

Les Mathématiques de la Compression d'Images

E. LE PENNEC
LPMA (Paris 7)

6 mars 2006

Erwan Le Pennec



Erwan Le Pennec



- Maître de Conférence – Paris 7 – LPMA, équipe de statistique.

Erwan Le Pennec



- Maître de Conférence – Paris 7 – LPMA, équipe de statistique.
- Maths : Licence, Maîtrise (Paris 7), Agreg.

Erwan Le Pennec



- Maître de Conférence – Paris 7 – LPMA, équipe de statistique.
- Maths : Licence, Maîtrise (Paris 7), Agreg.
- Appliquées : DEA (Mathématiques et Intelligence Artificielle) et Doctorat (Bandelettes et représentation géométrique des images).

Erwan Le Pennec



- Maître de Conférence – Paris 7 – LPMA, équipe de statistique.
- Maths : Licence, Maîtrise (Paris 7), Agreg.
- Appliquées : DEA (Mathématiques et Intelligence Artificielle) et Doctorat (Bandelettes et représentation géométrique des images).
- Industrielles : LET IT WAVE (Traitement d'image et en particulier compression d'image de visage).

Erwan Le Pennec



- Maître de Conférence – Paris 7 – LPMA, équipe de statistique.
- Maths : Licence, Maîtrise (Paris 7), Agreg.
- Appliquées : DEA (Mathématiques et Intelligence Artificielle) et Doctorat (Bandelettes et représentation géométrique des images).
- Industrielles : LET IT WAVE (Traitement d'image et en particulier compression d'image de visage).
- Académiques : Équipe de Statistique...

Compression d'image

Compression d'image



Compression d'image



→ 0110101...

Compression d'image



→ 0110101... →



Compression d'image

Compression d'image

- Motivations.

Compression d'image

- Motivations.
- Principes mathématiques :
 - Statistique (entropie, modélisation)
 - Algèbre (base orthonormée)
 - Analyse (construction de base et approximation)

Compression d'image

- Motivations.
- Principes mathématiques :
 - Statistique (entropie, modélisation)
 - Algèbre (base orthonormée)
 - Analyse (construction de base et approximation)
- Frontière Math/Info.

Plan et algorithmes

Plan et algorithmes

- Image numérique.

Plan et algorithmes

- Image numérique.
- GIF (codage entropique).

Plan et algorithmes

- Image numérique.
- GIF (codage entropique).
- PNG (modélisation).

Plan et algorithmes

- Image numérique.
- GIF (codage entropique).
- PNG (modélisation).
- JPEG (base orthonormée et construction de base).

Plan et algorithmes

- Image numérique.
- GIF (codage entropique).
- PNG (modélisation).
- JPEG (base orthonormée et construction de base).
- JPEG 2000 (base et approximation)

Plan et algorithmes

- Image numérique.
- GIF (codage entropique).
- PNG (modélisation).
- JPEG (base orthonormée et construction de base).
- JPEG 2000 (base et approximation)
- et après ?

Image numérique

Image numérique



- Image : fonction L^2 sur un rectangle.

Image numérique



- Image : fonction L^2 sur un rectangle.
- Image numérique : version discrétisée et quantifiée ($256 = 2^8$ valeurs - 8 bits).

Image numérique



- Image : fonction L^2 sur un rectangle.
- Image numérique : version discrétisée et quantifiée ($256 = 2^8$ valeurs - 8 bits).
- Pour la couleur : utilisation de 3 images (RGB - 24 bits).

Image numérique



- Image : fonction L^2 sur un rectangle.
- Image numérique : version discrétisée et quantifiée ($256 = 2^8$ valeurs - 8 bits).
- Pour la couleur : utilisation de 3 images (RGB - 24 bits).
- Occupation mémoire importante :
 $1024 \times 2048 \times 24 = 6 \times 2^{13}$ bits = 6 Mo

Image numérique



- Image : fonction L^2 sur un rectangle.
- Image numérique : version discrétisée et quantifiée ($256 = 2^8$ valeurs - 8 bits).
- Pour la couleur : utilisation de 3 images (RGB - 24 bits).
- Occupation mémoire importante :
 $1024 \times 2048 \times 24 = 6 \times 2^{13}$ bits = 6 Mo
- Besoin de compression.

Compression d'image

Compression d'image



- Image numérique (NB) : capteur d'appareil photo,...

Compression d'image



- Image numérique (NB) : capteur d'appareil photo,...
- Version modifiée (perte d'information) : changement de résolution ou autre...

Compression d'image



→ 0110101...
←

- Image numérique (NB) : capteur d'appareil photo,...
- Version modifiée (perte d'information) : changement de résolution ou autre...
- Compression sans perte (le retour vers la version originale est possible)

Compression d'image



→ 0110101...
←

- Image numérique (NB) : capteur d'appareil photo,...
- Version modifiée (perte d'information) : changement de résolution ou autre...
- Compression sans perte (le retour vers la version originale est possible)
- Compression avec perte (retour impossible).

Compression sans perte

Compression sans perte



→ 0110101...
←

Compression sans perte



→ 0110101...
←

- Pas de perte d'information.

Compression sans perte



→ 0110101...
←

- Pas de perte d'information.
- Utiliser des redondances, des informations a priori pour coder plus efficacement l'image.

Compression sans perte



→ 0110101...
←

- Pas de perte d'information.
- Utiliser des redondances, des informations a priori pour coder plus efficacement l'image.
- Exemples : langage, abréviations, symboles,...

GIF

- Algorithme de compression sans perte introduit par CompuServe en 1987.

GIF

- Algorithme de compression sans perte introduit par CompuServe en 1987.
- Image 8 bits : palette ou niveau de gris.

GIF

12	56	78	89	78	89	56	12
123	6	7	189	78	89	56	12
12	56	78	89	78	89	56	12
123	6	7	189	78	99	56	12
12	56	23	89	78	23	32	12
2	56	90	89	78	89	56	12
33	66	78	89	96	89	56	12
12	56	78	89	78	89	56	12

- Algorithme de compression sans perte introduit par CompuServe en 1987.
- Image 8 bits : palette ou niveau de gris.
- Liste des valeurs des pixels (ligne par ligne).

GIF

12	56	78	89	78	89	56	12
123	6	7	189	78	89	56	12
12	56	78	89	78	89	56	12
123	6	7	189	78	99	56	12
12	56	23	89	78	23	32	12
2	56	90	89	78	89	56	12
33	66	78	89	96	89	56	12
12	56	78	89	78	89	56	12

↓ liste

12	56	78	89	78	89	56	12	123	6	7	189	78	89	56	12	12	56	78	89	78	89	56	12	123	6	7	189	78	99	56	12
----	----	----	----	----	----	----	----	-----	---	---	-----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	-----	---	---	-----	----	----	----	----

12	56	23	89	78	23	32	12	2	56	90	89	78	89	56	12	33	66	78	89	96	89	56	12	12	56	78	89	78	89	56	12
----	----	----	----	----	----	----	----	---	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----

- Algorithme de compression sans perte introduit par CompuServe en 1987.
- Image 8 bits : palette ou niveau de gris.
- Liste des valeurs des pixels (ligne par ligne).
- Répétition dans la liste (redondance).

GIF

12	56	78	89	78	89	56	12
123	6	7	189	78	89	56	12
12	56	78	89	78	89	56	12
123	6	7	189	78	99	56	12
12	56	23	89	78	23	32	12
2	56	90	89	78	89	56	12
33	66	78	89	96	89	56	12
12	56	78	89	78	89	56	12

↓ liste

12	56	78	89	78	89	56	12	123	6	7	189	78	89	56	12	12	56	78	89	78	89	56	12	123	6	7	189	78	99	56	12
----	----	----	----	----	----	----	----	-----	---	---	-----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	-----	---	---	-----	----	----	----	----

12	56	23	89	78	23	32	12	2	56	90	89	78	89	56	12	33	66	78	89	96	89	56	12	12	56	78	89	78	89	56	12
----	----	----	----	----	----	----	----	---	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----

- Algorithme de compression sans perte introduit par CompuServe en 1987.
- Image 8 bits : palette ou niveau de gris.
- Liste des valeurs des pixels (ligne par ligne).
- Répétition dans la liste (redondance).
- Comment exploiter cette structure ? : codage entropique.

Entropie

Entropie

- Bon concept : entropie statistique (Shannon).

Entropie

- Bon concept : entropie statistique (Shannon).
- Symboles indicés par $i \in I$ de probabilité p_i , entropie H

$$H = - \sum_{i \in I} p_i \log_2 p_i$$

Entropie

- Bon concept : entropie statistique (Shannon).
- Symboles indicés par $i \in I$ de probabilité p_i , entropie H

$$H = - \sum_{i \in I} p_i \log_2 p_i$$

- Théorème : Si le symbole i est codé par un mot de c_i bits alors

$$\sum_{i \in I} p_i c_i \geq - \sum_{i \in I} p_i \log_2 p_i = H$$

Entropie

- Bon concept : entropie statistique (Shannon).
- Symboles indicés par $i \in I$ de probabilité p_i , entropie H

$$H = - \sum_{i \in I} p_i \log_2 p_i$$

- Théorème : Si le symbole i est codé par un mot de c_i bits alors

$$\sum_{i \in I} p_i c_i \geq - \sum_{i \in I} p_i \log_2 p_i = H$$

- Borne inférieure reliant la taille du mot à sa probabilité.

Entropie

- Bon concept : entropie statistique (Shannon).
- Symboles indicés par $i \in I$ de probabilité p_i , entropie H

$$H = - \sum_{i \in I} p_i \log_2 p_i$$

- Théorème : Si le symbole i est codé par un mot de c_i bits alors

$$\sum_{i \in I} p_i c_i \geq - \sum_{i \in I} p_i \log_2 p_i = H$$

- Borne inférieure reliant la taille du mot à sa probabilité.
- Comment obtenir un tel codage ?

Codage entropique

Codage entropique

- Pour des p_i (distribution de probabilité) connus, problème résolu.

Codage entropique

- Pour des p_i (distribution de probabilité) connus, problème résolu.
- Algorithme pour obtenir un codage quasi optimal (mot de longueur $\simeq -\log_2 p_i$) :
 - Huffman (arbre)
 - Codage arithmétique (plus efficace mais plus complexe)

Codage entropique

- Pour des p_i (distribution de probabilité) connus, problème résolu.
- Algorithme pour obtenir un codage quasi optimal (mot de longueur $\simeq -\log_2 p_i$) :
 - Huffman (arbre)
 - Codage arithmétique (plus efficace mais plus complexe)
- Problème les p_i sont inconnus le plus souvent. . .

LZW

LZW

- Méthode pour obtenir un codage asymptotiquement optimal sans connaître les p_i .

LZW

- Méthode pour obtenir un codage asymptotiquement optimal sans connaître les p_i .
- Approche de type dictionnaire :
 - créer un dictionnaire à partir de la liste de symbole à coder,
 - coder des groupes de symbole par leur position dans ce dictionnaire

LZW

- Méthode pour obtenir un codage asymptotiquement optimal sans connaître les p_i .
- Approche de type dictionnaire :
 - créer un dictionnaire à partir de la liste de symboles à coder,
 - coder des groupes de symboles par leur position dans ce dictionnaire
- Variations dans la création du dictionnaire.

LZW

- Méthode pour obtenir un codage asymptotiquement optimal sans connaître les p_i .
- Approche de type dictionnaire :
 - créer un dictionnaire à partir de la liste de symboles à coder,
 - coder des groupes de symboles par leur position dans ce dictionnaire
- Variations dans la création du dictionnaire.
- 1977- : LZW, LZ..., ZIP, ARJ, ...

LZW

- Méthode pour obtenir un codage asymptotiquement optimal sans connaître les p_i .
- Approche de type dictionnaire :
 - créer un dictionnaire à partir de la liste de symboles à coder,
 - coder des groupes de symboles par leur position dans ce dictionnaire
- Variations dans la création du dictionnaire.
- 1977- : LZW, LZ..., ZIP, ARJ, ...
- Méthode utilisée dans le format GIF.

PNG

PNG

- Algorithme LZW breveté : besoin d'une solution de remplacement (95).

PNG

12	13	15	17	20	18	17	16	10	11	14	27	21	17	16	16	12	12	17	19	18	19	16	19	13	13	15	19	18	19	36	62
----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----

12	14	19	20	20	23	32	63	14	18	20	22	24	37	56	62	17	20	22	23	25	63	66	64	20	24	25	27	28	60	66	67
----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----

- Algorithme LZW breveté : besoin d'une solution de remplacement (95).
- Liste des pixels = liste de valeur d'intensité lumineuse.

PNG

12	13	15	17	20	18	17	16	10	11	14	27	21	17	16	16	12	12	17	19	18	19	16	19	13	13	15	19	18	19	36	62
----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----

12	14	19	20	20	23	32	63	14	18	20	22	24	37	56	62	17	20	22	23	25	63	66	64	20	24	25	27	28	60	66	67
----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----

↓ prédiction + différence

- Algorithme LZW breveté : besoin d'une solution de remplacement (95).
- Liste des pixels = liste de valeur d'intensité lumineuse.
- Prédiction possible d'une valeur en fonction de celles déjà vues et codage de l'erreur de prédiction.

PNG

12	13	15	17	20	18	17	16	10	11	14	27	21	17	16	16	12	12	17	19	18	19	16	19	13	13	15	19	18	19	36	62	
12	14	19	20	20	23	32	63	14	18	20	22	24	37	56	62	17	20	22	23	25	63	66	64	20	24	25	27	28	60	66	67	
↓ prédiction + différence																																
12	-1	4	2	3	-2	-1	-1	-6	1	3	13	-6	-4	-1	0	-4	0	5	2	-1	1	-3	3	-6	0	2	4	-1	1	17	26	
-50	2	5	1	0	3	9	31	-39	4	2	2	2	13	19	6	-45	3	2	1	2	48	3	-2	-44	4	1	2	1	32	6	1	

- Algorithme LZW breveté : besoin d'une solution de remplacement (95).
- Liste des pixels = liste de valeur d'intensité lumineuse.
- Prédiction possible d'une valeur en fonction de celles déjà vues et codage de l'erreur de prédiction.
- Modèle simple : valeur précédente, moyenne locale,...

PNG

12	13	15	17	20	18	17	16	10	11	14	27	21	17	16	16	12	12	17	19	18	19	16	19	13	13	15	19	18	19	36	62	
12	14	19	20	20	23	32	63	14	18	20	22	24	37	56	62	17	20	22	23	25	63	66	64	20	24	25	27	28	60	66	67	
↓prédiction + différence																																
12	-1	4	2	3	-2	-1	-1	-6	1	3	13	-6	-4	-1	0	-4	0	5	2	-1	1	-3	3	-6	0	2	4	-1	1	17	26	
-50	2	5	1	0	3	9	31	-39	4	2	2	2	13	19	6	-45	3	2	1	2	48	3	-2	-44	4	1	2	1	32	6	1	

- Algorithme LZW breveté : besoin d'une solution de remplacement (95).
- Liste des pixels = liste de valeur d'intensité lumineuse.
- Prédiction possible d'une valeur en fonction de celles déjà vues et codage de l'erreur de prédiction.
- Modèle simple : valeur précédente, moyenne locale,...
- Meilleure modélisation statistique d'une image.

PNG

12	13	15	17	20	18	17	16	10	11	14	27	21	17	16	16	12	12	17	19	18	19	16	19	13	13	15	19	18	19	36	62	
12	14	19	20	20	23	32	63	14	18	20	22	24	37	56	62	17	20	22	23	25	63	66	64	20	24	25	27	28	60	66	67	
↓ prédiction + différence																																
12	-1	4	2	3	-2	-1	-1	-6	1	3	13	-6	-4	-1	0	-4	0	5	2	-1	1	-3	3	-6	0	2	4	-1	1	17	26	
-50	2	5	1	0	3	9	31	-39	4	2	2	2	13	19	6	-45	3	2	1	2	48	3	-2	-44	4	1	2	1	32	6	1	

- Algorithme LZW breveté : besoin d'une solution de remplacement (95).
- Liste des pixels = liste de valeur d'intensité lumineuse.
- Prédiction possible d'une valeur en fonction de celles déjà vues et codage de l'erreur de prédiction.
- Modèle simple : valeur précédente, moyenne locale,...
- Meilleure modélisation statistique d'une image.
- Amélioration pour les algorithmes de type dictionnaire (asymptote plus vite atteinte).

Modélisation statistique

Modélisation statistique

- Importance du modèle statistique : le facteur de compression dépend de la probabilité dans le modèle.

Modélisation statistique

- Importance du modèle statistique : le facteur de compression dépend de la probabilité dans le modèle.
- Importance de construire des modèles adaptés.

