} \sum_{0 \leq n, m \leq N-1} R_X[n-m] \\
&= \frac{1}{N^2} \sum_{-N+1 \leq l \leq N-1} (N-|l|) R_X[l] \\
\mathbb{E}(|\tilde{\mu}_N - \mu|^2) &= \frac{1}{N} \sum_{n=-N+1}^{N-1} \left(1 - \frac{|n|}{N}\right) R_X[n]
\end{aligned}$$

□

Exemple Suite orthogonale : $E((\tilde{\mu}_N - \mu)^2) = R_X(0)/N \dots$

L'autocovariance s'estime comme moyenne empirique de produits des réalisations avec délais : pour $m \geq 0$, cela donne

$$\tilde{R}_X[n] = \frac{1}{N-n} \sum_{m=n}^{N-1} N-1 (X[m] - \tilde{\mu}_N) \overline{(X[m-n] - \tilde{\mu}_N)}$$

6.2.3 Opérateurs de covariance et puissance spectrale

Opérateurs de covariance $(f[n]) \mapsto Rf[n] = \sum_m R_X[n-m]f[m] = R_X \star f[n]$

Hermitien : $\langle g, Rf \rangle = \sum_n g[n] \overline{Rf[n]} = \sum_n \sum_m g[n] \overline{R_X[n-m]f[m]} = \sum_n \sum_m g[n] \overline{R_X[m-n]f[m]} = \langle Rg, f \rangle$

Positif : $\langle f, Rf \rangle = \sum_{n,m} R_X[m-n] f[n] \overline{f[m]} = \mathbb{E} \left(\left(\sum_n f[n] (X[n] - \mu) \right)^2 \right) \geq 0$

Attention ces calculs ne sont valides que si f est une suite finie ou si $(R_X[n]) \in \ell^1$.

Si $R_X \in \ell^1$, on pose $\widehat{R}_X^\omega(\omega) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} R_X[n] e^{-in\omega}$ (Transformée de Fourier discrète donc $\widehat{R}_X^\omega(\omega)$ est 2π périodique).

On vérifie que comme R est un opérateur positif, $\widehat{R}_X^\omega(\omega) \geq 0$.

Définition $\widehat{R}_X^\omega(\omega)$ est la puissance spectrale du processus.

Interprétation comme énergie moyenne par unité de fréquence un peu plus tard...

Exemple Bruit blanc : $R_X[n] = \sigma^2 \delta[n] \rightarrow \widehat{R}_X^\omega(\omega) = \sigma^2$.

Remarque : $R_X[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \widehat{R}_X^\omega(\omega) e^{in\omega} d\omega$.

Mesure spectrale Que faire si $R_X \notin \ell^1$? Passage à la transformée de Fourier au sens des distributions ou des mesures...

X PSSL \implies :

- $R_X[0] \geq 0$
- $R_X[-n] = \overline{R_X[n]}$

$$- |R_X[n]| \leq R_X[0]$$

Démonstration. $(\text{Cov}(X[0] + \lambda X[n], X[0] + \lambda X[n]) = (1 + |\lambda|^2)R_X[0] + (\lambda R_X[n] + \overline{\lambda R_X[n]}) \geq 0$ On choisit $\lambda = \mu \frac{\overline{R_X[n]}}{|R_X[n]|}$ avec μ réel. On en déduit $(1 + \mu^2)R_X[0] + 2\mu|R_X[n]| \geq 0$ et donc en notant que le discriminant de ce polynôme réel de degré 2 est nécessairement négatif ou nul, $|R_X[n]|^2 \leq R_X[0]^2$. \square

Exemples Bruit Blanc $R_X[n] = \sigma^2 \delta[n]$ ou suite constante $X[n] = Y$ $R_X[n] = \sigma^2$.

