

Comment mathériser les images pour les compresser?

E. LE PENNEC
LPMA (Paris 7)

11 Février 2008

Erwan Le Pennec



- Maître de Conférence – Paris 7 – LPMA, équipe de statistique.
- Formation :
 - Maths générales : Licence, Maîtrise (Paris 7), Agreg.
 - Maths plus appliquées : DEA (Mathématiques et Intelligence Artificielle) et Doctorat (Bandelettes et représentation géométrique des images)
- Parcours :
 - Industrie : LET IT WAVE (Traitement d'image et en particulier compression d'image de visage).
 - Université : Paris 7 dans l'équipe de Statistique...

Compression d'image



→ 0110101... →



Compression d'image

- Motivations.
- Principes mathématiques :
 - Statistique / Théorie de l'information (entropie, modélisation)
 - Algèbre linéaire (espace vectoriel, base, base orthonormée)
 - Analyse (construction de base et approximation)
- Frontière Math/Info.

Plan et algorithmes

- Image numérique.
- GIF (codage entropique).
- PNG (modélisation).
- JPEG (base orthonormée et construction de base).
- JPEG 2000 (base et approximation)
- et après ?

Image numérique



- Image : fonction L^2 sur un rectangle.
- Image numérique : version discrétisée et quantifiée ($256 = 2^8$ valeurs - 8 bits).
- Pour la couleur : utilisation de 3 images (RGB - 24 bits).
- Occupation mémoire importante : $1024 \times 2048 \times 24 = 6 \times 2^{13}$ bits = 6 Mo
- Besoin de compression.

Compression d'image



→ 0110101...

- Image numérique (NB) : capteur d'appareil photo,...
- Version modifiée (perte d'information) : changement de résolution ou autre...
- Compression sans perte (le retour vers la version originale est possible)
- Compression avec perte (retour impossible).

Compression sans perte



→ 0110101...

- Pas de perte d'information.
- Utiliser des redondances, des informations a priori pour coder plus efficacement l'image.
- Exemples : langage, abréviations, symboles,...

GIF

12	56	78	89	78	89	56	12
123	6	7	189	78	89	56	12
12	56	78	89	78	89	56	12
123	6	7	189	78	99	56	12
12	56	23	89	78	23	32	12
2	56	90	89	78	89	56	12
33	66	78	89	96	89	56	12
12	56	78	89	78	89	56	12

↓ liste

12	56	78	89	78	89	56	12	123	6	7	189	78	89	56	12	12	56	78	89	78	89	56	12	123	6	7	189	78	99	56	12
12	56	23	89	78	23	32	12	2	56	90	89	78	89	56	12	33	66	78	89	96	89	56	12	12	56	78	89	78	89	56	12

- Algorithme de compression sans perte introduit par CompuServe en 1987.
- Image 8 bits : palette ou niveau de gris.
- Liste des valeurs des pixels (ligne par ligne).
- Répétition dans la liste (redondance).
- Comment exploiter cette structure ? : codage entropique.

Entropie

- Comment “mesurer” la complexité d’une séquence ?
- Bon concept : entropie statistique (Shannon).
- Symboles indicés par $i \in I$ de probabilité p_i , entropie H

$$H = - \sum_{i \in I} p_i \log_2 p_i$$

- Théorème : Si le symbole i est codé par un mot de c_i bits alors

$$\sum_{i \in I} p_i c_i \geq - \sum_{i \in I} p_i \log_2 p_i = H$$

- Borne inférieure reliant la taille du mot à sa probabilité.
- Comment obtenir un tel codage ?

Codage entropique

- Pour des p_i (distribution de probabilité) connus, problème résolu.
- Algorithme pour obtenir un codage quasi optimal (mot de longueur $\simeq -\log_2 p_i$) :
 - Huffman (arbre)
 - Codage arithmétique (plus efficace mais plus complexe)
- Problème les p_i sont inconnus le plus souvent...

LZW

- Méthode pour obtenir un codage asymptotiquement optimal sans connaître les p_i .
- Approche de type dictionnaire :
 - créer un dictionnaire à partir de la liste de symboles à coder,
 - coder des groupes de symboles par leur position dans ce dictionnaire
- Variations dans la création du dictionnaire.
- 1977- : LZW, LZ..., ZIP, ARJ, ...
- Méthode utilisée dans le format GIF.

PNG

12	13	15	17	20	18	17	16	10	11	14	27	21	17	16	16	12	12	17	19	18	19	16	19	13	13	15	19	18	19	36	62	
12	14	19	20	20	23	32	63	14	18	20	22	24	37	56	62	17	20	22	23	25	63	66	64	20	24	25	27	28	60	66	67	
↓prédiction + différence																																
12	-1	4	2	3	-2	-1	-1	-6	1	3	13	-6	-4	-1	0	-4	0	5	2	-1	1	-3	3	-6	0	2	4	-1	1	17	26	
-50	2	5	1	0	3	9	31	-39	4	2	2	2	13	19	6	-45	3	2	1	2	48	3	-2	-44	4	1	2	1	32	6	1	

- Algorithme LZW breveté : besoin d'une solution de remplacement (95).
- Liste des pixels = liste de valeur d'intensité lumineuse.
- Prédiction possible d'une valeur en fonction de celles déjà vues et codage de l'erreur de prédiction.
- Modèle simple : valeur précédente, moyenne locale,...
- Utilisation d'une meilleure modélisation statistique d'une image.
- \implies Amélioration de l'efficacité des algorithmes de type dictionnaire.