Modélisation statistique

- Importance du modèle statistique : le facteur de compression dépend de la probabilité dans le modèle.
- Importance de construire des modèles adaptés.
- Modèle de distributions simples (iid avec une distribution connue) :
*OCRO HLO RGWR NMIELWIS EU LL NBNESEBYA TH EEI
ALHENHTTPA OOBTTVA NAH BRL*

Modélisation statistique

- Importance du modèle statistique : le facteur de compression dépend de la probabilité dans le modèle.
- Importance de construire des modèles adaptés.
- Modèle de distributions simples (iid avec une distribution connue) :
*OCRO HLO RGWR NMIELWIS EU LL NBNESEBYA TH EEI
ALHENHTTPA OOBTTVA NAH BRL*
- Modèle de dépendance en fonction du passé :
*IN NO IST LAT WHEY CRATICT FROURE BIRS GROCID
PONDENOME OF DEMONSTURES OF THE REPTAGIN IS
REGOACTIONA OF CRE*

Modélisation statistique

- Importance du modèle statistique : le facteur de compression dépend de la probabilité dans le modèle.
- Importance de construire des modèles adaptés.
- Modèle de distributions simples (iid avec une distribution connue) :
*OCRO HLO RGWR NMIELWIS EU LL NBNESEBYA TH EEI
ALHENHTTPA OOBTTVA NAH BRL*
- Modèle de dépendance en fonction du passé :
*IN NO IST LAT WHEY CRATICT FROURE BIRS GROCID
PONDENOME OF DEMONSTURES OF THE REPTAGIN IS
REGOACTIONA OF CRE*
- Modèle de distribution plus complexes :
*THE HEAD AND IN FRONTAL ATTACK ON AN ENGLISH WRITER
THAT THE CHARACTER OF THIS POINT IS THEREFORE
ANOTHER METHOD FOR THE LETTERS THAT THE TIME OF
WHO EVER TOLD THE PROBLEM FOR AN UNEXPECTED*

Modélisation statistique

- Importance du modèle statistique : le facteur de compression dépend de la probabilité dans le modèle.
- Importance de construire des modèles adaptés.
- Modèle de distributions simples (iid avec une distribution connue) :
*OCRO HLO RGWR NMIELWIS EU LL NBNESEBYA TH EEI
ALHENHTTPA OOBTTVA NAH BRL*
- Modèle de dépendance en fonction du passé :
*IN NO IST LAT WHEY CRATICT FROURE BIRS GROCID
PONDENOME OF DEMONSTURES OF THE REPTAGIN IS
REGOACTIONA OF CRE*
- Modèle de distribution plus complexes :
*THE HEAD AND IN FRONTAL ATTACK ON AN ENGLISH WRITER
THAT THE CHARACTER OF THIS POINT IS THEREFORE
ANOTHER METHOD FOR THE LETTERS THAT THE TIME OF
WHO EVER TOLD THE PROBLEM FOR AN UNEXPECTED*
- Pour les images \simeq facteur 4 de compression avec les meilleurs modèles (Markovien avec apprentissage. . .).

Compression avec perte

Compression avec perte



→ 0110101...01...
←

- Taux de compression sans perte souvent insuffisant.

Compression avec perte



⇔ 0110101...

- Taux de compression sans perte souvent insuffisant.
- Pour améliorer le taux de compression, il faut perdre de l'information !

Compression avec perte



⇔ 0110101...

- Taux de compression sans perte souvent insuffisant.
- Pour améliorer le taux de compression, il faut perdre de l'information !
- Exemples (facteur 16 de compression) :
 - changement de résolution,

Compression avec perte



⇔ 0110101...

- Taux de compression sans perte souvent insuffisant.
- Pour améliorer le taux de compression, il faut perdre de l'information !
- Exemples (facteur 16 de compression) :
 - changement de résolution,
 - nombre de couleurs utilisées,

Compression avec perte



⇔ 0110101...

- Taux de compression sans perte souvent insuffisant.
- Pour améliorer le taux de compression, il faut perdre de l'information !
- Exemples (facteur 16 de compression) :
 - changement de résolution,
 - nombre de couleurs utilisées,
 - facteur de qualité (JPEG)

Compression avec perte



⇔ 0110101...

- Taux de compression sans perte souvent insuffisant.
- Pour améliorer le taux de compression, il faut perdre de l'information !
- Exemples (facteur 16 de compression) :
 - changement de résolution,
 - nombre de couleurs utilisées,
 - facteur de qualité (JPEG)
- Comment ça marche JPEG ?

JPEG

JPEG



- Algorithme proposé en 1990 par un comité d'expert (Joint Photographic Experts Group).

JPEG



- Algorithme proposé en 1990 par un comité d'expert (Joint Photographic Experts Group).
- Principes :
 - Quantification après un changement de base (DCT).
 - Codage statistique (Huffman).

JPEG



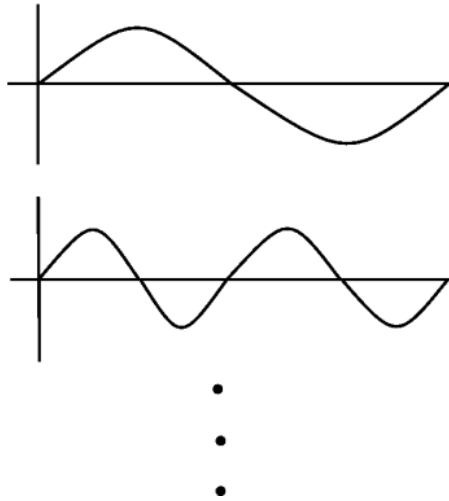
- Algorithme proposé en 1990 par un comité d'expert (Joint Photographic Experts Group).
- Principes :
 - Quantification après un changement de base (DCT).
 - Codage statistique (Huffman).
- Certain succès !

Base de Fourier

Base de Fourier

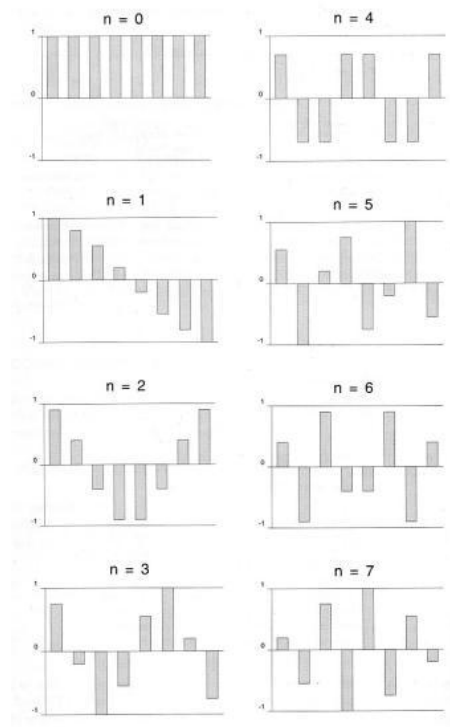
- Joseph Fourier : La propagation de la chaleur dans les solides (1807).

Base de Fourier



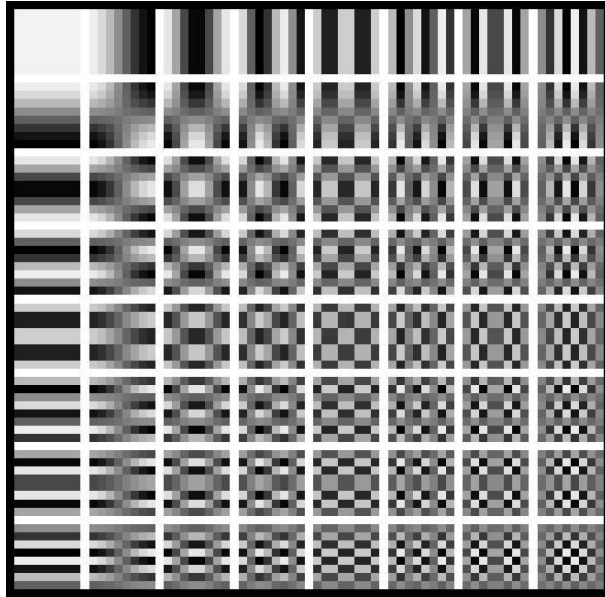
- Joseph Fourier : La propagation de la chaleur dans les solides (1807).
- Décomposition des fonctions sur l'intervalle dans une base de cosinus et de sinus.

Base de Fourier



- Joseph Fourier : La propagation de la chaleur dans les solides (1807).
- Décomposition des fonctions sur l'intervalle dans une base de cosinus et de sinus.
- Équivalent discret pour les vecteurs à N éléments.
- DCT 2D.
- Rien qu'un changement de base vers une base plus adaptée. (Algèbre linéaire)

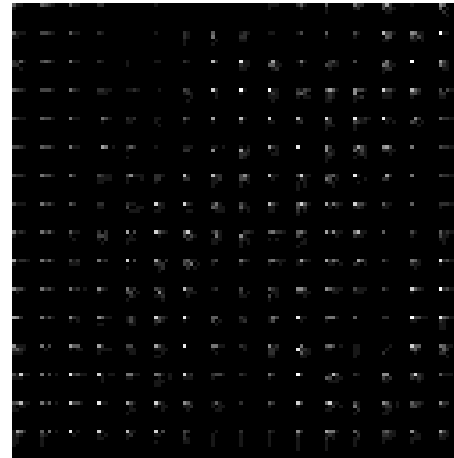
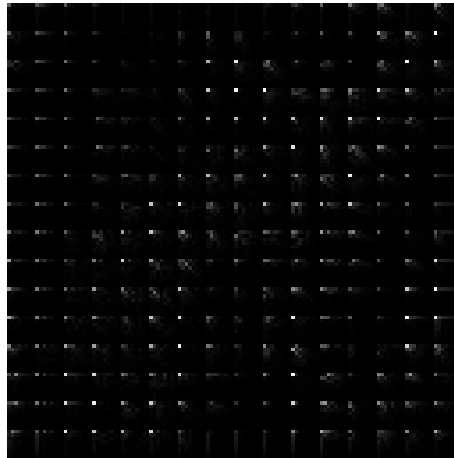
Base de Fourier



- Joseph Fourier : La propagation de la chaleur dans les solides (1807).
- Décomposition des fonctions sur l'intervalle dans une base de cosinus et de sinus.
- Équivalent discret pour les vecteurs à N éléments.
- DCT 2D.
- Rien qu'un changement de base vers une base plus adaptée. (Algèbre linéaire)

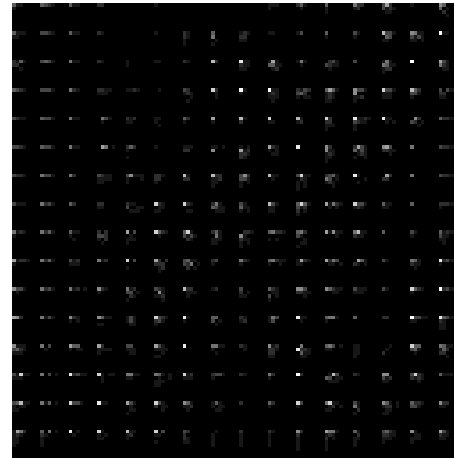
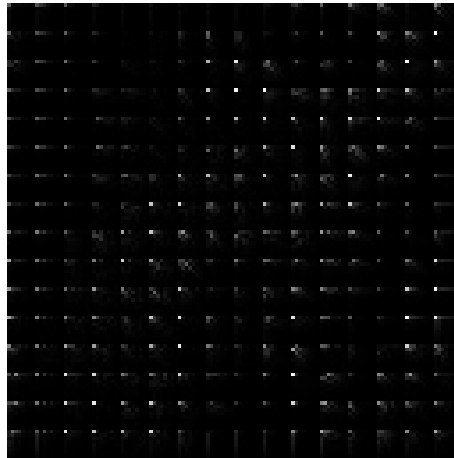
Quantification

Quantification



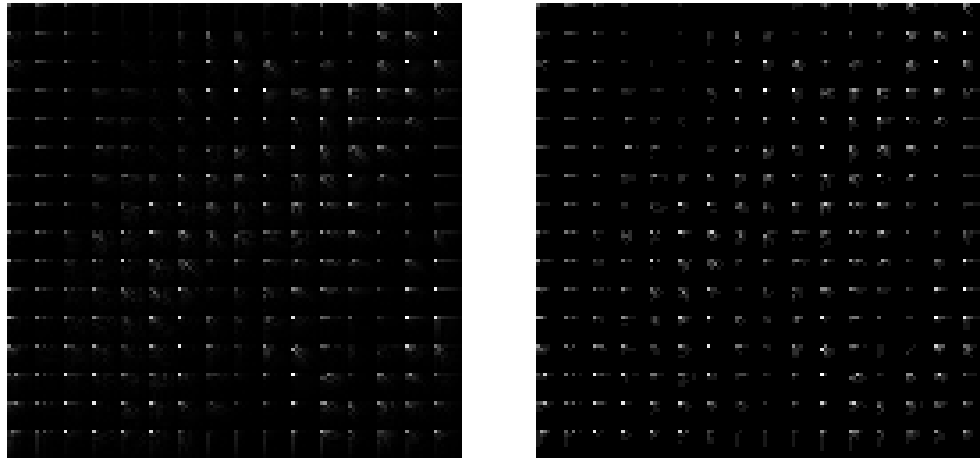
- Réduction du nombre de symboles utilisés.

Quantification



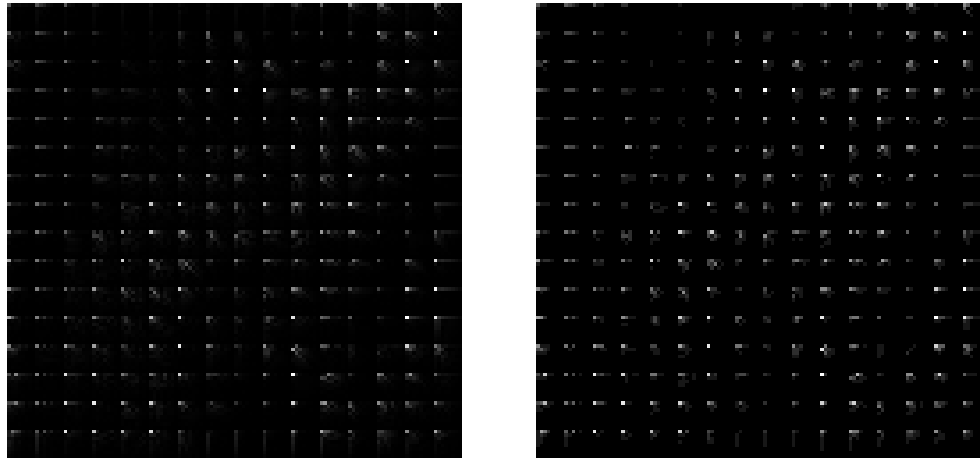
- Réduction du nombre de symboles utilisés.
- $Q_{\Delta}(x) = \lfloor x/\Delta + .5 \rfloor \Delta$ (arrondi).

Quantification



- Réduction du nombre de symboles utilisés.
- $Q_{\Delta}(x) = \lfloor x/\Delta + .5 \rfloor \Delta$ (arrondi).
- On code uniquement $\lfloor x/\Delta + .5 \rfloor$ pour Δ connu (facteur de qualité).

Quantification



- Réduction du nombre de symboles utilisés.
- $Q_{\Delta}(x) = \lfloor x/\Delta + .5 \rfloor \Delta$ (arrondi).
- On code uniquement $\lfloor x/\Delta + .5 \rfloor$ pour Δ connu (facteur de qualité).
- Introduction d'une erreur (petite si le coefficient est déjà quasi petit et contrôlée sinon).

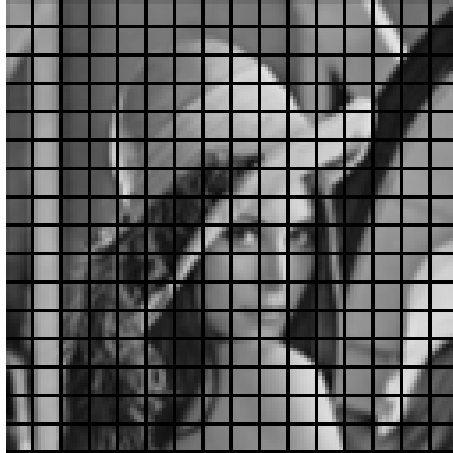
JPEG

JPEG



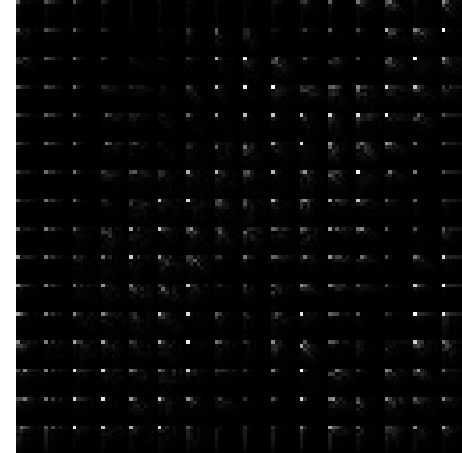
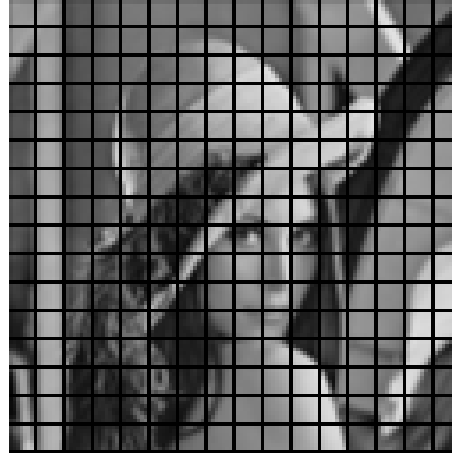
● Image initiale.