Proposition 21. R_X est une suite de type positif i.e.

$$\forall k \geq 1, \forall (n_1, \dots, n_k), [R_X[n_i - n_j]]_{1 \leq i, j \leq k} \text{ est une matrice hermitienne de type positif}$$

$$\sum_{1 \leq i, j \leq k} z_{n_i} \overline{z_{n_j}} R_X[n_i - n_j] \geq 0, \forall z_{n_1}, \dots, z_{n_k} \in \mathbb{C}$$

Démonstration. Ce n'est qu'une redite ou presque de la preuve précédente... \square

Théorème 14 (Herglotz). Si R_X est de type positif alors il existe une unique mesure positive μ_X sur $[-\pi, \pi[$ telle que

$$R_X[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{in\omega} \mu_X(d\omega).$$

$$\mu_X(d\omega) = \widehat{R}_X^\omega(\omega) d\omega \text{ si } R_X \in \ell^1.$$

$$R_X[n] = \sigma^2 \Leftrightarrow \mu_X = 2\pi\sigma^2 \delta_0.$$

Esquisse de démonstration.

$$\forall N \geq 0, g_N(\omega) = \frac{1}{N} \sum_{0 \leq m, n \leq N-1} e^{-in\omega} e^{im\omega} R_X[n - m] \geq 0 \text{ par hypothèse.}$$

$$= \sum_{l=-N+1}^{N-1} (1 - |l|/N) R_X[l] e^{-ik\omega}$$

On pose $\mu_N(d\omega) = g_N(\omega) d\omega$ qui est une mesure positive telle que

$$(1 - |l|/N) R_X[l] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{il\omega} \mu_N(d\omega).$$

On fait tendre N vers l'infini et comme $\mu_N([-\pi, \pi]) = R_X[0]$, on peut extraire une sous-suite qui converge étroitement vers une mesure positive μ . On vérifie aisément que cette mesure convient. Reste à prouver l'unicité... \square

Définition μ_X est la mesure spectrale du processus.

6.2.4 Filtrage linéaire homogène

Filtrage d'un PSSL Soit $h \in \ell^1$ un filtre (une réponse impulsionnelle) et X un PSSL, on peut définir

$$Y = h \star X \Leftrightarrow Y[n] = \sum_k h[n-k]X[k]$$

C'est un PSSL :

- $\mathbb{E}Y[n] = \mathbb{E}(\sum_k h[n-k]X[k]) = \sum h[n-k]\mathbb{E}(X[k]) = (\sum h[n-k])\mu$
- $\text{Cov}(Y[n], Y[m]) = \text{Cov}(h \star X[n], h \star X[m])$

Proposition 22. Si $R_X \in \ell^1$,

$$\text{Cov}(h \star X[n], g \star Y[m]) = h \star \tilde{g} \star T_C[n-m] \text{ avec } \tilde{g}[n] = \overline{g[-n]}.$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} \text{Cov}(h \star X[n], g \star Y[m]) &= \mathbb{E} \left(\left(\sum_k h[n-k](X[k] - \mu) \right) \overline{\left(\sum_l g[m-l](X[l] - \mu) \right)} \right) \\ &= \sum_{k,l} h[n-k] \overline{g[m-l]} \mathbb{E} \left((X[l] - \mu) \overline{(X[k] - \mu)} \right) \\ &= \sum_{k,l} h[n-k] \overline{g[m-l]} R_X[k-l] \\ &= \sum_{k,l} h[n-k] \tilde{g}[l-m] R_X[k-l] \\ &= \sum_k h[n-k] \tilde{g} \star R_X[k-m] \\ \text{Cov}(h \star X[n], g \star Y[m]) &= h \star \tilde{g} \star R_X[n-m] \end{aligned}$$

□

Théorème 15 (Filtrage). Soit $h \in \ell^1$ et X un PSSL, $Y = h \star X$ est un PSSL de mesure spectrale $\mu_Y = |\widehat{h}^\omega(\omega)|^2 \mu_X$.

Démonstration. Si $R_X \in \ell^1$, en reprenant le calcul précédent, on obtient $R_Y \in \ell^1$ et $\widehat{R}_Y^\omega = \widehat{h}^\omega \times \widehat{h}^\omega \widehat{R}_X^\omega = |\widehat{h}^\omega|^2 \widehat{R}_X^\omega$. Pour étendre le résultat à $R_X \notin \ell^1$, on utilise un argument de densité. □

6.2.5 Interprétation de la puissance spectrale

Soit le filtre passe bas $h_{\Delta,\xi}$ de fonction de transfert 2π -périodique définie sur $[-\pi, \pi]$ par

$$\widehat{h}_{\Delta,\xi}^\omega(\omega) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2\pi}{\Delta}} & \text{si } |\omega - \xi| \leq \frac{\Delta}{2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases},$$

on note que $\|h\|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\widehat{h}^\omega(\omega)|^2 d\omega = 1$.