Modélisation statistique

- Importance du modèle statistique : le facteur de compression dépend de la probabilité dans le modèle.
- Importance de construire des modèles adaptés.
- Modèle de distributions simples (iid avec une distribution connue) :
*OCRO HLO RGWR NMIELWIS EU LL NBNESEBYA TH EEI ALHENHTTPA
OOBTTVA NAH BRL*
- Modèle de dépendance en fonction du passé :
*IN NO IST LAT WHEY CRATICT FROURE BIRS GROCID PONDENOME
OF DEMONSTURES OF THE REPTAGIN IS REGOACTIONA OF CRE*
- Modèle de distribution plus complexes :
*THE HEAD AND IN FRONTAL ATTACK ON AN ENGLISH WRITER THAT
THE CHARACTER OF THIS POINT IS THEREFORE ANOTHER METHOD
FOR THE LETTERS THAT THE TIME OF WHO EVER TOLD THE
PROBLEM FOR AN UNEXPECTED*
- Pour les images \simeq facteur 4 de compression avec les meilleurs modèles (Markovien avec apprentissage. . .).

Compression avec perte



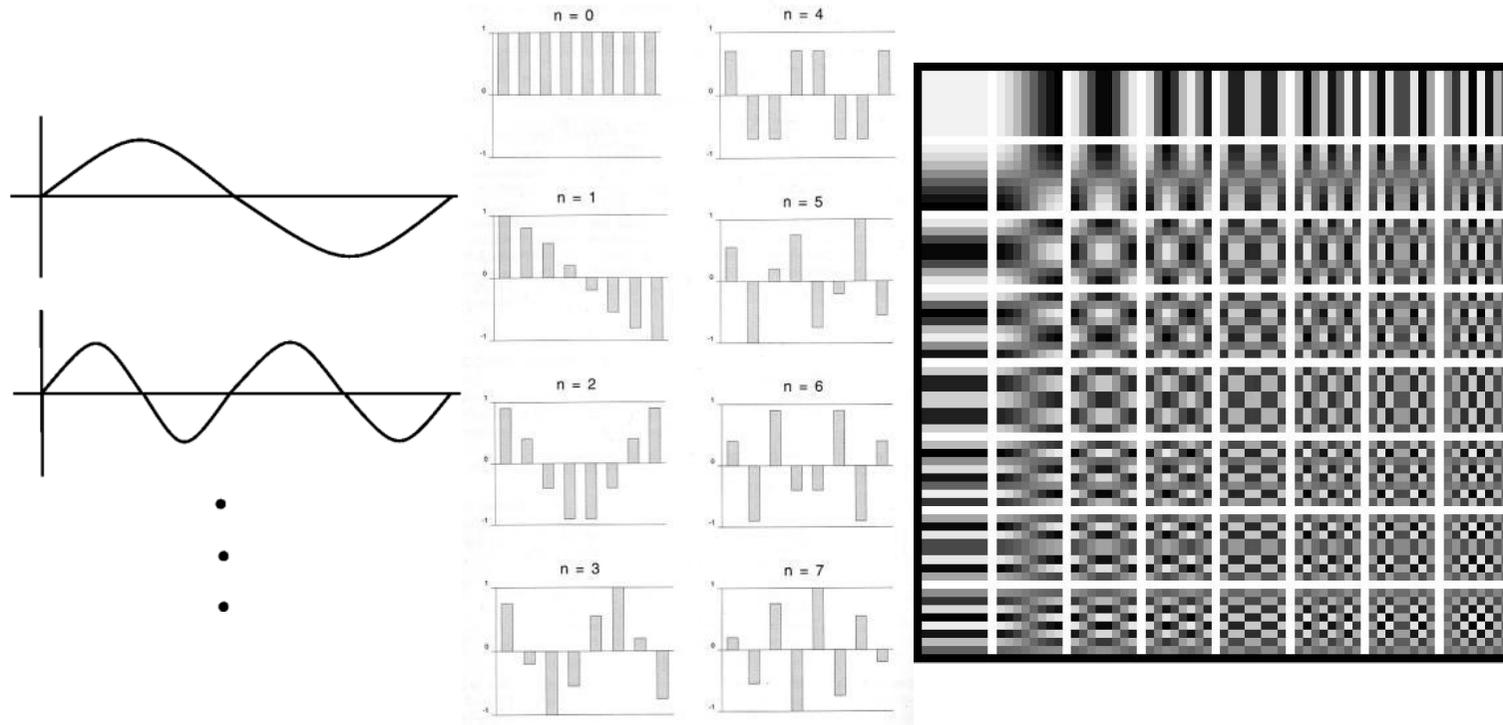
- Taux de compression sans perte souvent insuffisant.
- Pour améliorer le taux de compression, il faut perdre de l'information !
- Exemples (facteur 16 de compression) :
 - changement de résolution,
 - nombre de couleurs utilisées,
 - facteur de qualité (JPEG)
- Comment ça marche JPEG ?

JPEG



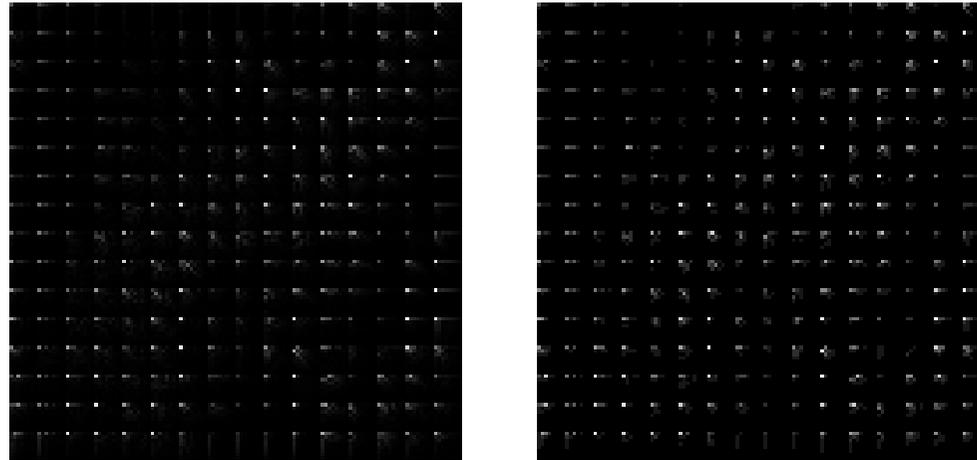
- Algorithme proposé en 1990 par un comité d'expert (Joint Photographic Experts Group).
- Principes :
 - Quantification après un changement de base (DCT).
 - Codage statistique (Huffman).
- Certain succès !