JPEG



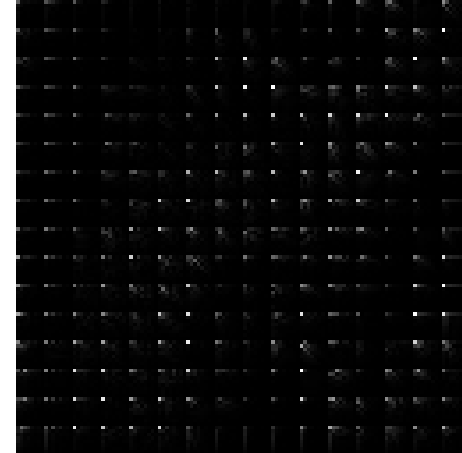
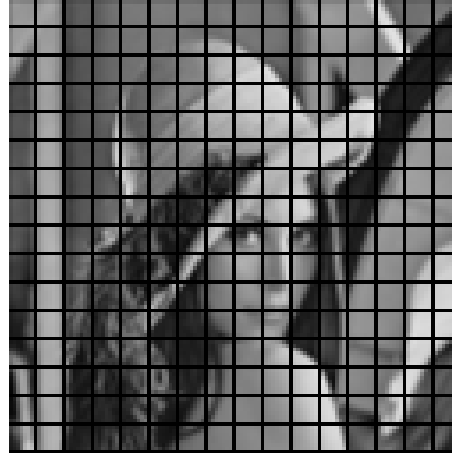
- Image initiale.
- Découpage en carré 8×8 .

JPEG



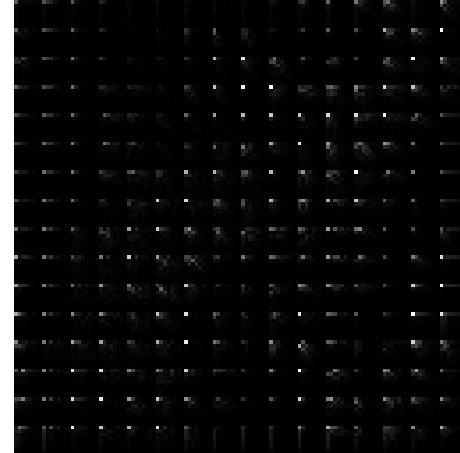
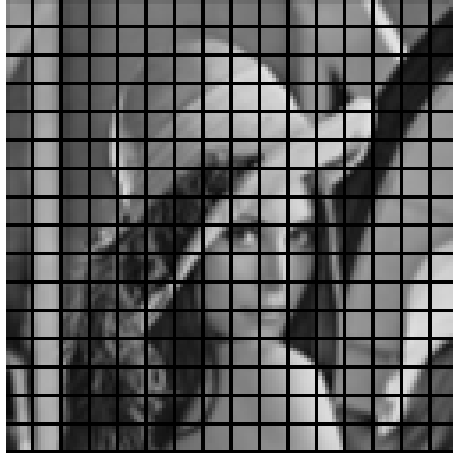
- Image initiale.
- Découpage en carré 8×8 .
- Transformation linéaire (changement de base).

JPEG



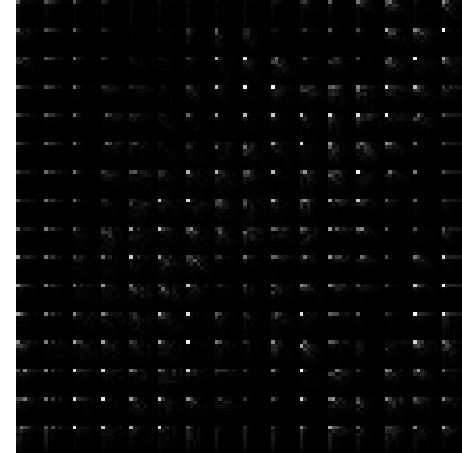
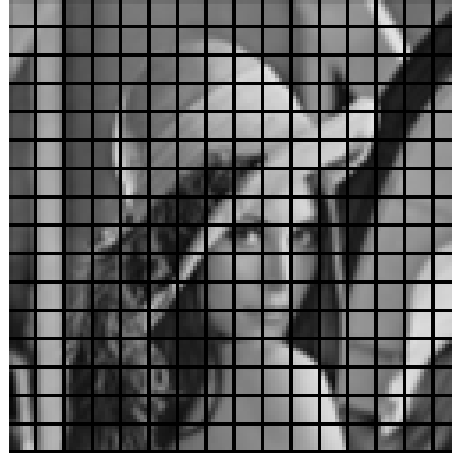
- Image initiale.
- Découpage en carré 8×8 .
- Transformation linéaire (changement de base).
- Beaucoup de petits coefficients.

JPEG



- Image initiale.
- Découpage en carré 8×8 .
- Transformation linéaire (changement de base).
- Beaucoup de petits coefficients.
- Quantification de ces coefficients.

JPEG



- Image initiale.
- Découpage en carré 8×8 .
- Transformation linéaire (changement de base).
- Beaucoup de petits coefficients.
- Quantification de ces coefficients.
- Compression sans perte par un codage de Huffman de ces coefficients quantifiés.

JPEG 2000

JPEG 2000

- *Nouveau standard (2000).*

JPEG 2000

- *Nouveau standard* (2000).
- Différences avec JPEG :
 - Autre base (ondelette),
 - Modélisation plus fine

JPEG 2000

- *Nouveau standard* (2000).
- Différences avec JPEG :
 - Autre base (ondelette),
 - Modélisation plus fine
- Avantage :
 - Performance,
 - Usage (échelonnabilité, progressivité, . . .)

Importance du choix de la base

Importance du choix de la base

- Décomposition dans une base orthonormée $\mathbf{B} = \{g_m\}_{m \in \mathbb{N}}$

$$f = \sum_{m \in \mathbb{N}} \langle f, g_m \rangle g_m .$$

Importance du choix de la base

- Décomposition dans une base orthonormée $\mathbf{B} = \{g_m\}_{m \in \mathbb{N}}$

$$f = \sum_{m \in \mathbb{N}} \langle f, g_m \rangle g_m .$$

- Approximation avec M vecteurs choisis adaptativement

$$f_M = \sum_{m \in I_M} \langle f, g_m \rangle g_m .$$

Importance du choix de la base

- Décomposition dans une base orthonormée $\mathbf{B} = \{g_m\}_{m \in \mathbb{N}}$

$$f = \sum_{m \in \mathbb{N}} \langle f, g_m \rangle g_m .$$

- Approximation avec M vecteurs choisis adaptativement

$$f_M = \sum_{m \in I_M} \langle f, g_m \rangle g_m .$$

- Pour minimiser $\|f - f_M\|^2 = \sum_{m \notin I_M} |\langle f, g_m \rangle|^2$,

sélection des M plus grands produits scalaires :

$$I_M = \{m, |\langle f, g_m \rangle| > T_M\} : \text{seuillage.}$$

Importance du choix de la base

- Décomposition dans une base orthonormée $\mathbf{B} = \{g_m\}_{m \in \mathbb{N}}$

$$f = \sum_{m \in \mathbb{N}} \langle f, g_m \rangle g_m .$$

- Approximation avec M vecteurs choisis adaptativement

$$f_M = \sum_{m \in I_M} \langle f, g_m \rangle g_m .$$

- Pour minimiser $\|f - f_M\|^2 = \sum_{m \notin I_M} |\langle f, g_m \rangle|^2$,

sélection des M plus grands produits scalaires :

$$I_M = \{m, |\langle f, g_m \rangle| > T_M\} : \text{seuillage.}$$

- Ne reste que le choix de la base \mathbf{B} .

Importance du choix de la base

- Décomposition dans une base orthonormée $\mathbf{B} = \{g_m\}_{m \in \mathbb{N}}$

$$f = \sum_{m \in \mathbb{N}} \langle f, g_m \rangle g_m .$$

- Approximation avec M vecteurs choisis adaptativement

$$f_M = \sum_{m \in I_M} \langle f, g_m \rangle g_m .$$

- Pour minimiser $\|f - f_M\|^2 = \sum_{m \notin I_M} |\langle f, g_m \rangle|^2$,

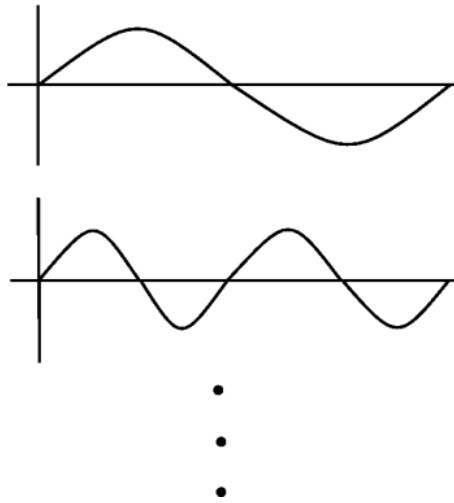
sélection des M plus grands produits scalaires :

$$I_M = \{m, |\langle f, g_m \rangle| > T_M\} : \text{seuillage.}$$

- Ne reste que le choix de la base \mathbf{B} .
- Situation similaire pour la compression.

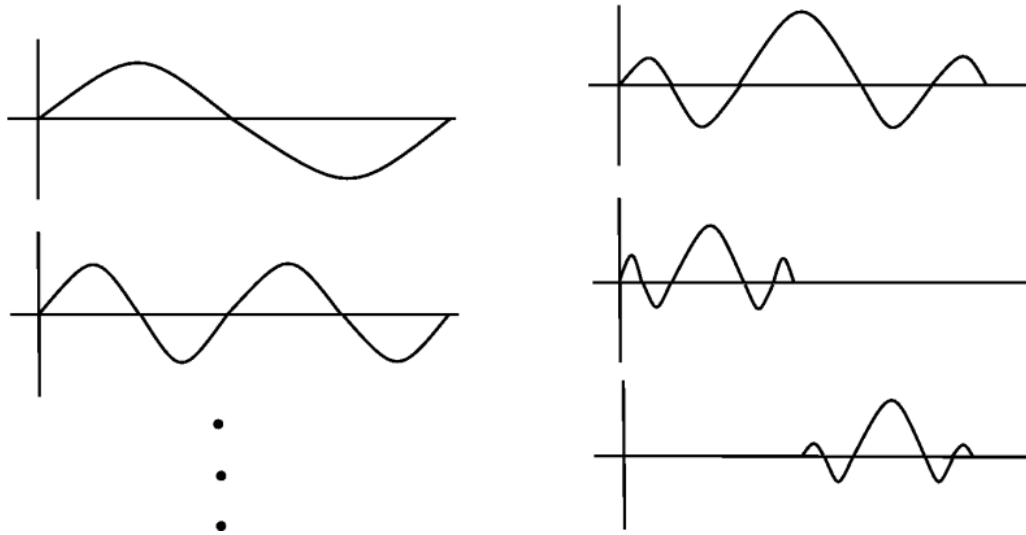
Ondelettes 1D

Ondelettes 1D



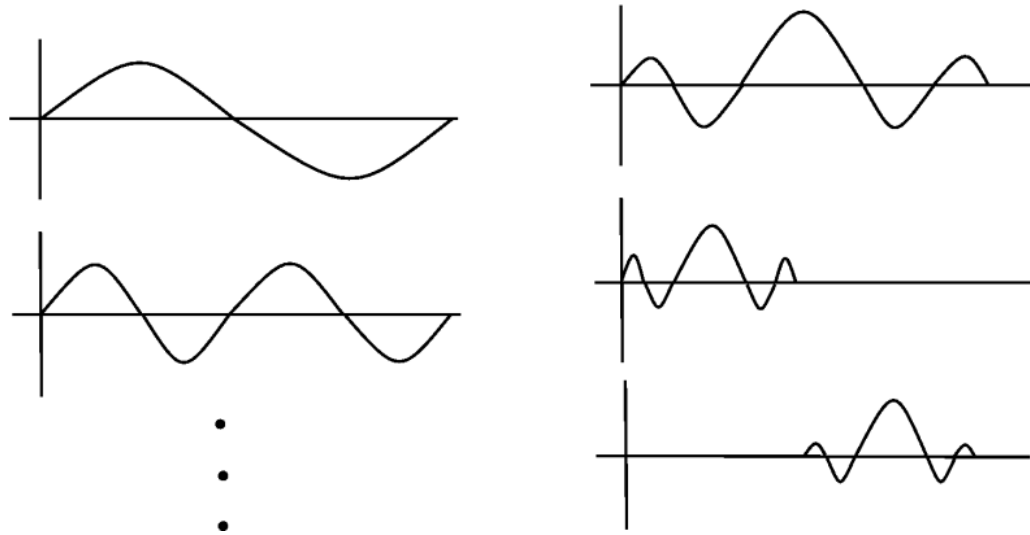
- Fourier : modèle stationnaire.

Ondelettes 1D



- Fourier : modèle stationnaire.
- Ondelettes : localisation.

Ondelettes 1D

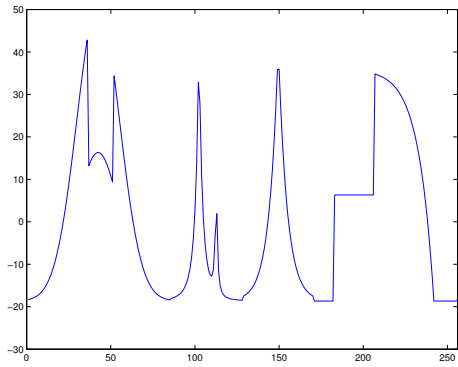


- Fourier : modèle stationnaire.
- Ondelettes : localisation.
- Structure multirésolution : approximations successives et détails.