Soit X un PSSL centré, tel que $\mathbb{R}_X \in \ell^1$ (ce n'est pas nécessaire mais permet d'utiliser la transformée de Fourier « classique »), on définit le processus aléatoire $X_{\Delta,\xi} = h_{\Delta,\xi} \star X$ qui ne conserve que les composantes fréquentielles au voisinage de ξ . Son énergie moyenne est donnée par

$$\mathbb{E}(|X_{\Delta,\xi}|^2) = R_{X_{\Delta,\xi}}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \widehat{R}_{X_{\Delta,\xi}}^\omega(\omega) d\omega = \int_{|\omega-\xi| \leq \Delta/2} \frac{\widehat{R}_X^\omega(\omega)}{\Delta} d\omega,$$

qui tend vers $\widehat{R}_X^\omega(\xi)$ si \widehat{R}_X^ω est continue en ξ , ce qui est le cas avec l'hypothèse $R_X \in \ell^1$.

La puissance spectrale en ξ est donc proportionnelle à l'énergie moyenne du processus filtré autour de la fréquence ξ .

6.2.6 Classification, innovation

Cadre et notations On considère toujours que le processus X étudié est centré par soucis de simplification, bien que ce ne soit pas requis.

Dans $L^2(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$, on définit $H_n(X)$ le sous-espace de Hilbert engendré par $(X[k])_{k \leq n}$:

$$H_n(X) = \overline{\left\{ \sum_N^{-n} \alpha_k X[k], \alpha_k \in \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}, -\infty < N \leq n \right\}}.$$

Définitions

- X est purement aléatoire si $\bigcap_{n \in \mathbb{Z}} H_n(X) = \{0\}$.
- X est purement déterministe si $H_n(X) = H_0(X), \forall n \in \mathbb{Z}$.

Exemples

- Bruit blanc : $X[m] \perp H_n(X), m > n \implies \bigcap_{m \in \mathbb{Z}} X[m], \forall m \implies \bigcap_{m \in \mathbb{Z}} = \{0\}$.
- $X[n] = Y \implies H_n(X) = \{\alpha Y, \alpha \in \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}\} = H_0(X)$

Proposition 23. *Soit X un PSSL, il existe une décomposition de X en $X' + X''$ avec X' purement aléatoire et X'' purement déterministe.*

Démonstration. Soit $F = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} H_n(X)$, on définit E_n le complémentaire orthogonal de F dans $H_n(X)$.

On pose alors $X'[n] = \text{Proj}(X[n]|E_n) = \mathbb{E}(X[n]|E_n)$ et $X''[n] = \text{Proj}(X[n]|F) = \mathbb{E}(X[n]|F)$.

On a $H_n(X'') = \text{Proj}(H_n(X)|F) = F$ et donc X'' est purement déterministe.

Comme $E_n \supset E_{n-1}$, $\text{Proj}(H_n(X)|E_n) = H_n(X')$ et donc $H_n(X) = F \oplus H_n(X')$ et $F = \bigcap_n H_n(X) = F \oplus \bigcap_n H_n(X')$. On en déduit alors que $\bigcap_n H_n(X') = \{0\}$ et donc que X' est purement aléatoire. \square

Définition On appelle processus d'innovation de X le processus U défini par $U[n] = X[n] - \text{Proj}(X[n]|H_{n-1}(X))$.

$$\text{B.B} : U_n = X_n / X_n = Y \implies U_n = 0$$

Proposition 24. *i) Le processus d'innovation est un bruit blanc faible.*

ii) $H_n(U) \subset H_n(X)$ avec égalité si et seulement si X est purement aléatoire.