Base de Fourier



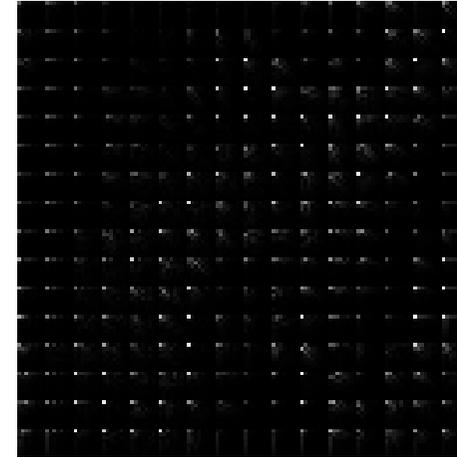
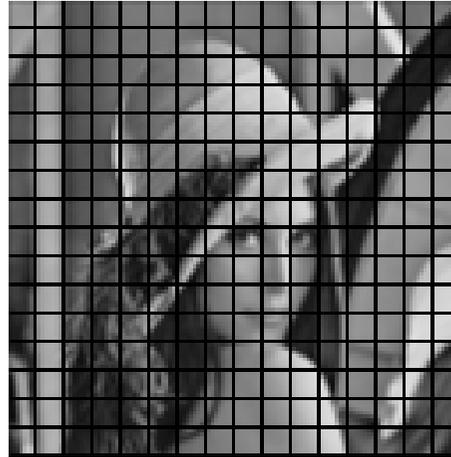
- Joseph Fourier : La propagation de la chaleur dans les solides (1807).
- Décomposition des fonctions sur l'intervalle dans une base de cosinus et de sinus.
- Équivalent discret pour les vecteurs à N éléments.
- DCT 2D.
- Rien qu'un changement de base vers une base plus adaptée. (Algèbre linéaire)

Quantification



- Réduction du nombre de symboles utilisés.
- $Q_{\Delta}(x) = \lfloor x/\Delta + .5 \rfloor \Delta$ (arrondi).
- On code uniquement $\lfloor x/\Delta + .5 \rfloor$ pour Δ connu (facteur de qualité).
- Erreur quadratique par coefficient bornée par $\Delta^2/4$.
- Pour les coefficients très petits, erreurs très petites également !

JPEG



- Image initiale.
- Découpage en carré 8×8 .
- Transformation linéaire (changement de base).
- Beaucoup de petits coefficients.
- Quantification de ces coefficients.
- Compression sans perte par un codage de Huffman de ces coefficients quantifiés.
- Si beaucoup de coefficients sont quantifiés à 0, bon taux de compression...

JPEG 2000

- *Nouveau standard (2000).*
- Différences avec JPEG :
 - Autre base (ondelette),
 - Modélisation plus fine
- Avantage :
 - Performance,
 - Usage (échelonnabilité, progressivité, . . .)

Importance du choix de la base

- Décomposition dans une base orthonormée $\mathbf{B} = \{g_m\}_{m \in \mathbb{N}}$

$$f = \sum_{m \in \mathbb{N}} \langle f, g_m \rangle g_m .$$

- Approximation avec M vecteurs choisis adaptativement

$$f_M = \sum_{m \in I_M} \langle f, g_m \rangle g_m .$$

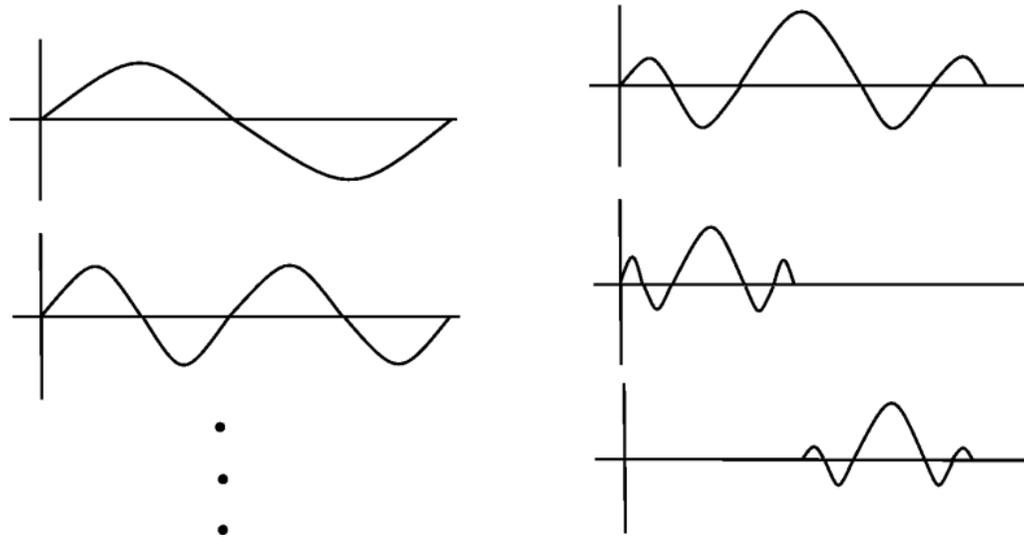
- Pour minimiser $\|f - f_M\|^2 = \sum_{m \notin I_M} |\langle f, g_m \rangle|^2$,

sélection des M plus grands produits scalaires :

$$I_M = \{m, |\langle f, g_m \rangle| > T_M\} : \text{seuillage.}$$

- Ne reste que le choix de la base \mathbf{B} .
- Situation similaire pour la compression.