Multirésolution

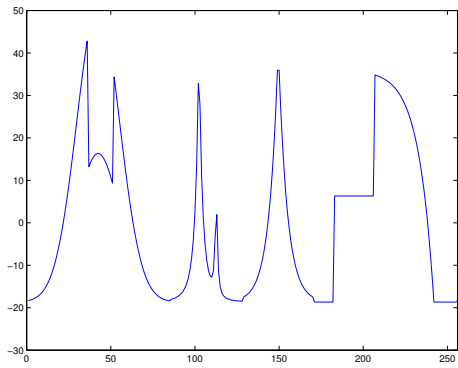
Multirésolution

256

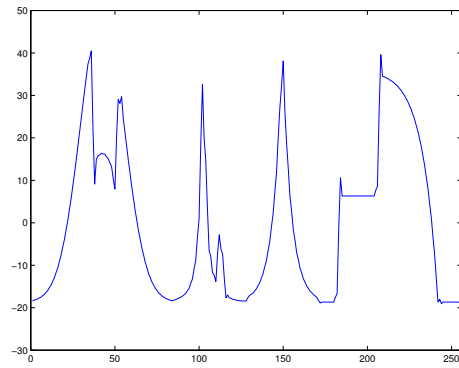


Multirésolution

256

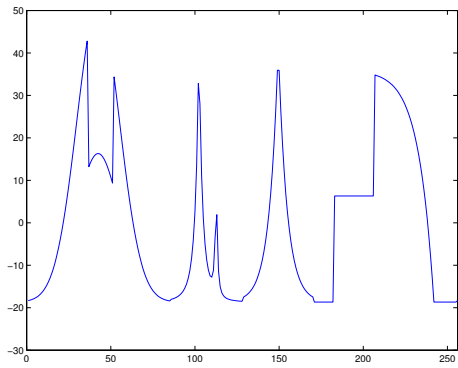


128

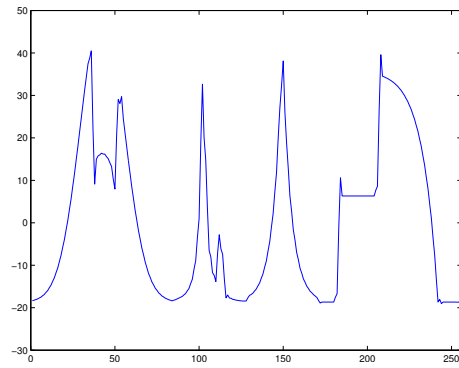


Multirésolution

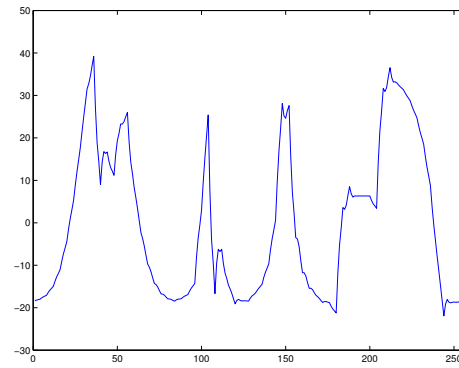
256



128

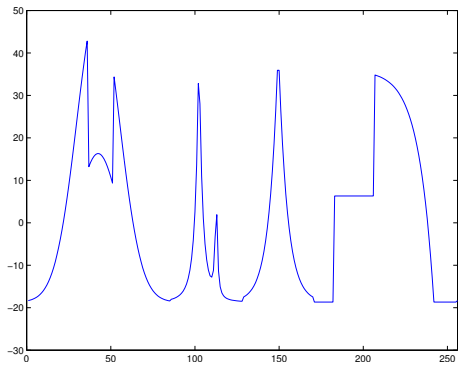


64

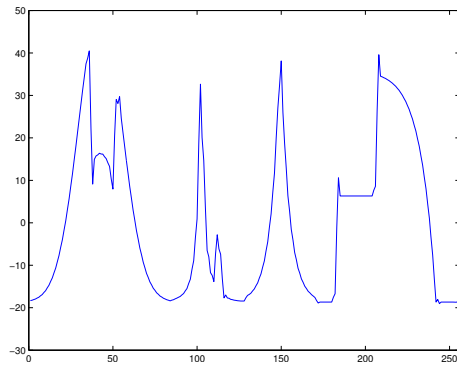


Multirésolution

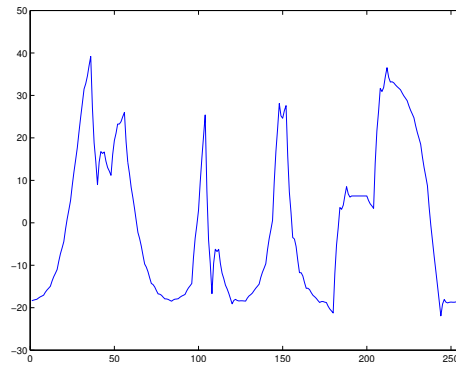
256



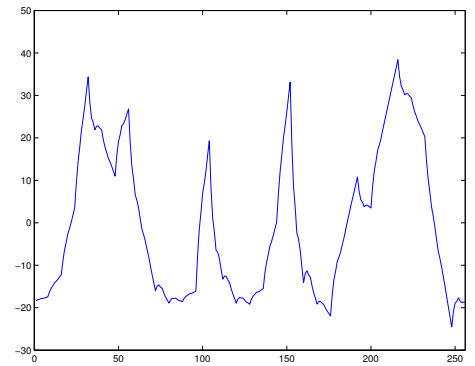
128



64

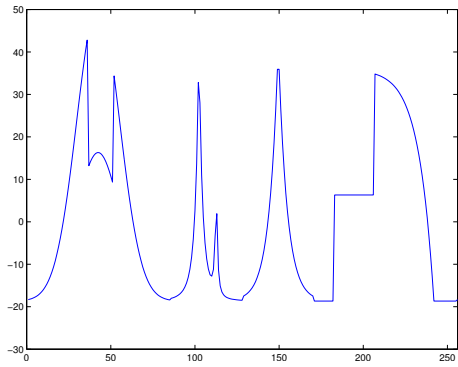


32

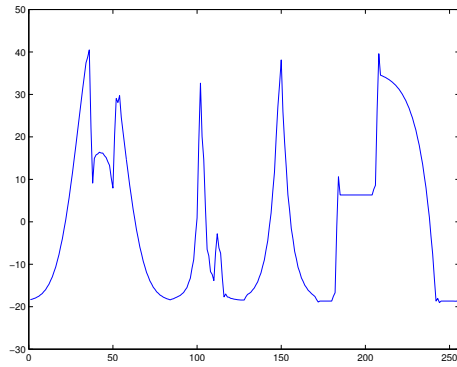


Multirésolution

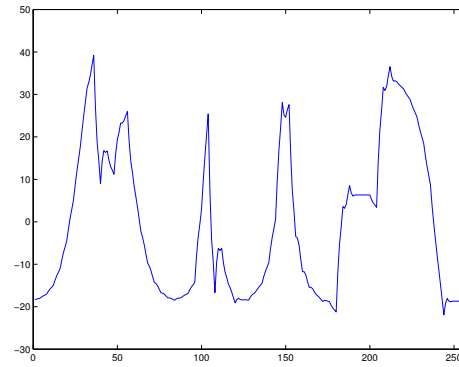
256



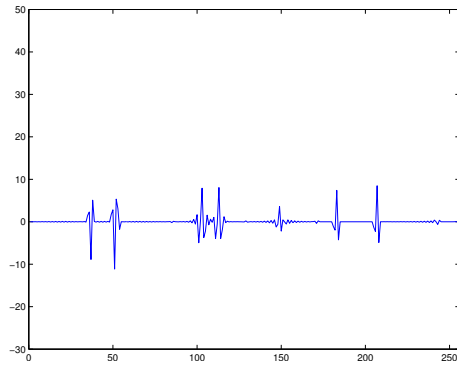
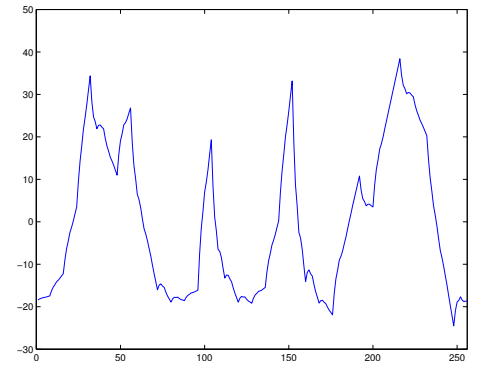
128



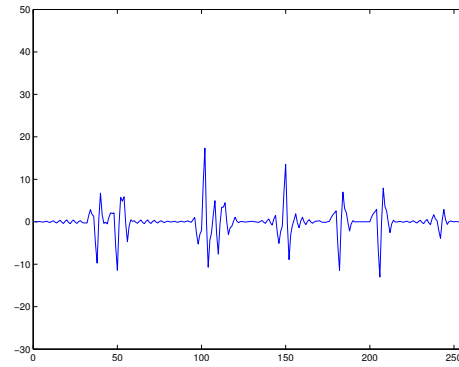
64



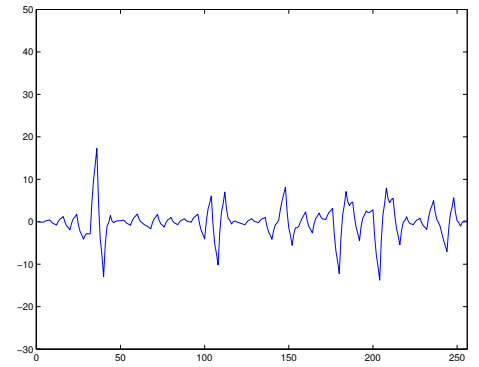
32



128



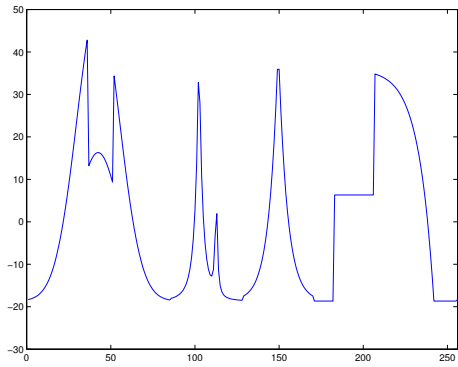
64



32

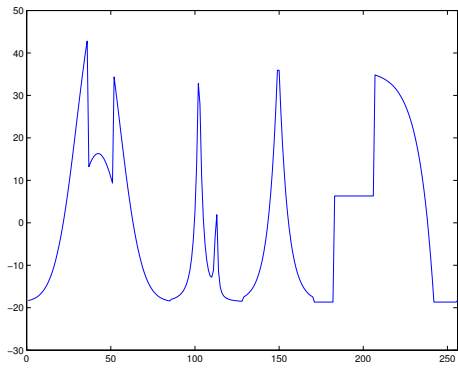
Multirésolution

256

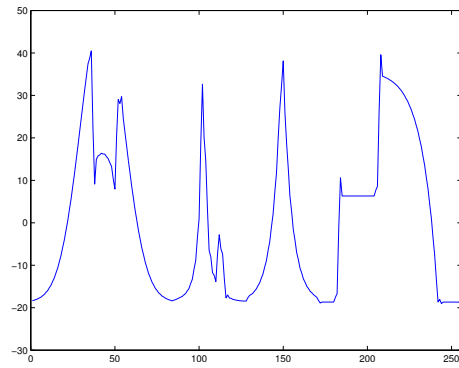


Multirésolution

256

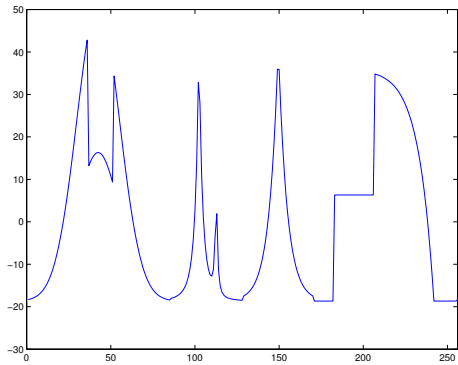


128

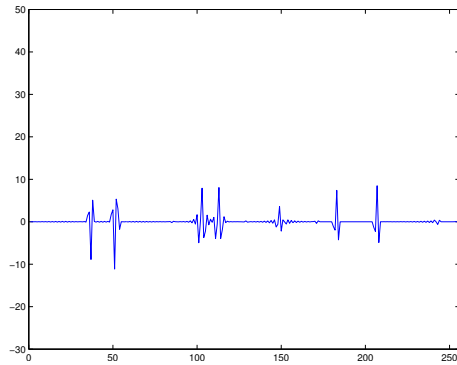
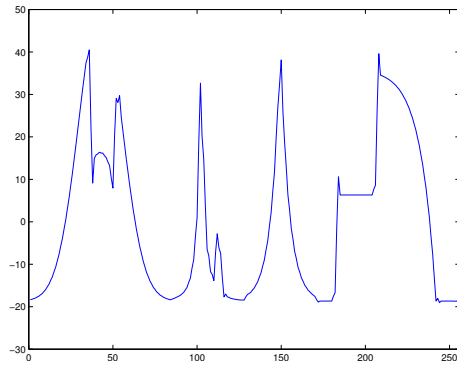


Multirésolution

256



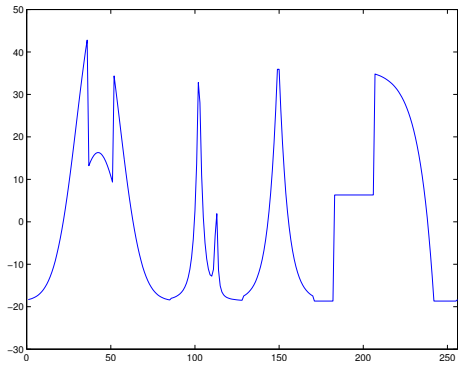
128



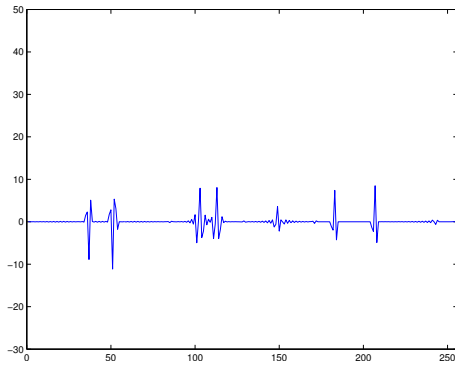
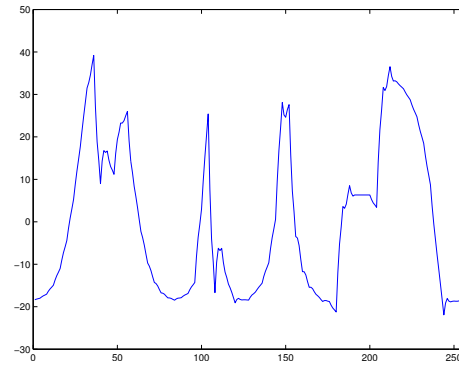
128

Multirésolution

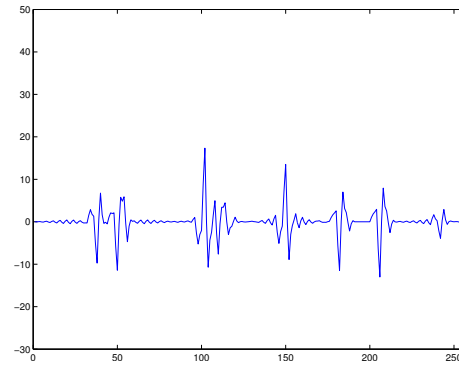
256



64



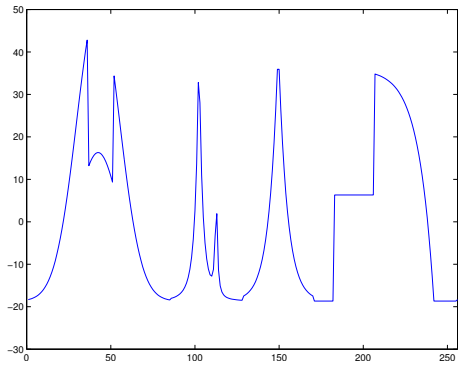
128



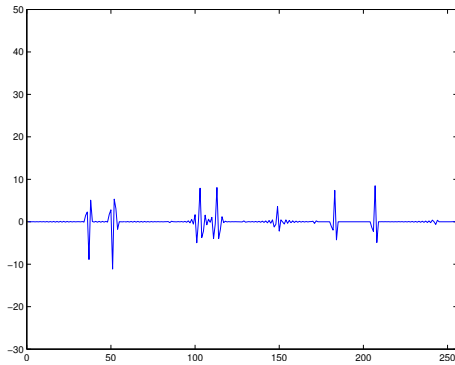
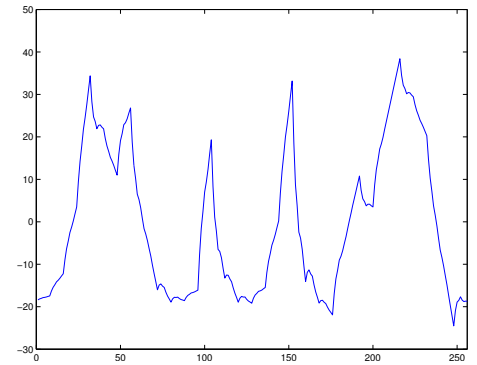
64

Multirésolution

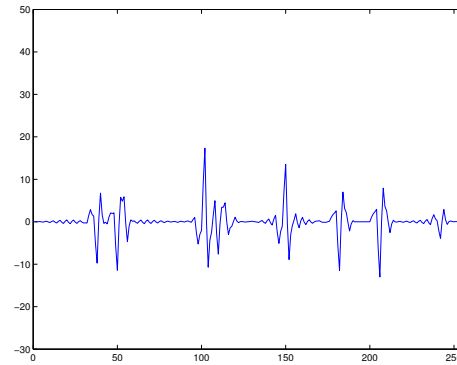
256



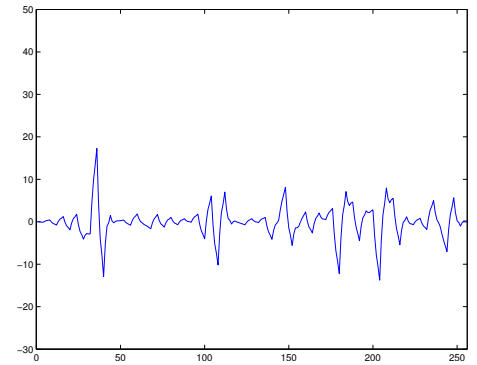
32



128



64

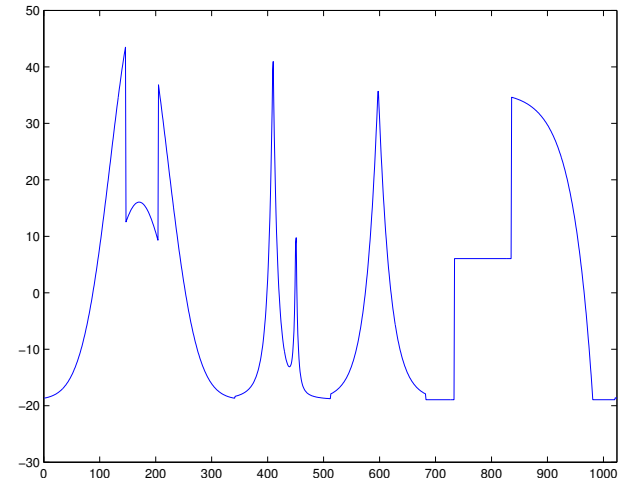
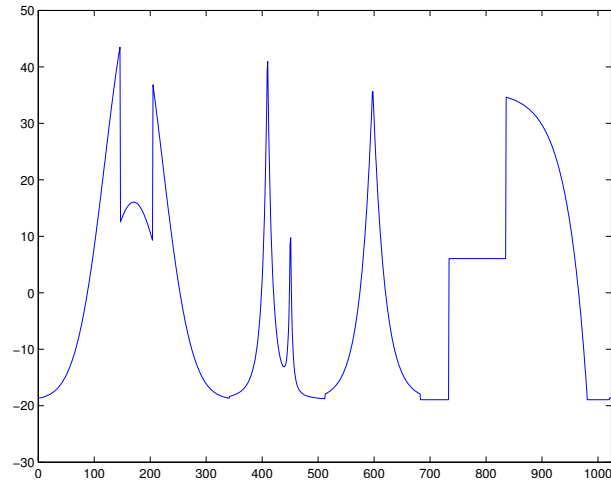