Démonstration. i) $U[n] \perp H_{n-1}(X)$ et $U[n] \in H_n(X)$ donc $U[n] \perp U[n-1], \dots, U[n-k], \forall k$. Reste donc à vérifier que $E(U[n]) = \text{cst}$ et que $V(U[n]) = \text{cst}$. C'est une conséquence de la définition de $U[n] = X[n] - \text{Proj}(X[n]|H_{n-1}(X))$ et du fait que $X[n] \mapsto X[n-1]$ se prolonge en une isométrie de $H(X)$.

ii) Par construction $U[n] \in H_n(X)$ et donc $H_n(U) \subset H_n(X)$. Plus précisément,

$$\begin{aligned} H_n(X) &= \text{Vect}(U[n]) \oplus H_{n-1}(X) \\ &= \text{Vect}(U[n], \dots, U[n-p]) \oplus H_{n-p-1}(X) \end{aligned}$$

en faisant tendre p vers l'infini

$$\begin{aligned} &= H_n(U) \oplus \bigcap_n H_n(X) \\ H_n(X) &= H_n(U) \oplus F. \end{aligned}$$

On en déduit que $H_n(U) = H_n(X)$ implique $F = \{0\}$ et donc que X est purement aléatoire. \square

Théorème 16. *Soit X un PSSL centré et U son processus d'innovation. Si X est purement aléatoire alors $\exists a \in \ell^2$ tel que*

$$X[n] = \sum_{k=0}^{+\infty} a[k]U[n-k]$$

Cela signifie que tout PSSL purement aléatoire est l'image par un filtre causal d'un bruit blanc (la réciproque est évidemment vraie).

Démonstration. $H_n(X) = H_n(U)$ et $(U[n])$ est une famille orthogonale donc

$$X[n] = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\langle X[n], U[n-k] \rangle}{\|U[n-k]\|^2} U[n-k].$$

U étant un bruit blanc faible, $\|U[n-k]\|^2$ est constant et par stationnarité $\langle X[n], U[n-k] \rangle$ ne dépend que de k . \square

6.3 Filtrage de Wiener

6.3.1 Le problème du filtrage

Cadre général On observe un signal D qui est une version dégradée d'un signal d'intérêt X

But estimer au mieux X à partir de D .

Cadre statistique modélisation aléatoire.

Exemple $D = X + B$ avec X et B deux PSSL indépendants pour lesquels on connaît R_X et R_B . En pratique, R_B est obtenu lors du calibrage de l'instrument et R_X est estimé à partir des données à l'aide de la relation $R_D = R_X + R_B$.

Hypothèses sur le problème On s'intéressera ici à des cas où $D = f(X, B)$ avec X et D deux PSSLs pour lesquels on connaît R_X , R_D et la covariance $R_{XD}[n] = \text{Cov}(X[n+k], D[k])$.

Par commodité, on supposera que $\mu = 0$.

Estimateur opérateur $L : D \mapsto \tilde{X} = L(D)$.

Critère on cherche à minimiser l'erreur quadratique ponctuelle :

$$\mathbb{E} \left((X[n] - \tilde{X}[n])^2 \right) = \|X[n] - \tilde{X}[n]\|_2^2.$$

6.3.2 Espérance conditionnelle et filtrage linéaire

Cas général la meilleure solution est donnée par $\tilde{X}[n] = E(X[n]|H(D))$ (espérance conditionnelle). A priori, ceci est trop difficile à déterminer.

Cas gaussien $(X[n], D[n])_{n \in \mathbb{Z}}$ est gaussien $\Leftrightarrow, \forall I$ fini $c \subset \mathbb{Z}, (X[n], D[n])_{n \in I}$ est un vecteur gaussien. Dans ce cas, $\tilde{X}[n] = E(X[n]|H(D))$ est linéaire en D :

$$\tilde{X}[n] = \sum_k a[n-k]D[k]$$

où la convolution apparaît par stationnarité du problème.

Cas linéaire on impose à L d'être linéaire en D et on optimise dans ce cadre. C'est moins bien que l'espérance conditionnelle mais on obtient quelque chose de calculable.