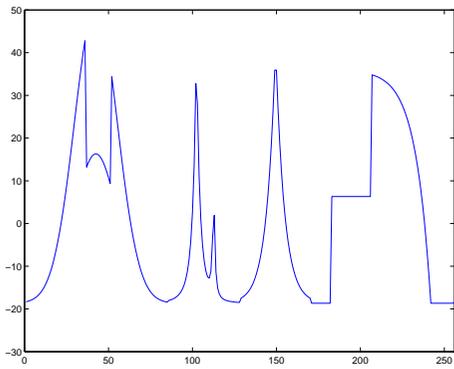
Ondelettes 1D



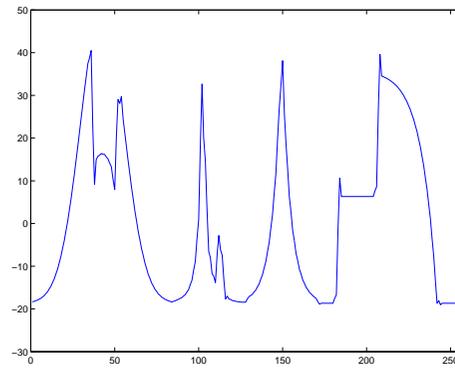
- Fourier : modèle stationnaire.
- Ondelettes : localisation.
- Structure multirésolution : approximations successives et détails.

Multirésolution

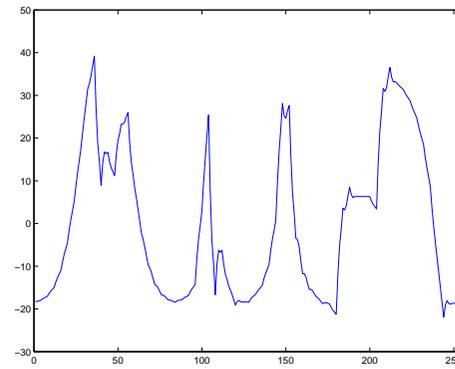
256



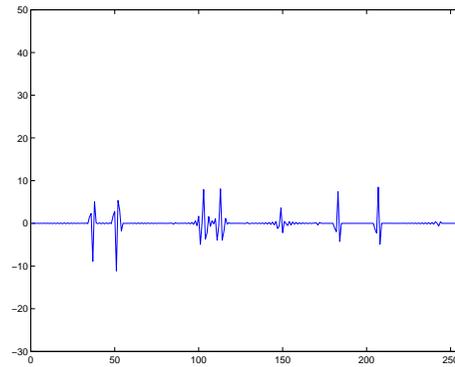
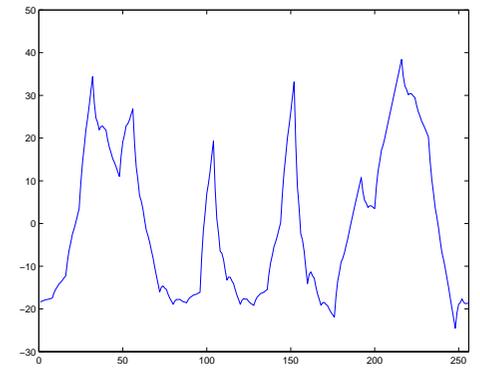
128