32

Approximation non linéaire

Approximation non linéaire

Linéaire

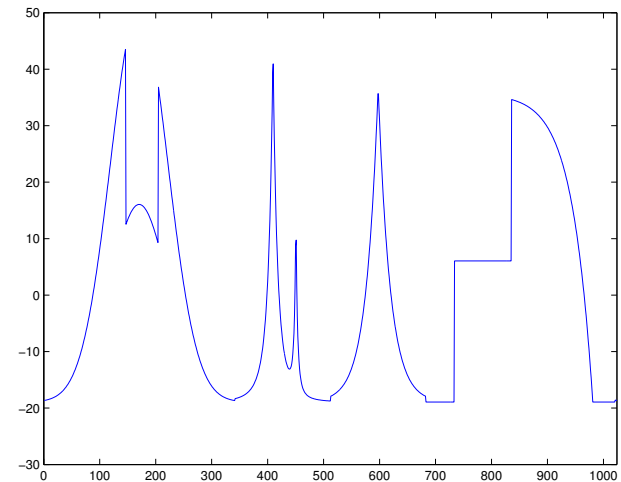
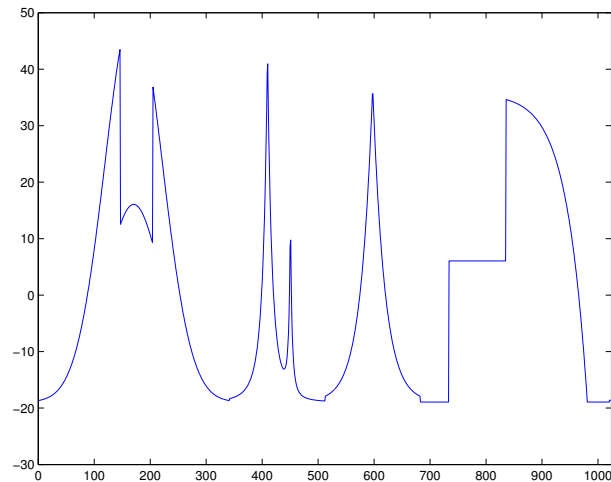


1024

Fourier

Ondelettes

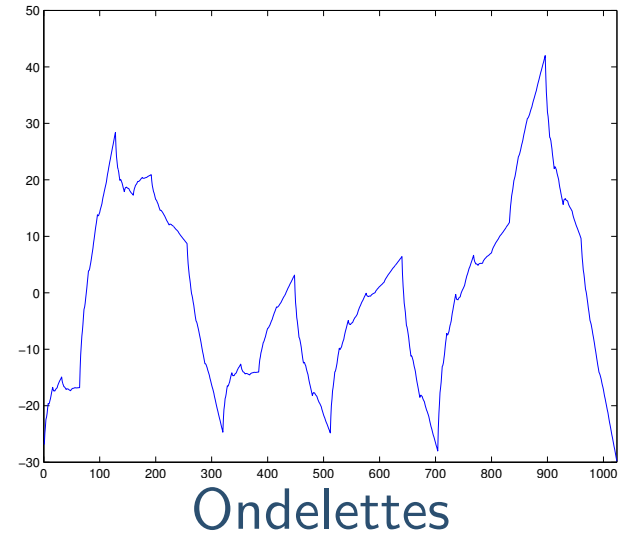
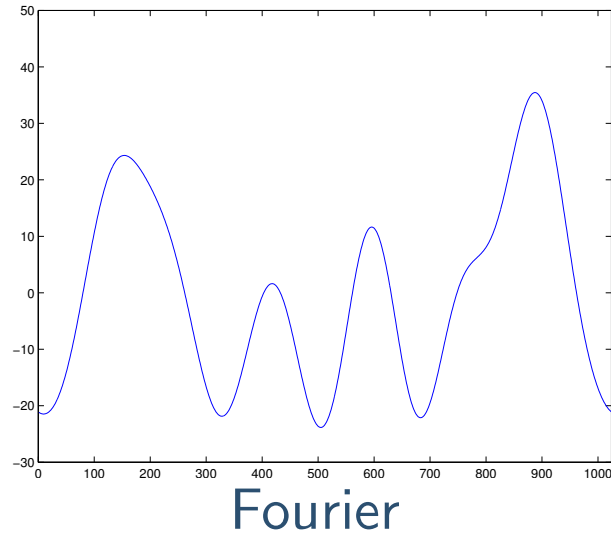
Non Linéaire



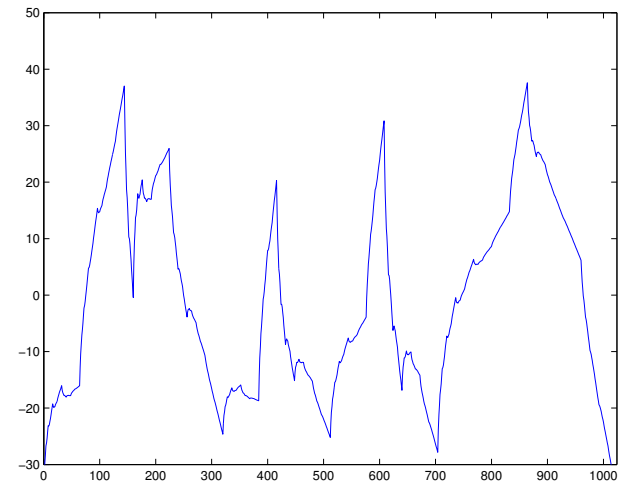
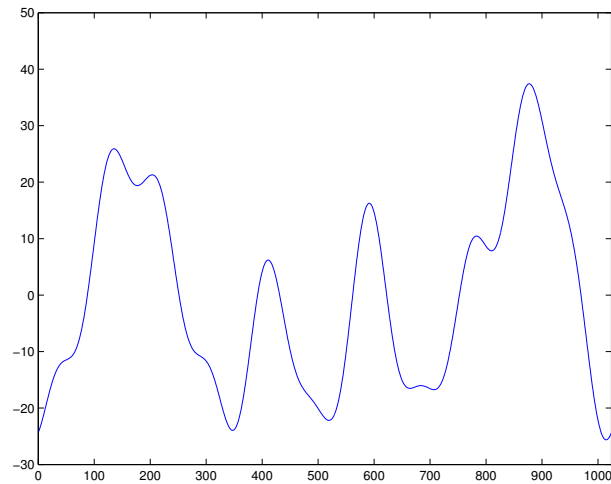
Approximation non linéaire

Linéaire

16



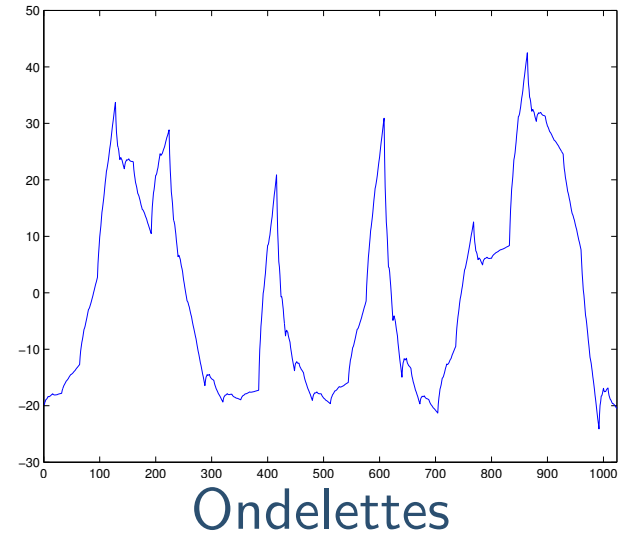
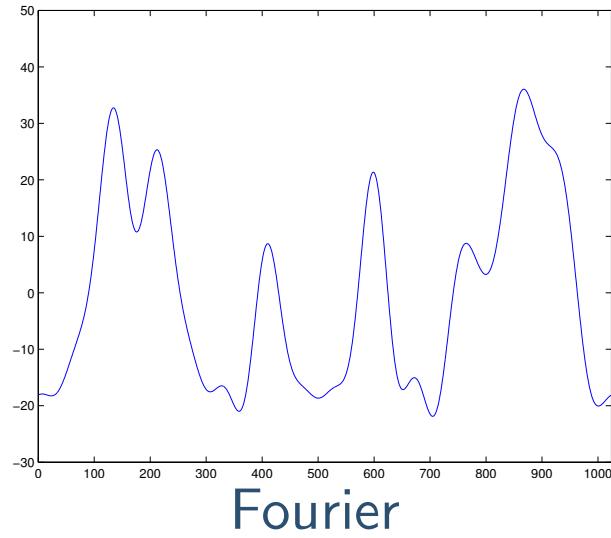
Non Linéaire



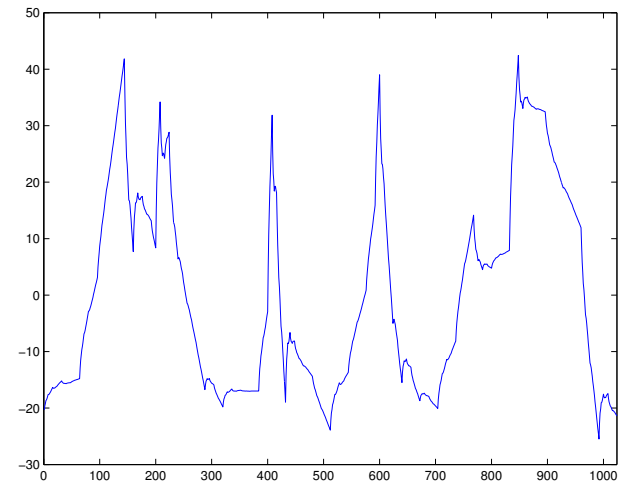
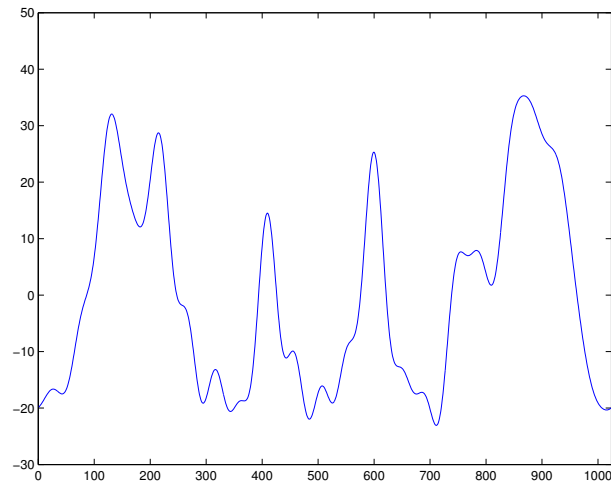
Approximation non linéaire

Linéaire

32



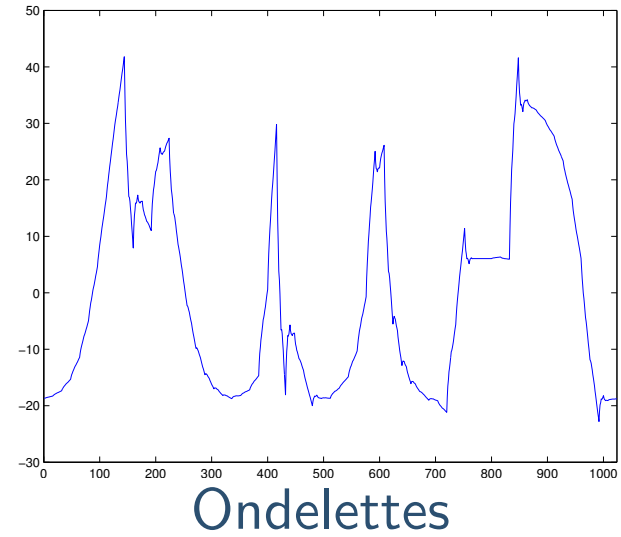
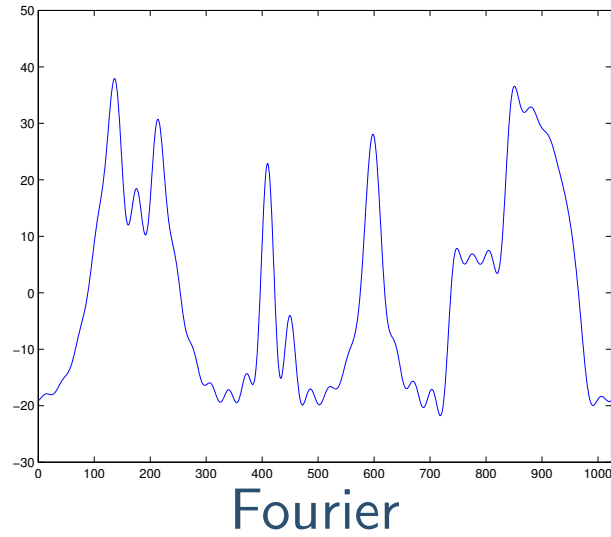
Non Linéaire



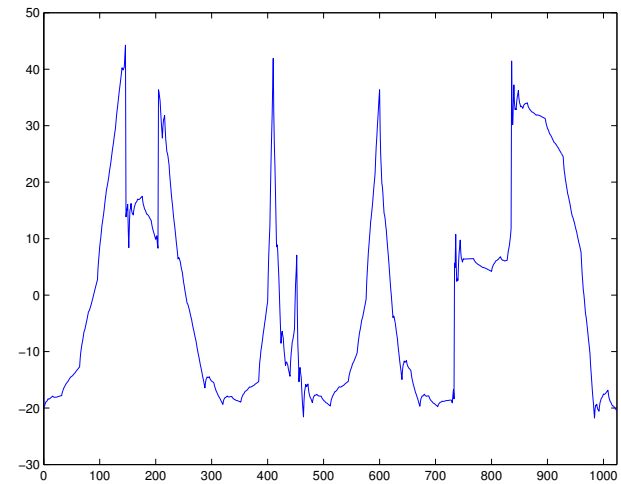
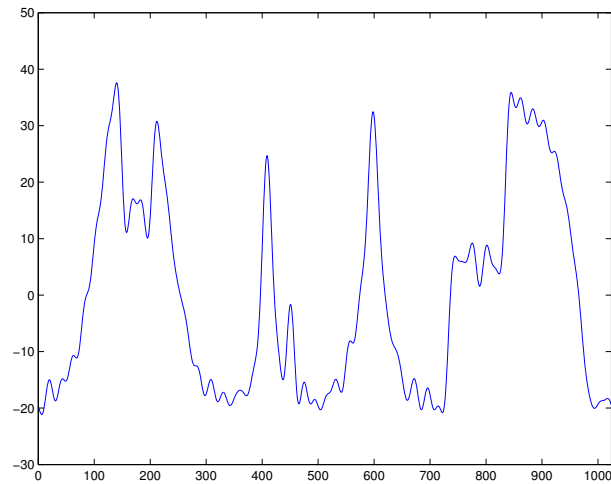
Approximation non linéaire