Théorème 17 (Régression linéaire). (*Théorème de la projection sur $H(D)$ qui est fermé*)

- Le problème de la minimisation de $\|A - \tilde{A}\|^2$ pour $\tilde{A} \in H(D)$ admet une solution unique $\tilde{A}_0 = \text{Proj}(A|H(D))$ (projection orthogonale de A sur $H(D)$).
- \tilde{A}_0 est caractérisé par
 - $\tilde{A}_0 \in H(D)$
 - $A - \tilde{A}_0 \perp D[k], \forall k$
- \tilde{A}_0 satisfait $\epsilon = \|A - \tilde{A}_0\|^2 = \|A\|^2 - \langle A, \tilde{A}_0 \rangle$

En pratique, on supposera que $\tilde{A}_0 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a[k]D[k]$, ce qui est légèrement plus fort que $\tilde{A}_0 \in H(D)$, et on cherchera à déterminer les coefficients $a[k]$. On verra que sous des hypothèses d'appartenance à ℓ^1 de fonctions de covariance, on trouvera bien une solution de cette forme qui satisfait les conditions du théorème de la régression linéaire.

Ceci permet la caractérisation du filtre de Wiener.

6.3.3 Filtre de Wiener

Estimation par filtrage de Wiener On applique le résultat précédent à $X[n]$ et on obtient en utilisant la stationnarité que $\tilde{X}[n]$ la projection linéaire de $X[n]$ sur $H(D)$ est déterminée par

$$\begin{cases} \tilde{X}[n] = \sum h[n-k]D[k] \\ \mathbb{E}((X[n] - \tilde{X}[n])\overline{D[k]}) = 0 \end{cases} \quad (6.1)$$

Cette dernière condition se réécrit

$$\mathbb{E}(X[n]\overline{D[k]}) = \sum_l h[n-l]\mathbb{E}(D[l]\overline{D[k]}) \Leftrightarrow R_{XD}[n-k] = h \star R_D[n-k].$$

Si R_{XD} et $R_D \in \ell^1$ (existence d'une densité spectrale), on obtient $\widehat{R}_{XD}^\omega = \widehat{h}^\omega \widehat{R}_D^\omega$ ou encore

$$\widehat{h}^\omega = \frac{\widehat{R}_{XD}^\omega}{\widehat{R}_D^\omega}.$$

Exemples

$$\begin{aligned} - D = X + B &\implies \widehat{h}^\omega = \frac{\widehat{R}_X^\omega}{\widehat{R}_X^\omega + \widehat{R}_B^\omega} \\ - D = g \star X + B &\implies \widehat{h}^\omega = \frac{\widehat{g}^\omega \widehat{R}_X^\omega}{|\widehat{g}^\omega|^2 \widehat{R}_X^\omega + \widehat{R}_B^\omega} \end{aligned}$$

Théorème 18 (Wiener). *Parmi les processus \tilde{X} linéaires en D , celui qui minimise l'erreur quadratique moyenne $\epsilon = \|\tilde{X}[n] - X[n]\|^2$ est $\tilde{X} = h \star D$ avec $\widehat{h}^\omega = \frac{\widehat{R}_{XD}}{\widehat{R}_D}$ et l'erreur minimale atteinte est*

$$\epsilon = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\widehat{R}_X^\omega(\omega)\widehat{R}_D^\omega(\omega) - (\widehat{R}_{XD}^\omega)^2(\omega)}{\widehat{R}_D^\omega(\omega)} d\omega$$

Démonstration. Seul le second point reste à prouver :

$$\begin{aligned} \epsilon &= \mathbb{E}(|X[n]|^2) - \sum_l \overline{h[n-l]}\mathbb{E}(X[n]\overline{D[l]}) \\ &= R_X[0] - \sum_l \overline{h[n-l]}R_{XD}[n-l] \end{aligned}$$

Par la formule de reconstruction et Parseval

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \widehat{R}_X^\omega(\omega) d\omega - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \overline{\widehat{h}^\omega(\omega)} \widehat{R}_{XD}^\omega(\omega) d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\widehat{R}_X^\omega(\omega) \widehat{R}_D^\omega(\omega) - |\widehat{R}_{XD}^\omega(\omega)|^2}{\widehat{R}_D^\omega(\omega)} d\omega
\end{aligned}$$