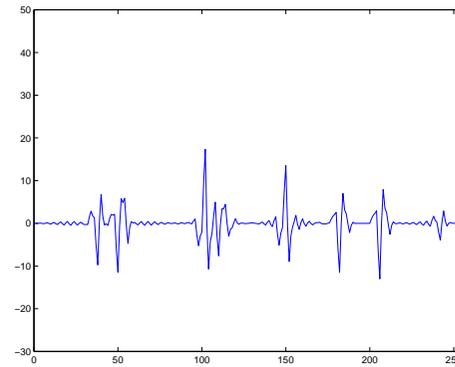
64



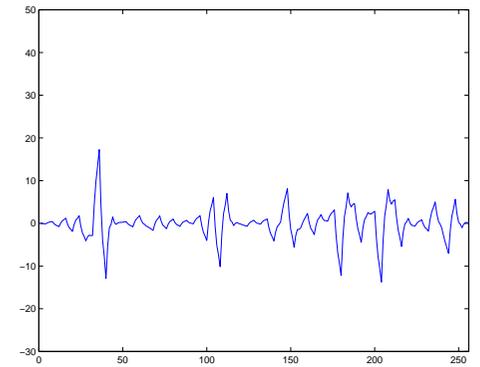
32



128



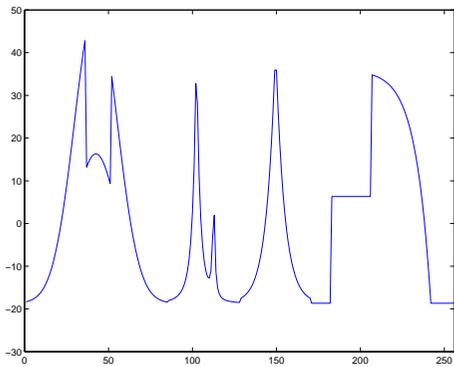
64



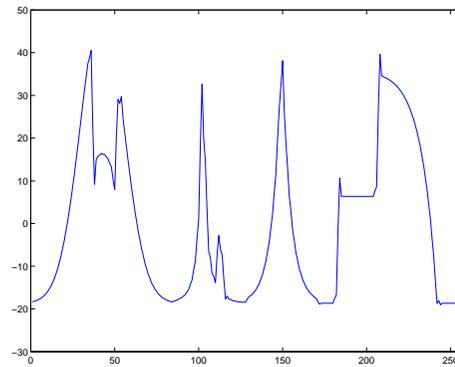
32

Multirésolution

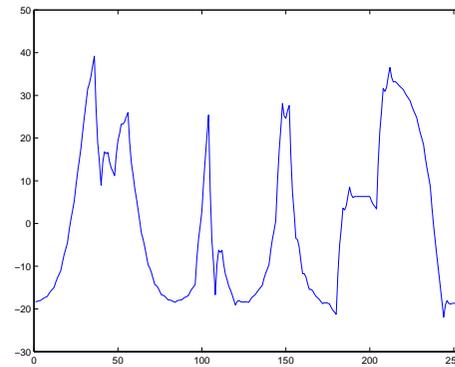
256



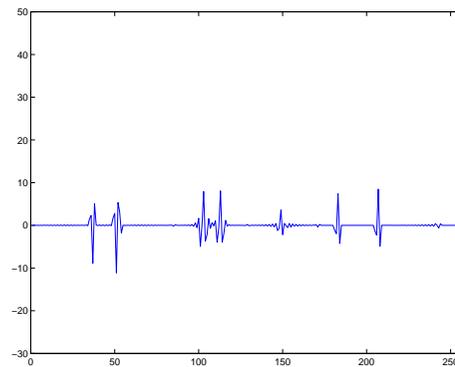
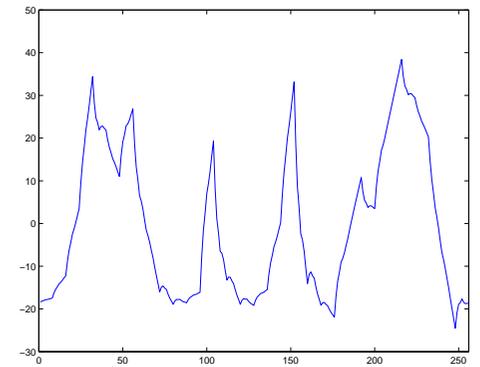
128



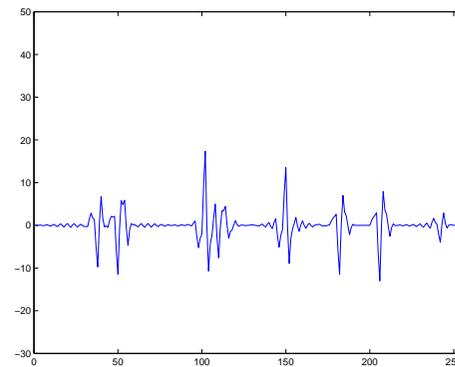
64



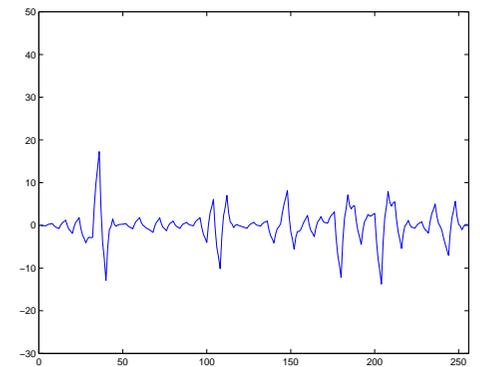
32



128

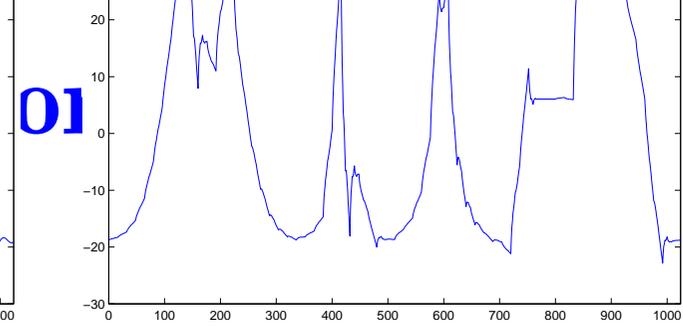
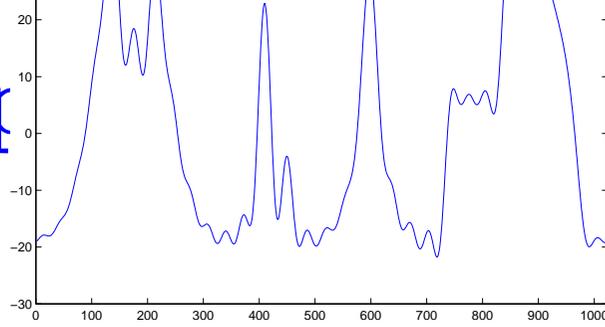


64



32

Linéaire **Ap**

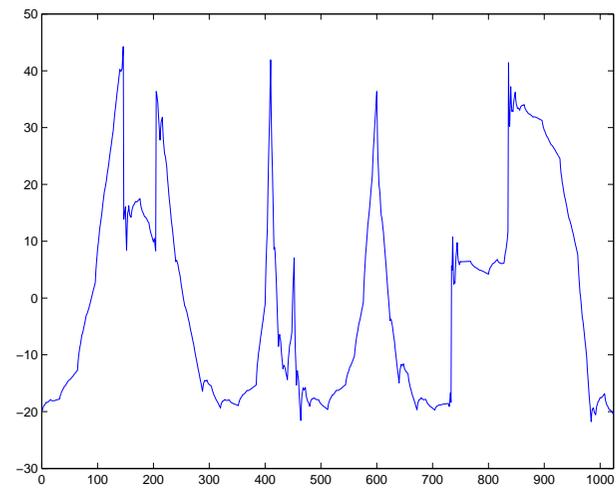
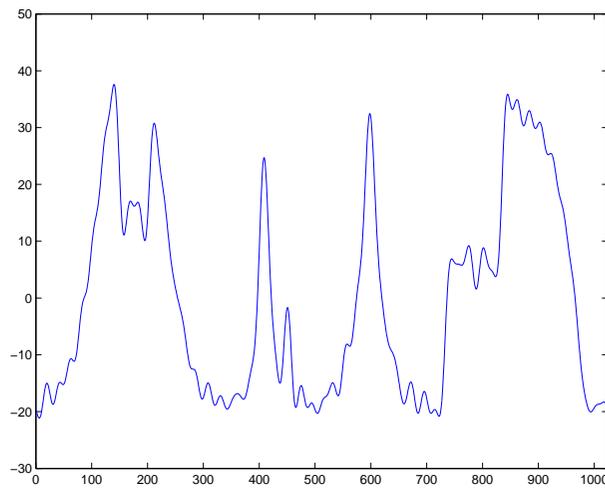