Linéaire

64

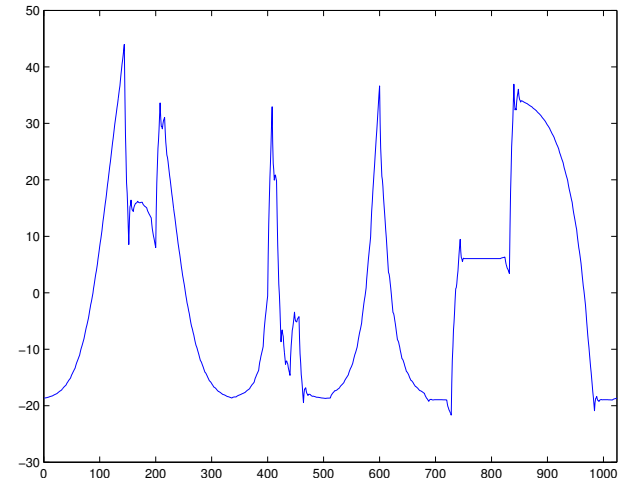
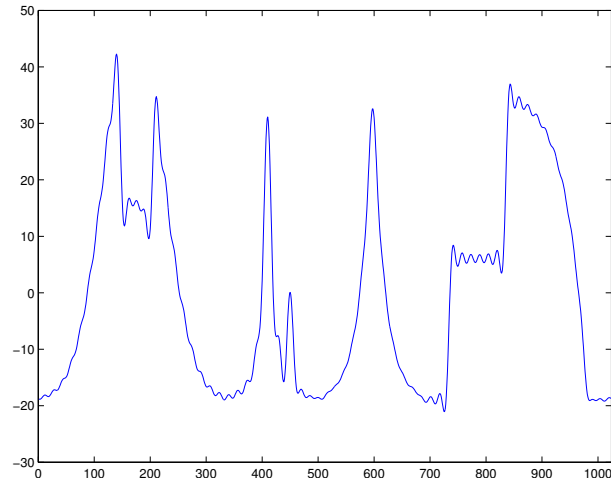


Non Linéaire



Approximation non linéaire

Linéaire

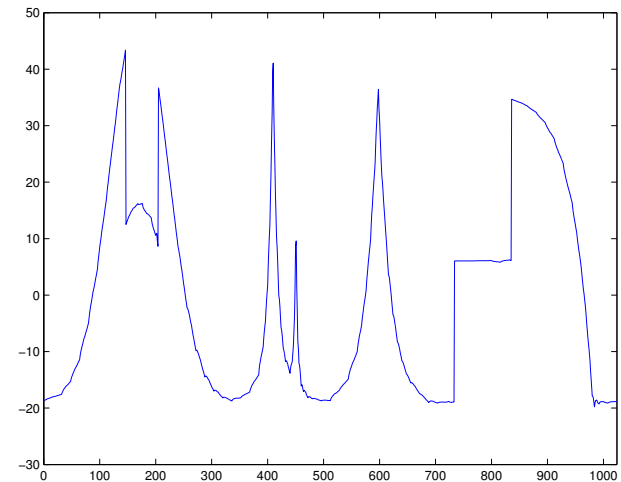
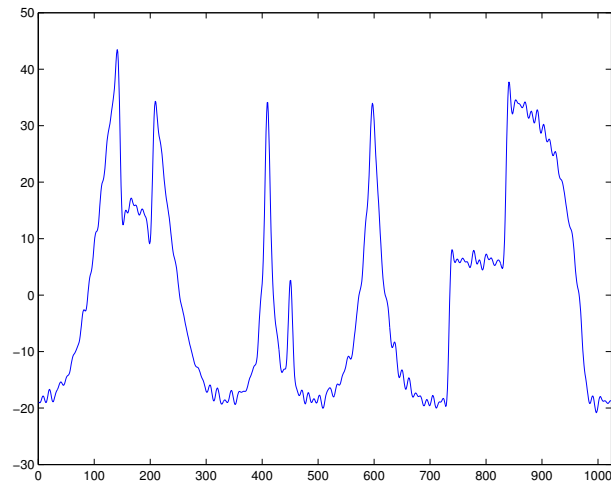


128

Fourier

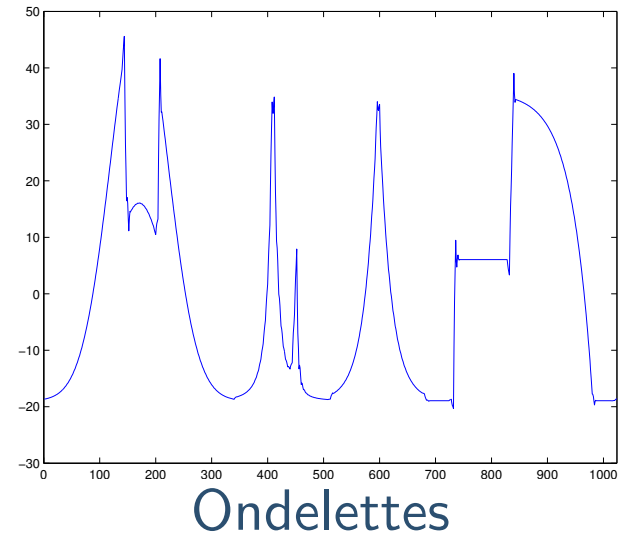
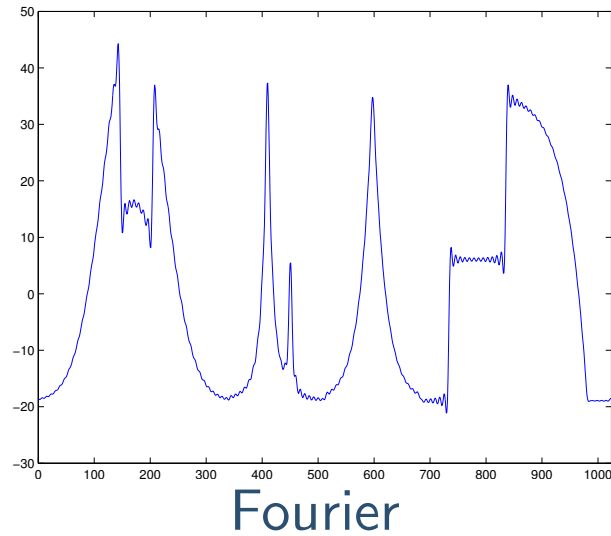
Ondelettes

Non Linéaire

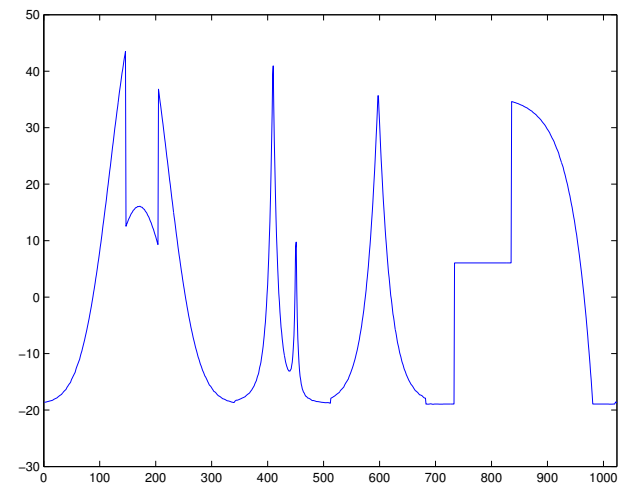
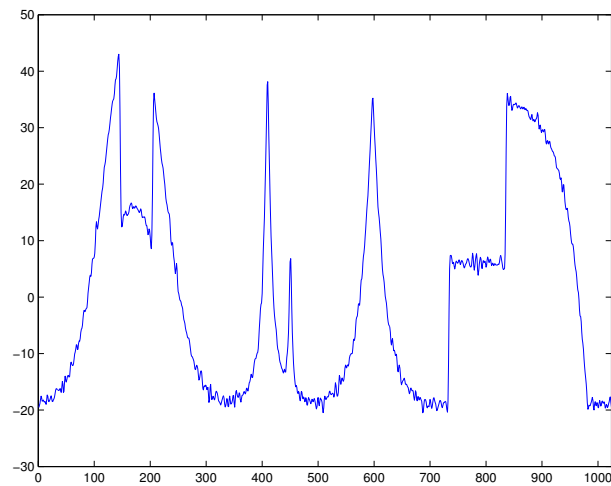


Approximation non linéaire

Linéaire



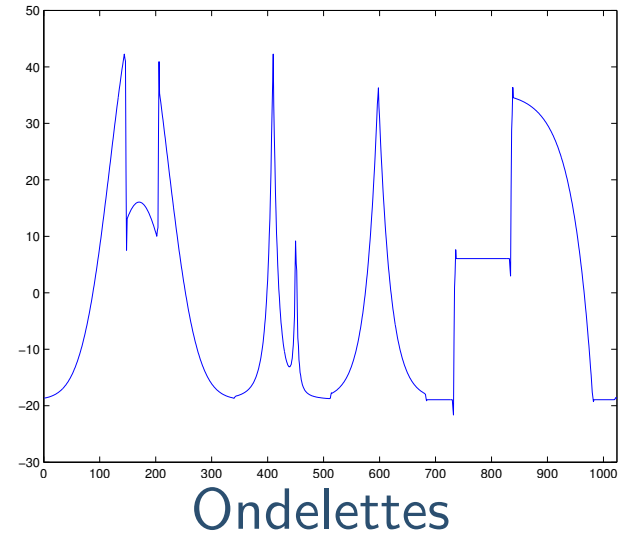
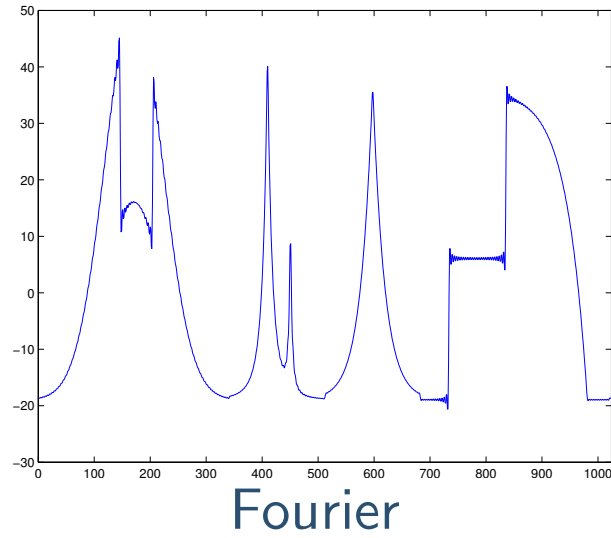
Non Linéaire



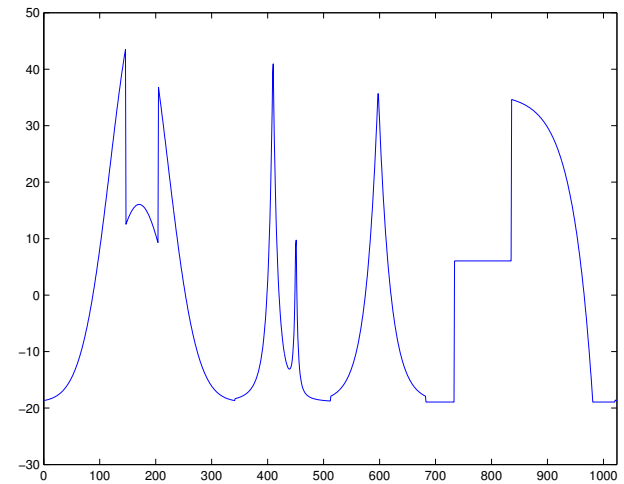
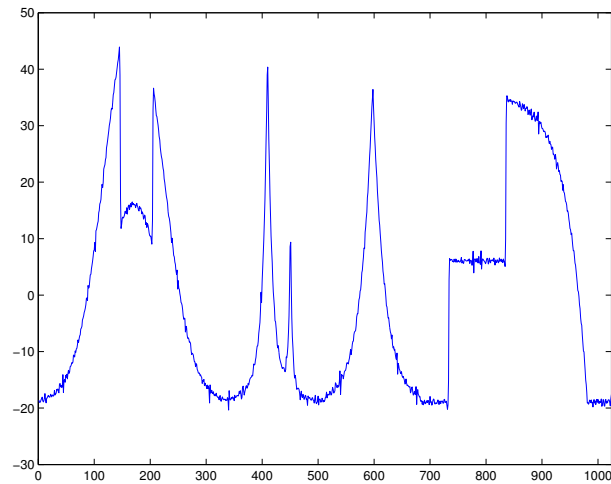
Approximation non linéaire

Linéaire

512

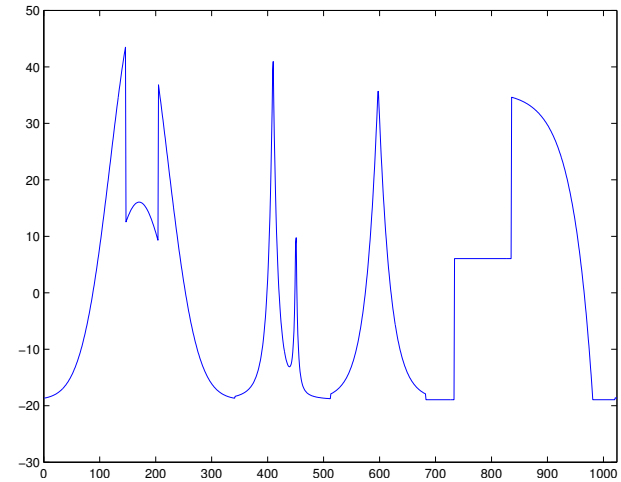
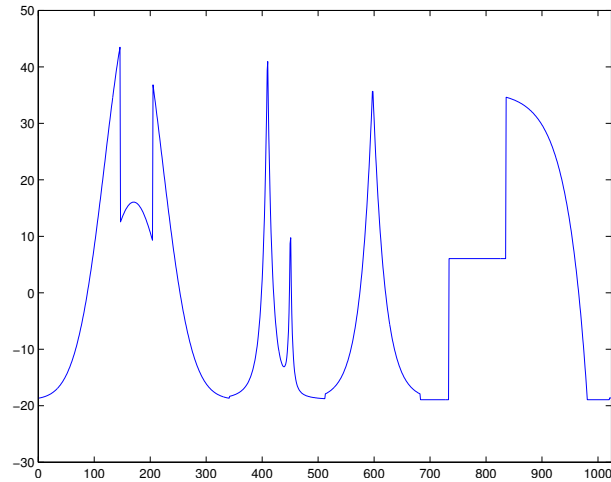


Non Linéaire



Approximation non linéaire

Linéaire

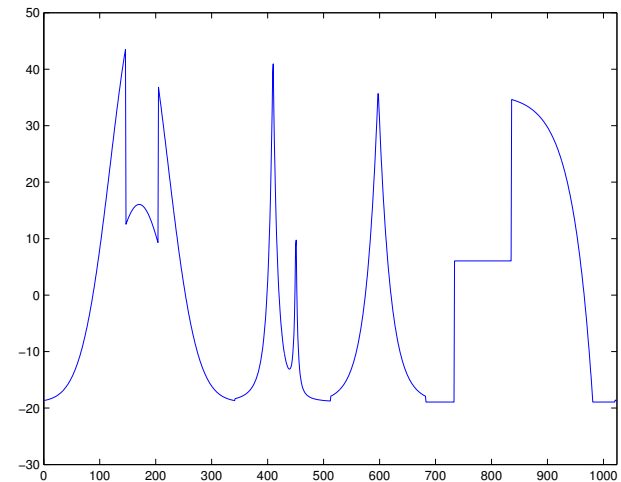
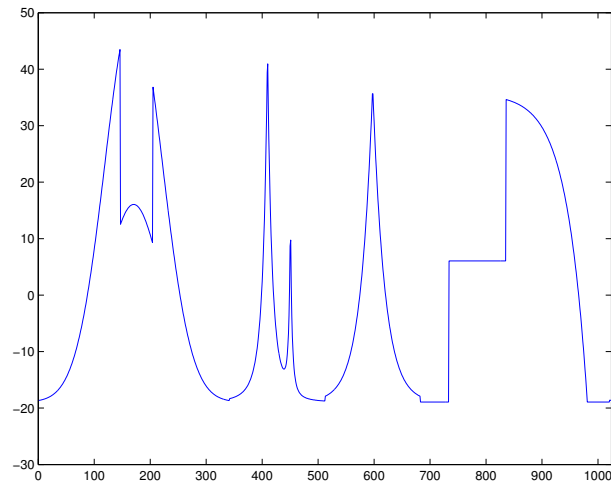


1024

Fourier

Ondelettes

Non Linéaire



Ondelettes 2D

Ondelettes 2D

- Construction similaire mais bidimensionnelle.