□

Interprétation du filtrage pour le débruitage Si $D = X + B$,

$$\begin{aligned}
\widehat{R}_X^\omega(\omega) \widehat{R}_D^\omega(\omega) - \widehat{R}_{XD}^\omega(\omega) &= \widehat{R}_X^\omega(\omega) (\widehat{R}_X^\omega(\omega) + \widehat{R}_B^\omega(\omega)) - (\widehat{R}_X^\omega(\omega))^2 = \widehat{R}_X^\omega(\omega) \widehat{R}_B^\omega(\omega) \\
\epsilon &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\widehat{R}_X^\omega(\omega) \widehat{R}_B^\omega(\omega)}{\widehat{R}_X^\omega(\omega) + \widehat{R}_B^\omega(\omega)} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \widehat{h}^\omega(\omega) \widehat{R}_B^\omega(\omega) d\omega
\end{aligned}$$

Interprétation :

$$\widehat{h}^\omega(\omega) = \frac{\widehat{R}_X^\omega(\omega)}{\widehat{R}_X^\omega(\omega) + \widehat{R}_B^\omega(\omega)} \simeq \begin{cases} 1 & \text{si } \widehat{R}_X^\omega(\omega) \gg \widehat{R}_B^\omega(\omega) \\ 0 & \text{si } \widehat{R}_X^\omega(\omega) \ll \widehat{R}_B^\omega(\omega) \end{cases}.$$

On élimine les fréquences où le bruit domine et dans l'erreur on retrouve la partie fréquentielle correspondant à ces fréquences. On a donc bien effectué un filtrage !

6.4 Filtres auto-régressifs

6.4.1 Définition

Définition Un PSSL X est Auto-Régressif (A.R.) si il existe un polynôme P non nul et un B.B. normalisé tels que

$$p \star X = B$$

où p est le filtre associé à P ($\tilde{p}(z) = P(z^{-1})$).

Remarque Quitte à décaler B , on peut toujours supposer $P(0) \neq 0$. Cette définition correspond donc à la formule de récurrence suivante

$$X[n] = \frac{1}{a_0} \left(- \sum_{k=1}^N a_k X[n-k] + B[n] \right)$$

avec $P(x) = \sum_{k=0}^N A_k x^k$.

Proposition 25. P n'a pas de racines de module 1.

Démonstration. Par le théorème du filtrage, $|\tilde{p}^\omega(\omega)|^2 \widehat{R}_X^\omega(\omega) = \widehat{R}_B^\omega(\omega)$ soit $|P(e^{i\omega})| \widehat{R}_X^\omega(\omega) = 1$. □

$\tilde{p}(z)$ admet donc un inverse $\tilde{p}^{-1}(z) = 1/\tilde{p}(z)$ sur un voisinage du cercle unité.

Problème Le filtre associé à \tilde{p}^{-1} est stable et causal si et seulement si toutes les racines de P sont de modules strictement supérieur à 1. Ce qui n'est évidemment pas toujours le cas !

6.4.2 Décomposition canonique

Proposition 26. Soit P un polynôme sans racine de module 1 et tel que $P(0) \neq 0$, il existe un unique polynôme P_0 et un unique réel $\sigma > 0$ tels que

- $\sigma|P(z^{-1})| = |P_0(z^{-1})|$ sur le cercle unité.
- P_0 a toutes ses racines de module > 1 .
- $P_0(0) = 1$

On parle de couple canonique (P_0, σ) associé à P .

Démonstration. Existence :

$$|P(z^{-1})| = \left| c \prod_{i=1}^N (z^{-1} - \xi_i) \right|$$

où les ξ_i sont les racines de P

$$= |c| \prod_{i=1}^N |z^{-1} - \xi_i|$$

On utilise alors la propriété suivante valide pour tout $z \in \mathbb{C}$ de module 1 et tout $\xi \in \mathbb{C}$,

$$|z^{-1} - \xi| = |\bar{z}^{-1}| |z^{-1} - \xi| = |1 - \xi \bar{z}^{-1}| = |\bar{\xi} z^{-1} - 1| = |\xi| \left| z^{-1} - \frac{1}{\bar{\xi}} \right|,$$

pour remplacer dans le produit précédent $|z^{-1} - \xi|$ par $|\xi| \left| z^{-1} - \frac{1}{\bar{\xi}} \right|$ pour toutes les racines ξ_i de module < 1 . Quitte à les réordonner, on peut imposer que cela nécessite uniquement de modifier les N' premières racines, de sorte que