64

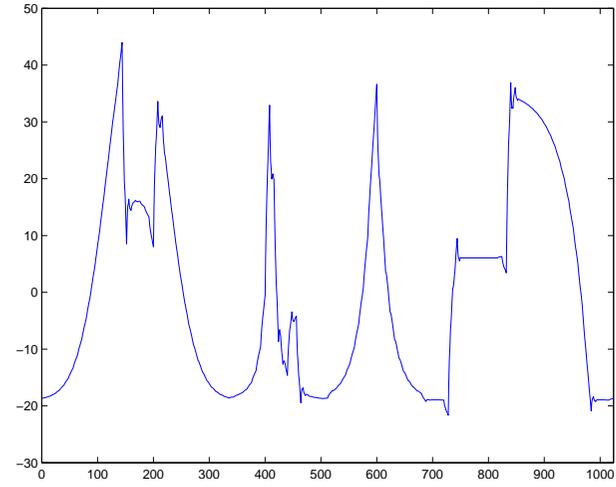
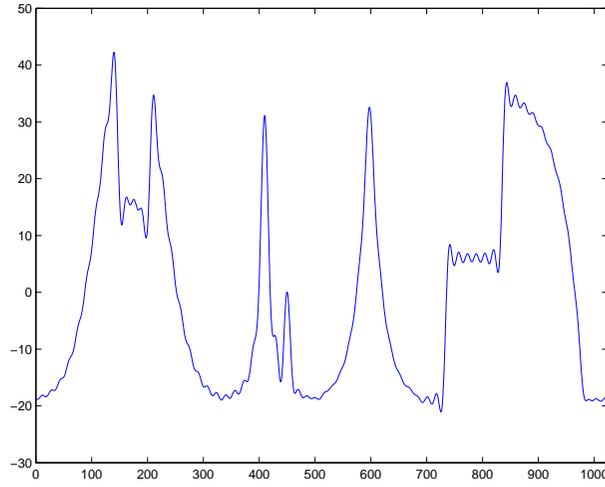
Fourier

Ondelettes

Non Linéaire



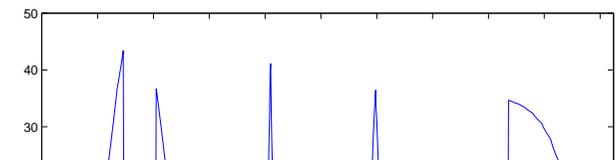
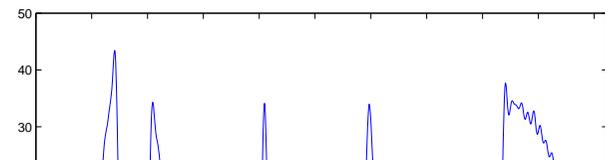
Linéaire



128

Fourier

Ondelettes



Ondelettes 2D



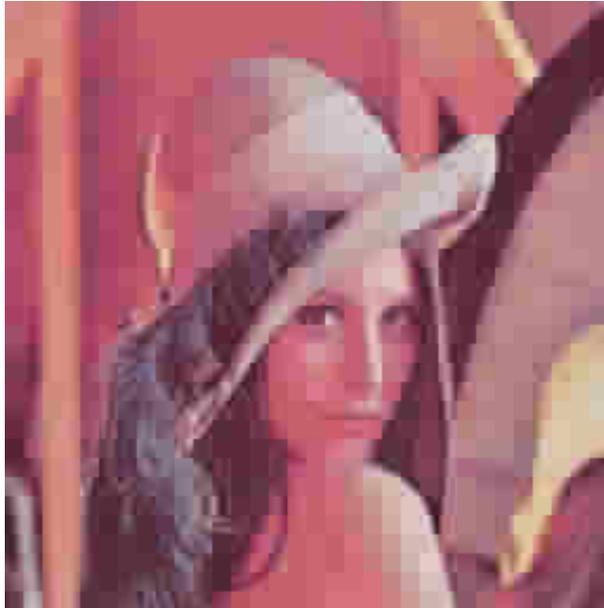
- Construction similaire mais bidimensionnelle.
- Grands coefficients correspondent aux contours.

Compression par transformée

- Décomposition dans une base.
- Quantification des coefficients.
- Codage entropique.
- JPEG, JPEG 2000,...



Originale



JPEG



JPEG 2000

Et après

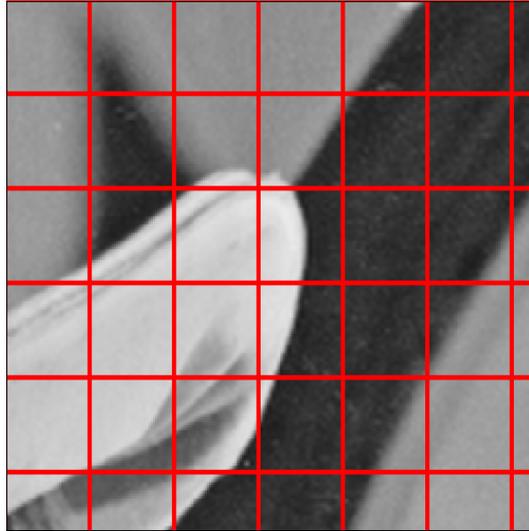
- Problème clos ?
- Codage entropique : OUI mais codage source/canal.
- Modélisation : NON.
- Transformation : NON (théorie de l'approximation).
- Vidéo, Sons...

Géométrie

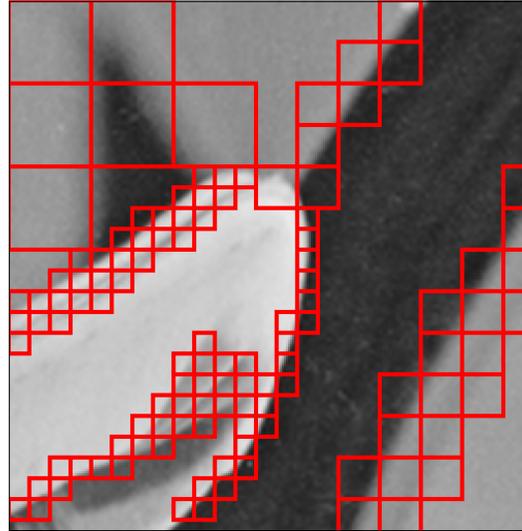


- Caractéristique des images naturelles.
- Inutilisée dans les représentations précédentes.
- Apport théorique prévisible.
- Direction de recherche actuelle : curvelets, edgelets, wedgelets, ondelettes géométriques, *bandelettes*...