Ondelettes 2D



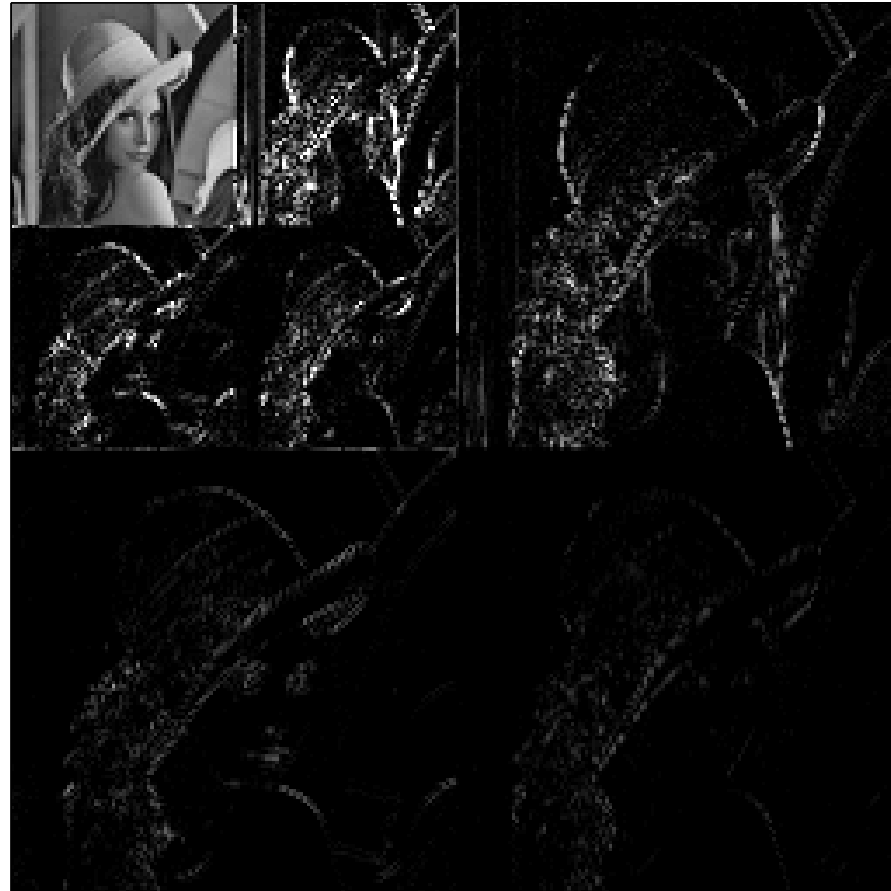
- Construction similaire mais bidimensionnelle.

Ondelettes 2D



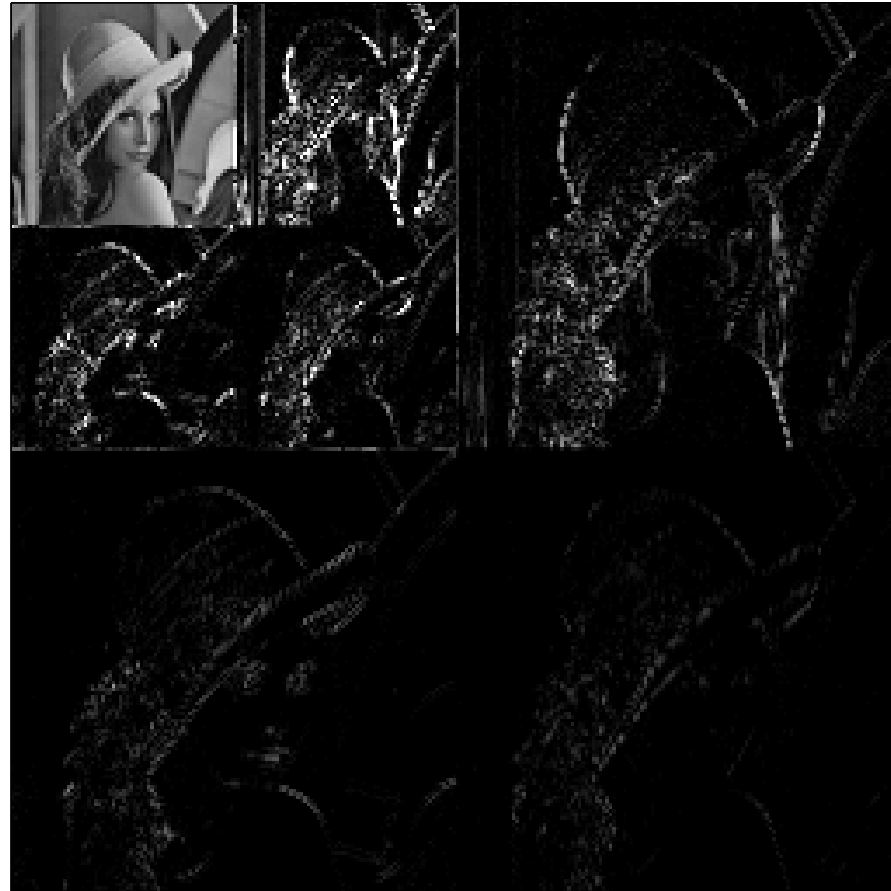
- Construction similaire mais bidimensionnelle.

Ondelettes 2D



- Construction similaire mais bidimensionnelle.

Ondelettes 2D



- Construction similaire mais bidimensionnelle.
- Grands coefficients correspondent aux contours.

Compression par transformée

Compression par transformée

- Décomposition dans une base.

Compression par transformée

- Décomposition dans une base.
- Quantification des coefficients.

Compression par transformée

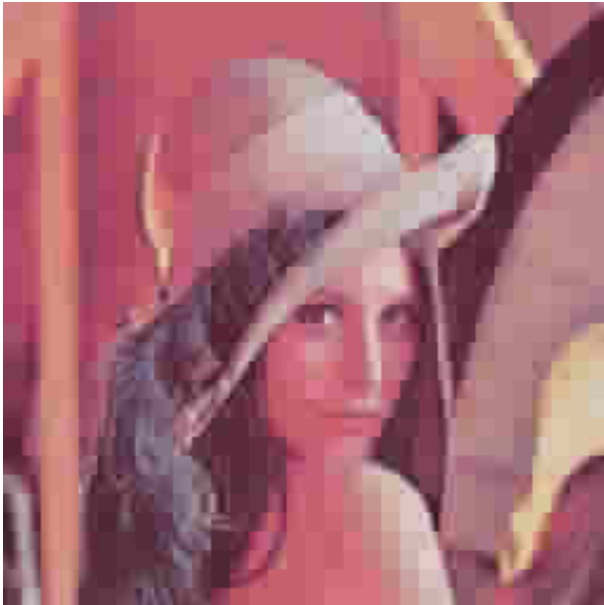
- Décomposition dans une base.
- Quantification des coefficients.
- Codage entropique.

Compression par transformée

- Décomposition dans une base.
- Quantification des coefficients.
- Codage entropique.
- JPEG, JPEG 2000,...



Originale



JPEG



JPEG 2000

Et après

Et après

- Problème clos ?

Et après

- Problème clos ?
- Codage entropique : OUI mais codage source/canal.

Et après

- Problème clos ?
- Codage entropique : OUI mais codage source/canal.
- Modélisation : NON.

Et après

- Problème clos ?
- Codage entropique : OUI mais codage source/canal.
- Modélisation : NON.
- Transformation : NON (théorie de l'approximation).

Et après

- Problème clos ?
- Codage entropique : OUI mais codage source/canal.
- Modélisation : NON.
- Transformation : NON (théorie de l'approximation).
- Vidéo, Sons...

Géométrie

Géométrie



- Caractéristique des images naturelles.

Géométrie



- Caractéristique des images naturelles.
- Inutilisée dans les représentations précédentes.

Géométrie



- Caractéristique des images naturelles.
- Inutilisée dans les représentations précédentes.
- Apport théorique prévisible.

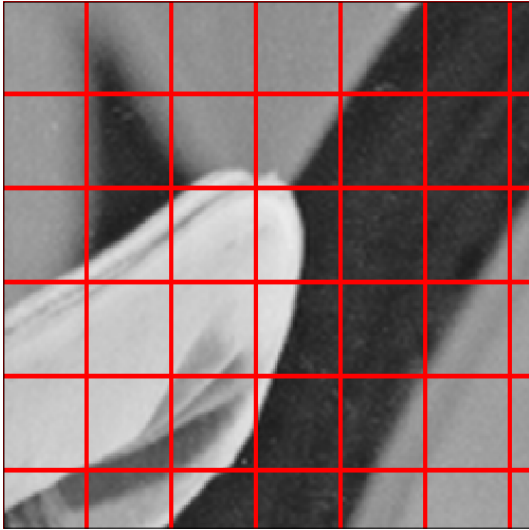
Géométrie



- Caractéristique des images naturelles.
- Inutilisée dans les représentations précédentes.
- Apport théorique prévisible.
- Direction de recherche actuelle : curvelets, edgelets, wedgelets, ondelettes géométriques, *bandelettes*...

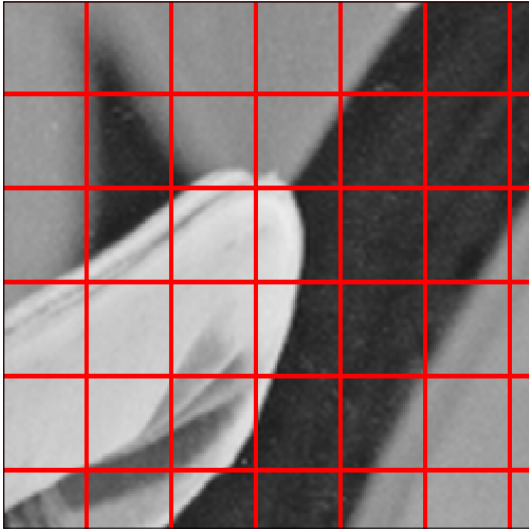
Bandelettes

Bandelettes

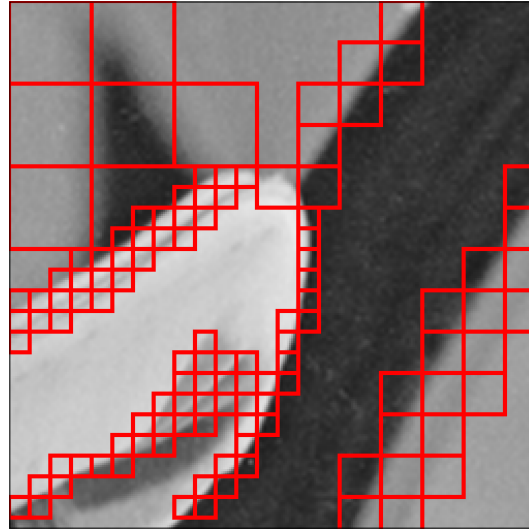


Fourier
Base

Bandelettes

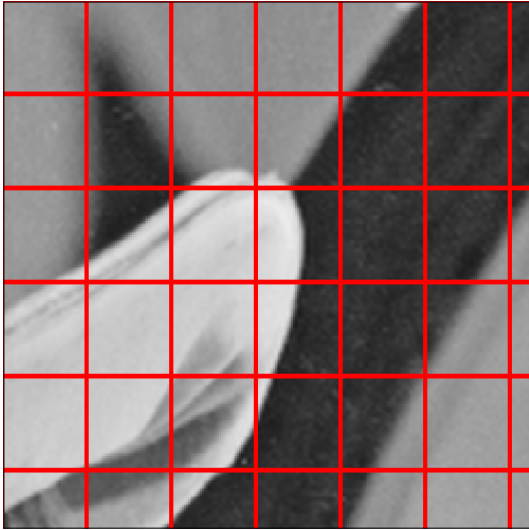


Fourier
Base

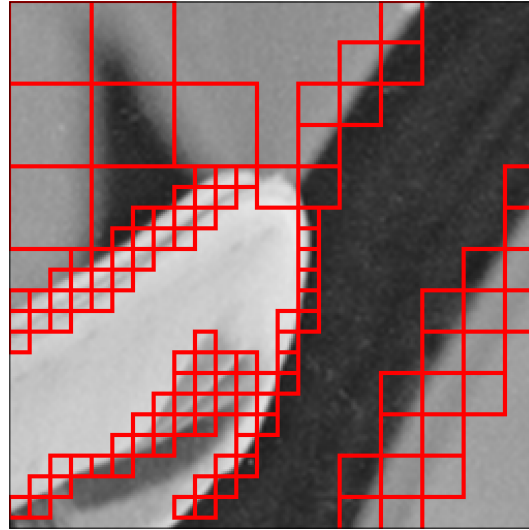


Ondelettes
Multiéchelle

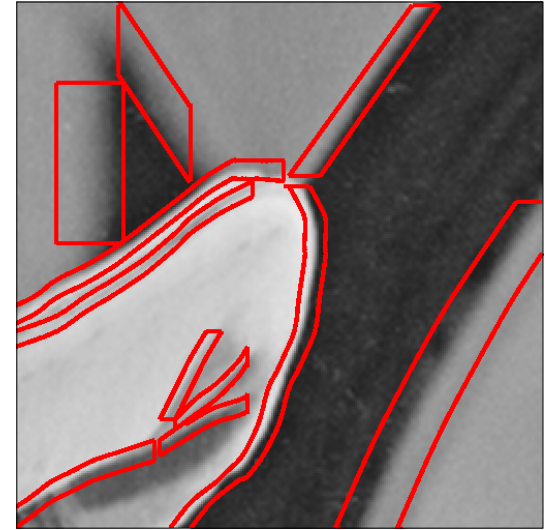
Bandelettes



Fourier
Base

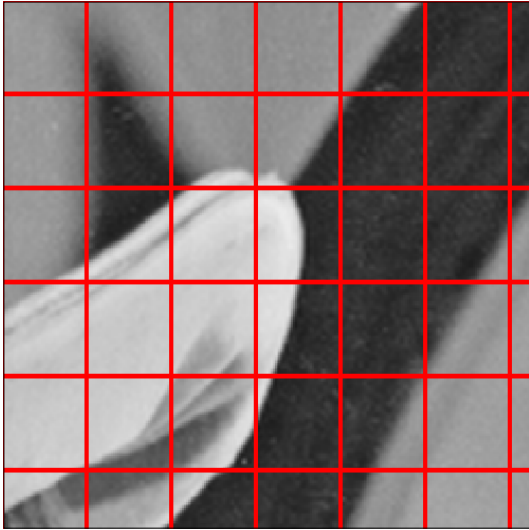


Ondelettes
Multiéchelle

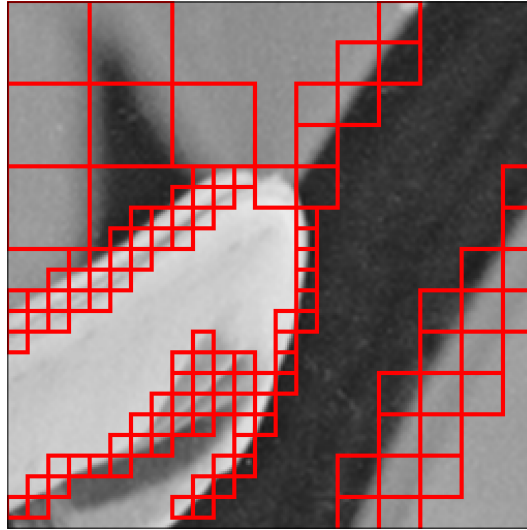


Bandelettes
Géométrie

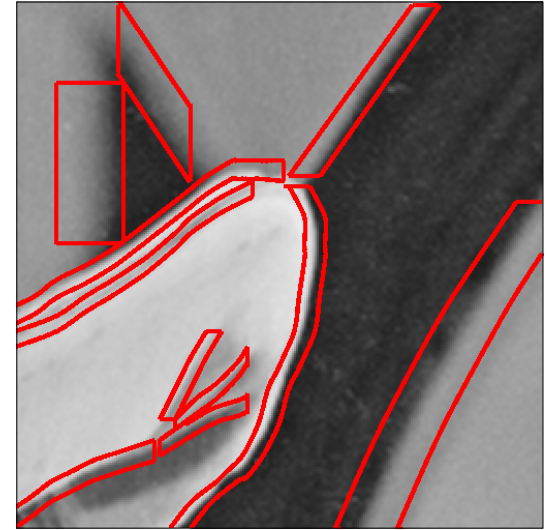
Bandelettes



Fourier
Base



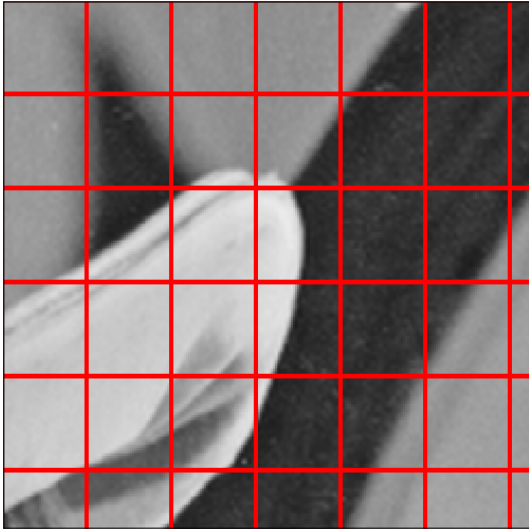
Ondelettes
Multiéchelle



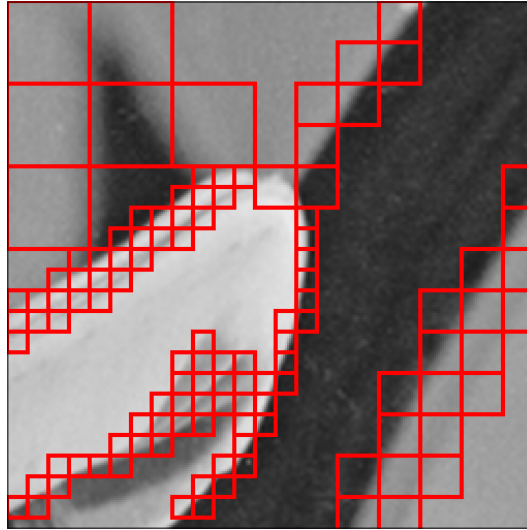
Bandelettes
Géométrie

- Coût : adaptativité, choix de la géométrie.