$$\begin{aligned} |P(z^{-1})| &= |c| \prod_{i=1}^{N'} |\xi_i| \left| z^{-1} - \frac{1}{\bar{\xi}_i} \right| \prod_{i=N'+1}^N |z^{-1} - \xi_i| \\ &= \left(|c| \prod_{i=1}^{N'} |\xi_i| \right) \left| \prod_{i=1}^{N'} \left(z^{-1} - \frac{1}{\bar{\xi}_i} \right) \prod_{i=N'+1}^N (z^{-1} - \xi_i) \right| \\ &= \frac{1}{\sigma} |P_0(z^{-1})| \end{aligned}$$

Unicité : On suppose que $|A(z)| = c|B(z)|$ sur le cercle unité, $A(0) = B(0) = 1$ et que toutes les racines sont de module > 1 . On va montrer que $A = B$ et $c = 1$.

Soient ξ_k les racines de A et η_k les racines de B : pour z de module 1,

$$\prod_{i=1}^N (z - \xi_i)(\bar{z} - \bar{\xi}_i) = c^2 \prod_{i=1}^M (z - \eta_i)(\bar{z} - \bar{\eta}_i)$$

On multiplie à gauche et à droite par z^{N+M} et on utilise $z\bar{z} = 1$ pour obtenir

$$z^M \prod_{i=1}^N (z - \xi_i)(1 - \bar{\xi}_i z) = c^2 z^N \prod_{i=1}^M (z - \eta_i)(1 - \bar{\eta}_i z).$$

Ces deux polynômes coïncident sur le cercle unité, ils sont donc égaux. Les ensembles de racines se correspondent donc

$$\left\{ \xi_k, \frac{1}{\xi_k}, 1 \leq k \leq N \right\} = \left\{ \eta_k, \frac{1}{\eta_k}, 1 \leq k \leq M \right\}$$

On en déduit que $N = M$ et la condition $|\xi_k| > 1$ et $|\eta_k| > 1$ assurent que en fait

$$\{ \xi_k, 1 \leq k \leq N \} = \{ \eta_k, 1 \leq k \leq M \}.$$

Les polynômes A et B sont donc proportionnels, la condition $A(0) = B(0)$ assure leur égalité. \square

Proposition 27. *Soit X un PSSL A.R., il existe un unique couple (P_0, σ) tel que*

- $P_0 \star X = \sigma B_0$ avec B_0 un bruit blanc normalisé.
- $P_0(0) = 1$ et P_0 a toutes ses racines de modules > 1 .

On parle d'écriture canonique du PSSL X .

Démonstration. X est un PSSL A.R. donc il existe P tel que $P \star X = B$ avec B un bruit blanc normalisé. Soit (P_0, σ) le couple canonique associé à P . On vérifie aisément que $P_0 \star X$ est un PSSL de puissance spectrale $|\widehat{P}_0^\omega(\omega)|^2 R_X(\omega) = \sigma^2 |\widehat{P}^\omega(\omega)|^2 R_X(\omega) = \sigma^2$. C'est à dire que $\frac{1}{\sigma} P_0 \star X$ est un bruit blanc normalisé. L'unicité s'obtient du fait que $\frac{1}{\sigma^2} |\widehat{P}_0^\omega(\omega)|^2 R_X(\omega) = \frac{1}{\sigma'^2} |\widehat{P}'^\omega(\omega)|^2 R_X(\omega)$ implique $|\widehat{P}_0^\omega(\omega)|^2 R_X(\omega) = \frac{\sigma'^2}{\sigma^2} |\widehat{P}'^\omega(\omega)|^2 R_X(\omega)$. La proposition précédente donne alors le résultat souhaité. \square

6.4.3 Prédiction

Proposition 28. *Soit $P_0 \star X = \sigma B_0$ la décomposition canonique d'un processus X A.R.,*

$$H_n(X) = H_n(B_0)$$

Corollaire 2. *X est un processus purement aléatoire et σB_0 est son processus d'innovation.*

Démonstration. P_0 est causal donc $H_n(B_0) \subset H_n(X)$.