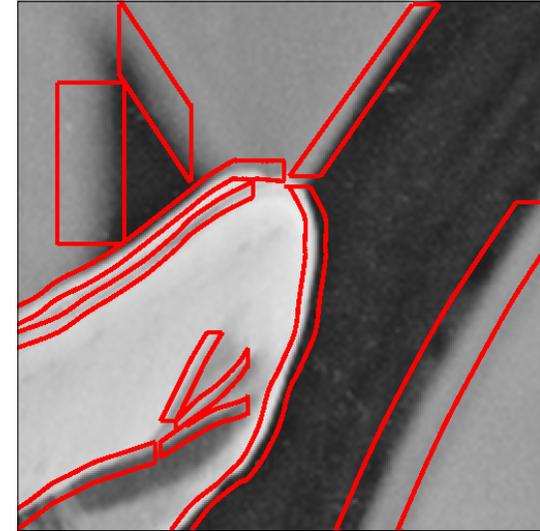
Bandelettes



Fourier
Base



Ondelettes
Multiéchelle



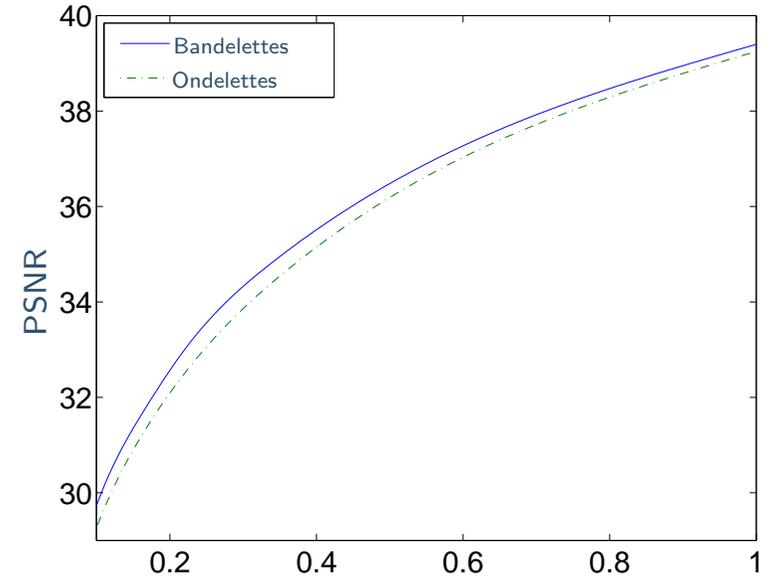
Bandelettes
Géométrie

- Coût : adaptativité, choix de la géométrie.
- Algorithme rapide pour ce choix.
- Travail académique sur l'optimalité de la méthode.
- Implémentation effective sans optimisation fine.

Originale



Distorsion-Débit



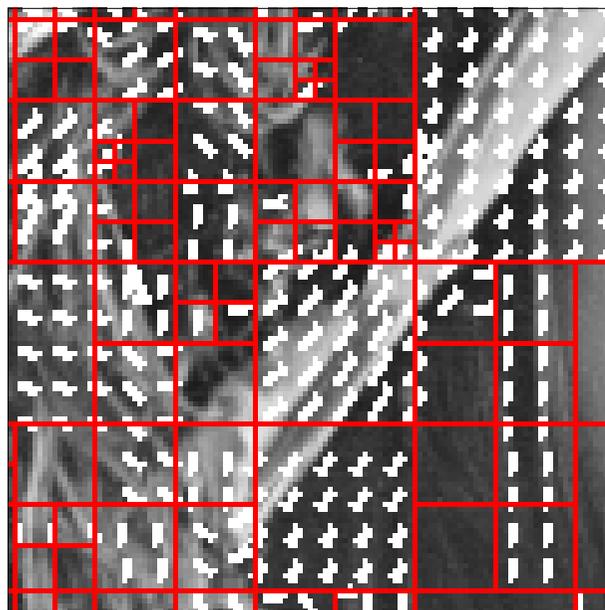
$R/N^2 = 0,22 \text{ bpp}$

Bandelettes (33,05 db)

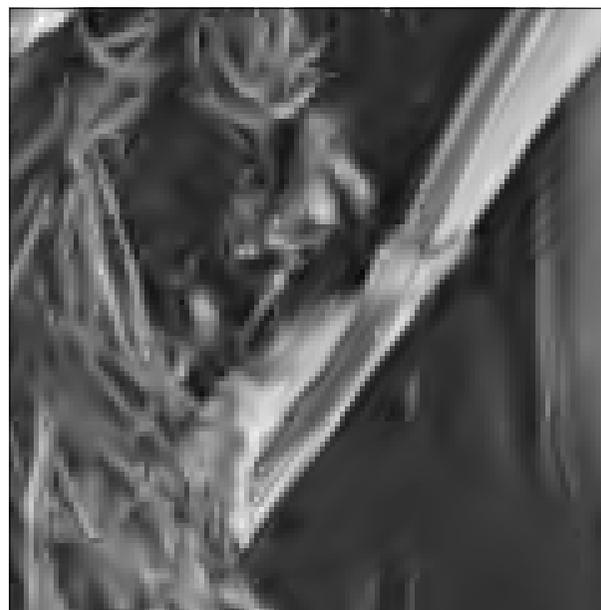
Ondelettes (R/N^2 32,54 db)