P_0 admet un inverse P_0^{-1} causal tel que $X = \sigma P_0^{-1} \star B_0$ et donc $H_n(X) \subset H_n(B_0)$. \square

Théorème 19. *Soit X un PSSL A.R. de décomposition canonique $P_0 \star X = \sigma B_0$, la prédiction linéaire $\tilde{X}[n+1]$ de $X[n+1]$ en fonction de $H_n(X)$ est la projection de $X[n+1]$ sur $H_n(X)$:*

$$\tilde{X}[n+1] = - \sum_{k=1}^N a_k X[n-k+1] \quad \text{où } P_0(x) = 1 + \sum_{k=1}^N a_k x^k$$

et $E(|\tilde{X}[n+1] - X[n+1]|^2) = \sigma^2$.

Démonstration. Par définition,

$$X[n+1] + \sum_{k=1}^N a_k X[n-k+1] = \sigma B_0[n+1] \perp H_n(X)$$

donc

$$\text{Proj}(X[n+1]|H_n(X)) = \tilde{X}[n+1] = - \sum_{k=1}^N a_k X[n-k+1].$$

On en déduit que $X[n+1] - \tilde{X}[n+1] = \sigma B_0[n+1]$ d'où une erreur quadratique moyenne de σ^2 . \square

Remarque $\tilde{X}[n+k]$ se calcule de manière récursive pour $k > 1$:

$$\tilde{X}[n+k] = \text{Proj}(X[n+k]|H_n(X)) = \text{Proj}(\text{Proj}(\dots \text{Proj}(X[n+k]|H_{n+k-1}(X)) \dots |H_{n+1}(X))|H_n(X)).$$

Pour déterminer l'erreur, on utilise plutôt :

$$\begin{aligned} X = \sigma P_0^{-1} \star B_0 &\implies X[n+k] = \sigma \sum_{l=0}^{+\infty} (P_0^{-1})[l] B_0[n+k-l] \\ &\implies X[n+k] - \tilde{X}[n+k] = \sigma \sum_{l=0}^{k-1} (P_0^{-1})[l] B_0[n+k-l] \end{aligned}$$

et donc $E(|X[n+k] - \tilde{X}[n+k]|^2) = \sigma^2 \sum_{l=0}^{k-1} |(P_0^{-1})[l]|^2$.

6.4.4 Estimation des coeffs d'A.R.

Problème Supposons que X soit un A.R., comment déterminer les coefficients de son écriture canonique

$$X[n] + \sum_{k=1}^N a_k X[n-k] = \sigma B_0[n]?$$

Idée On multiplie par $\overline{X}[n-l]$ et on prend l'espérance :

$$R_X[l] + \sum_{k=1}^N \alpha_k R_X[l-k] = \sigma R_{B_0 X}[l].$$

On note alors que la quantité de droite est nulle dès que $l > 0$. On obtient donc la série d'équation :

$$\forall l > 0 - R_X[l] = \sum_{k=1}^N \alpha_k R_X[l-k]$$

soit sous forme matricielle pour $l = 1, \dots, N$

$$\begin{pmatrix} R_X[0] & R_X[-1] & \dots & R_X[-(N-1)] \\ R_X[1] & R_X[0] & \dots & R_X[-(N-2)] \\ \vdots & & & \vdots \\ R_X[N-1] & R_X[N-2] & \dots & R_X[0] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_N \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} R_X[1] \\ R_X[2] \\ \vdots \\ R_X[N+1] \end{pmatrix}.$$

Ce système est appelé système d'équations de Yule-Walker.

Il reste à le résoudre (inverser la matrice), ce qui n'est pas toujours possible sous cette forme...

En pratique On fait face à 2 problèmes : on ne connaît pas N et on a pas accès à R_X mais uniquement à une estimation.

Il existe cependant un algorithme efficace pour résoudre ce problème : l'algorithme de Durbin-Levinson.

L'exemple du LPC-10 Codage utilisé pour les téléphones.

voix = signal → Estimation des paramètres d'un A.R. d'ordre 10 → transmissions des paramètres → simulation d'un PSSL avec ces paramètres → signal émis \simeq voix.