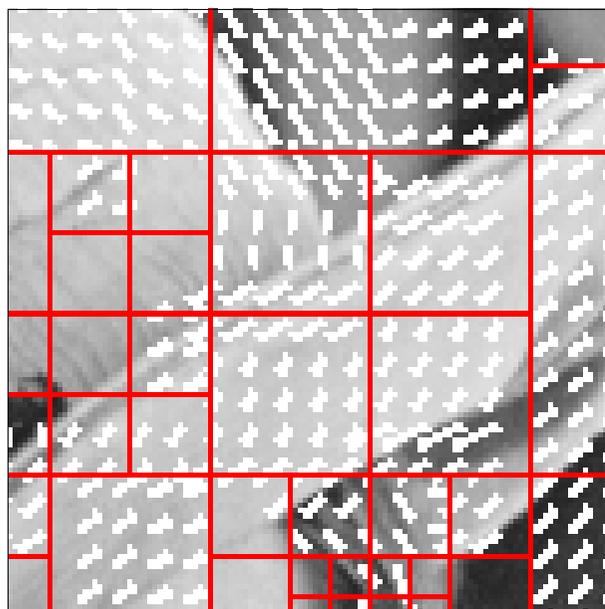
Originale



Bandelettes



Ondelettes



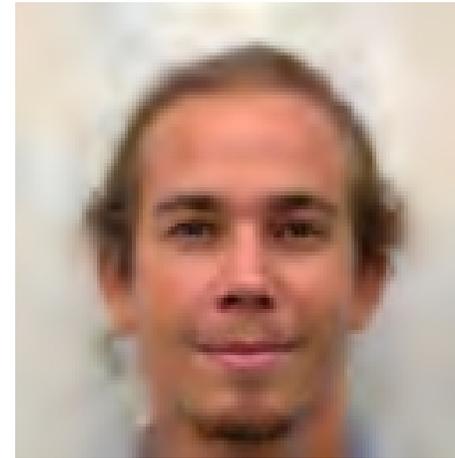
Modèle spécialisé



JPEG



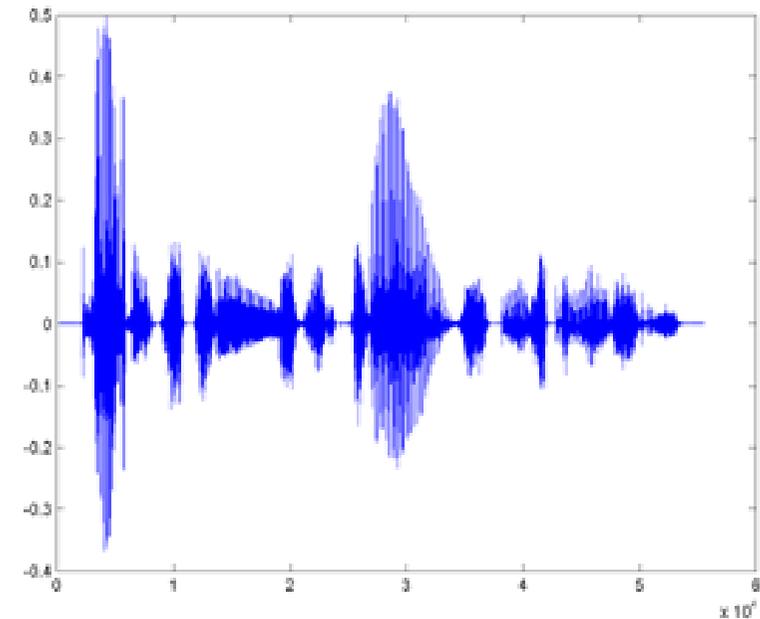
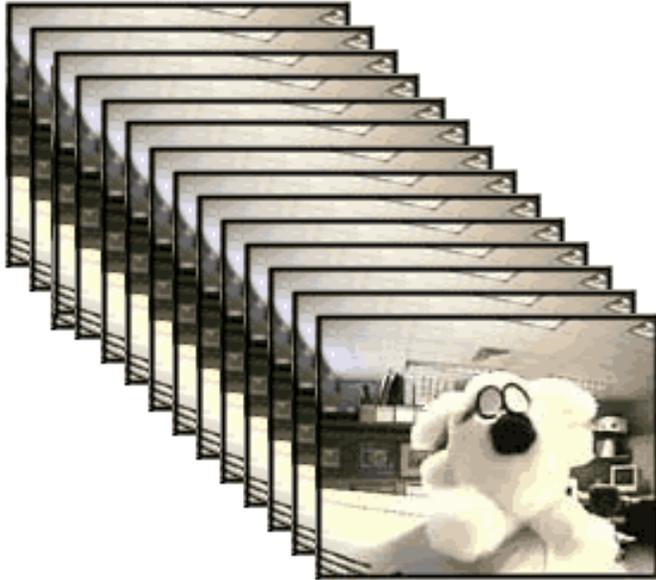
JPEG-2000



LET IT WAVE

- Compression spécialisée pour les visages.
- 500 octets = facteur 400 de compression !
- Comparaison de différents algorithmes.
- Clé : spécialisation.

Vidéos et sons



- Mêmes principes s'appliquent !
- Vidéos : utilisation de la redondance temporelle (MPEG2, MPEG4, ...).
- Sons : utilisation de modèles auditifs (MP3, ...).

Conclusion

- Survol de la compression d'image.
- Fondations mathématiques.
- Importance de la géométrie et des modèles.
- Importance des mathématiques dans l'informatique.
- Plus d'infos :
 - `lepennecc@math.jussieu.fr`
 - `http://www.math.jussieu.fr/~lepennecc`
 - En particulier la présentation et un article de vulgarisation sur la compression.

Masters

- Traitement du signal :
 - Master 2 : Modélisation Aléatoire (Paris 7)
<http://www.master.math.univ-paris7.fr/>
 - Master 2 : Mathématiques, Vision et Apprentissage (ENS Cachan)
<http://www.cmla.ens-cachan.fr/fileadmin/Groupes/Mva/>
- Débouchés :
 - Académiques,
 - Industriels...