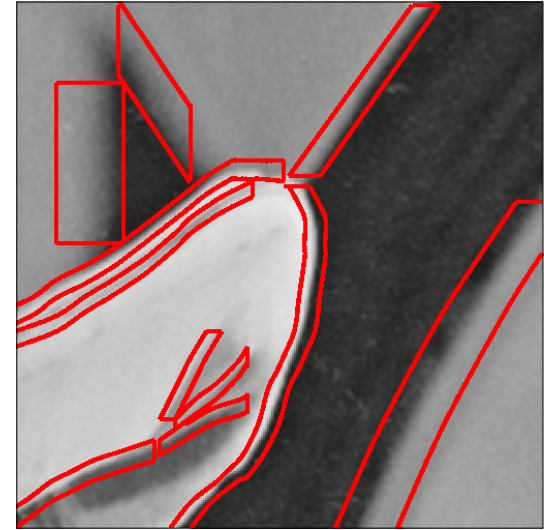
Bandelettes



Fourier
Base



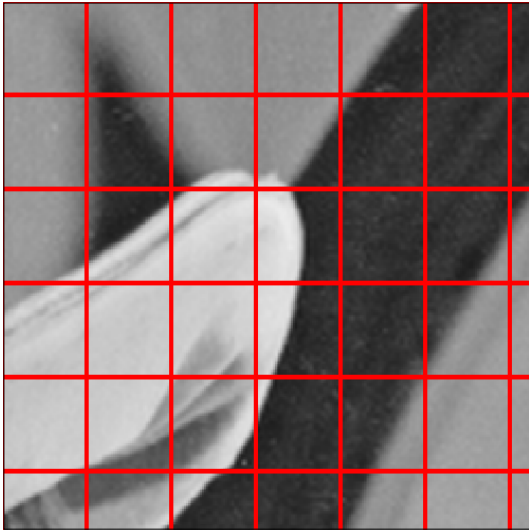
Ondelettes
Multiéchelle



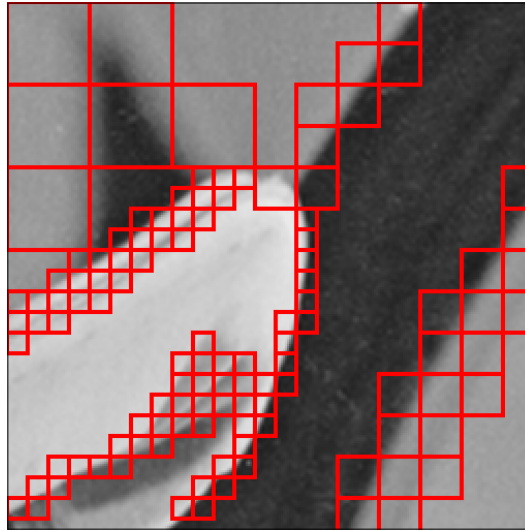
Bandelettes
Géométrie

- Coût : adaptativité, choix de la géométrie.
- Algorithme rapide pour ce choix.

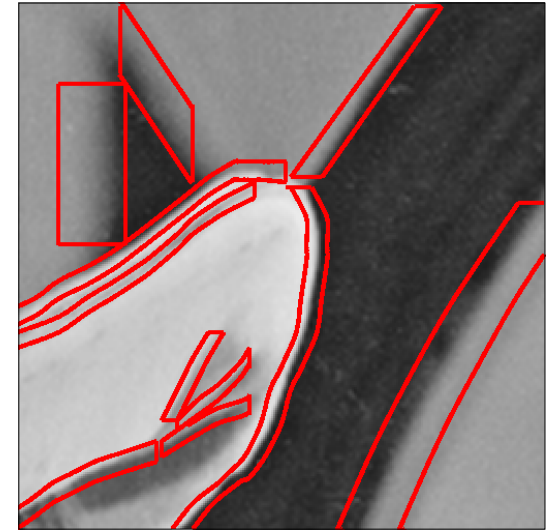
Bandelettes



Fourier
Base



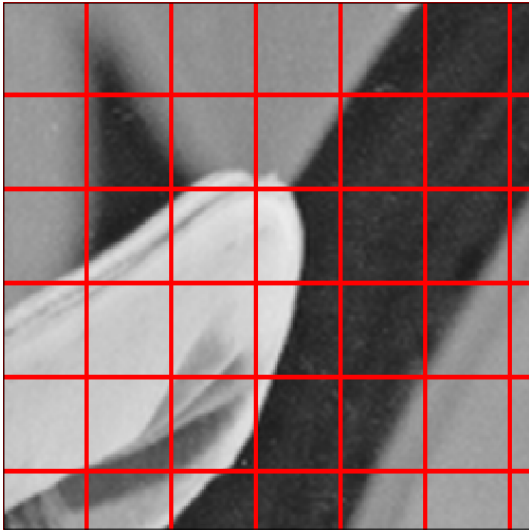
Ondelettes
Multiéchelle



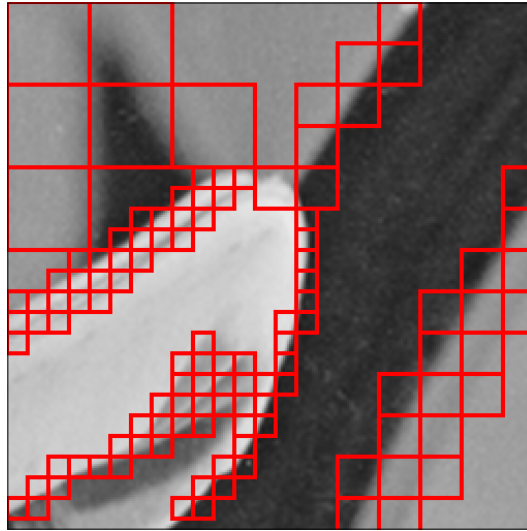
Bandelettes
Géométrie

- Coût : adaptativité, choix de la géométrie.
- Algorithme rapide pour ce choix.
- Travail académique sur l'optimalité de la méthode.

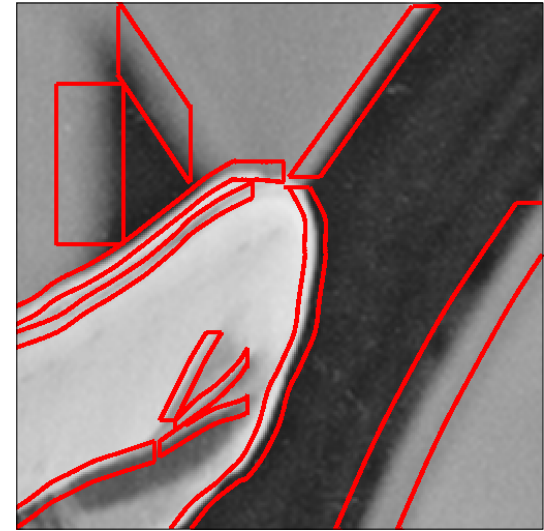
Bandelettes



Fourier
Base



Ondelettes
Multiéchelle



Bandelettes
Géométrie

- Coût : adaptativité, choix de la géométrie.
- Algorithme rapide pour ce choix.
- Travail académique sur l'optimalité de la méthode.
- Implémentation effective sans optimisation fine.

Originale

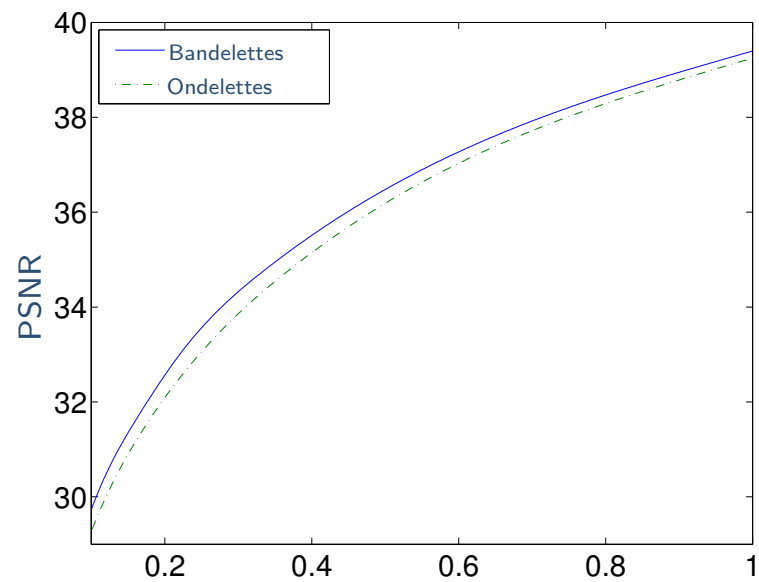


$$R/N^2 = 0,22 \text{ bpp}$$

Bandelettes (33,05 db)



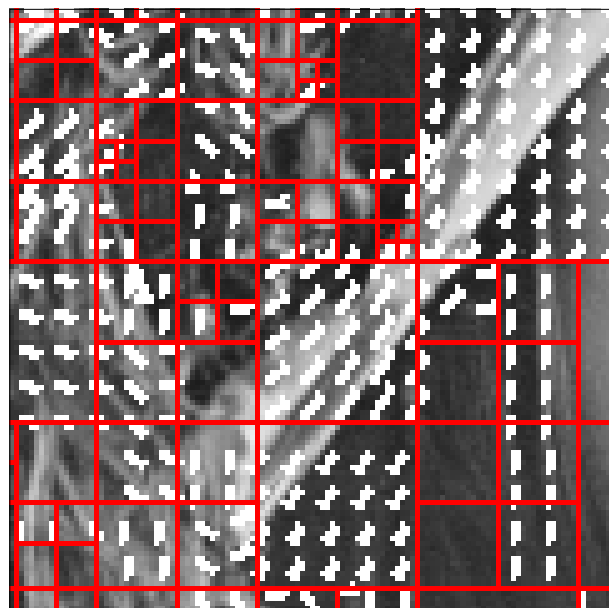
Distorsion-Débit



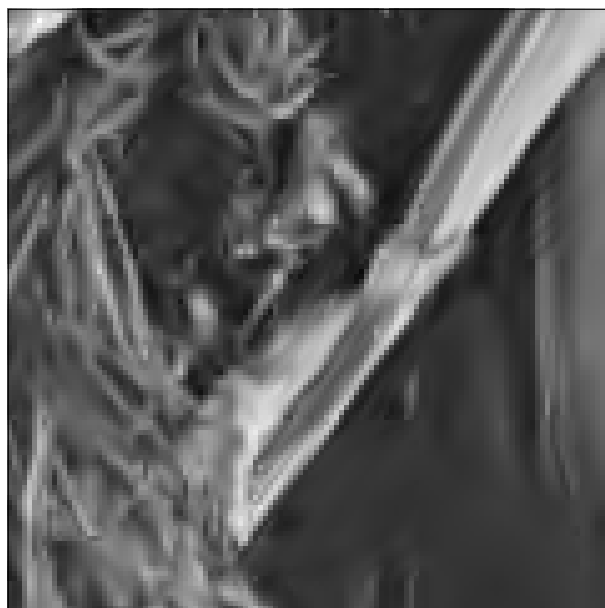
Ondelettes (R/N^2 32,54 db)



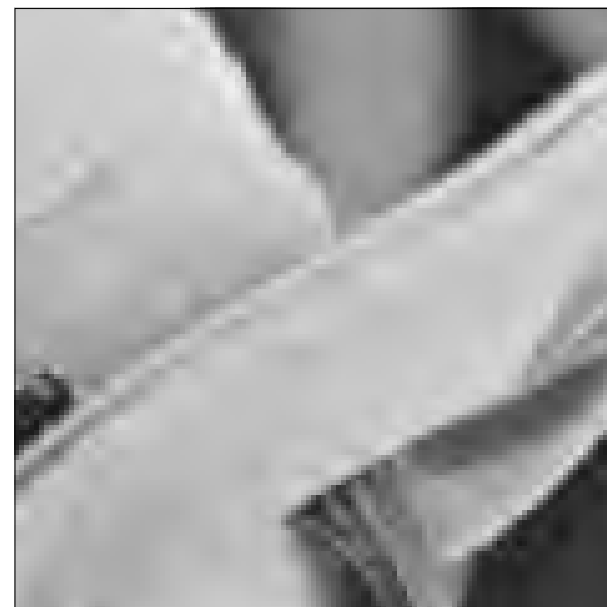
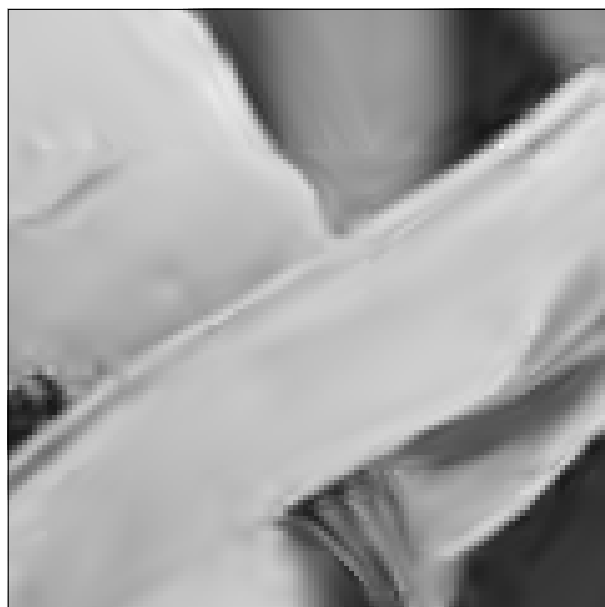
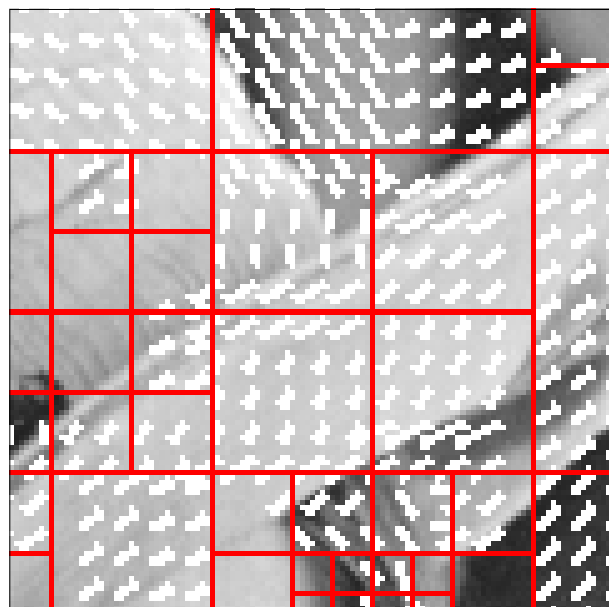
Originale



Bandelettes



Ondelettes



Modèle spécialisé

Modèle spécialisé

- Compression spécialisée pour les visages.

Modèle spécialisé

- Compression spécialisée pour les visages.
- 500 octets = facteur 400 de compression !

Modèle spécialisé

- Compression spécialisée pour les visages.
- 500 octets = facteur 400 de compression !
- Comparaison de différents algorithmes.

Modèle spécialisé



JPEG

- Compression spécialisée pour les visages.
- 500 octets = facteur 400 de compression !
- Comparaison de différents algorithmes.

Modèle spécialisé



JPEG



JPEG-2000

- Compression spécialisée pour les visages.
- 500 octets = facteur 400 de compression !
- Comparaison de différents algorithmes.

Modèle spécialisé



JPEG



JPEG-2000



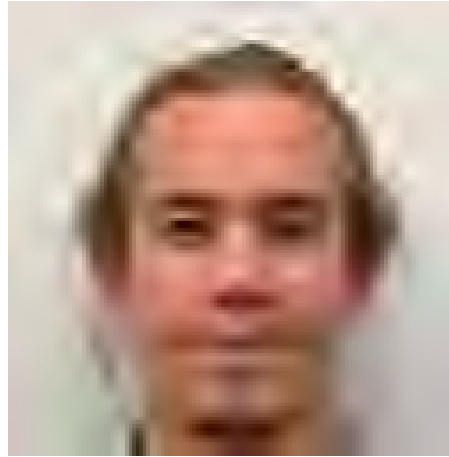
LET IT WAVE

- Compression spécialisée pour les visages.
- 500 octets = facteur 400 de compression !
- Comparaison de différents algorithmes.

Modèle spécialisé



JPEG



JPEG-2000



LET IT WAVE

- Compression spécialisée pour les visages.
- 500 octets = facteur 400 de compression !
- Comparaison de différents algorithmes.
- Clé : spécialisation.

LIW ID Photo Codec

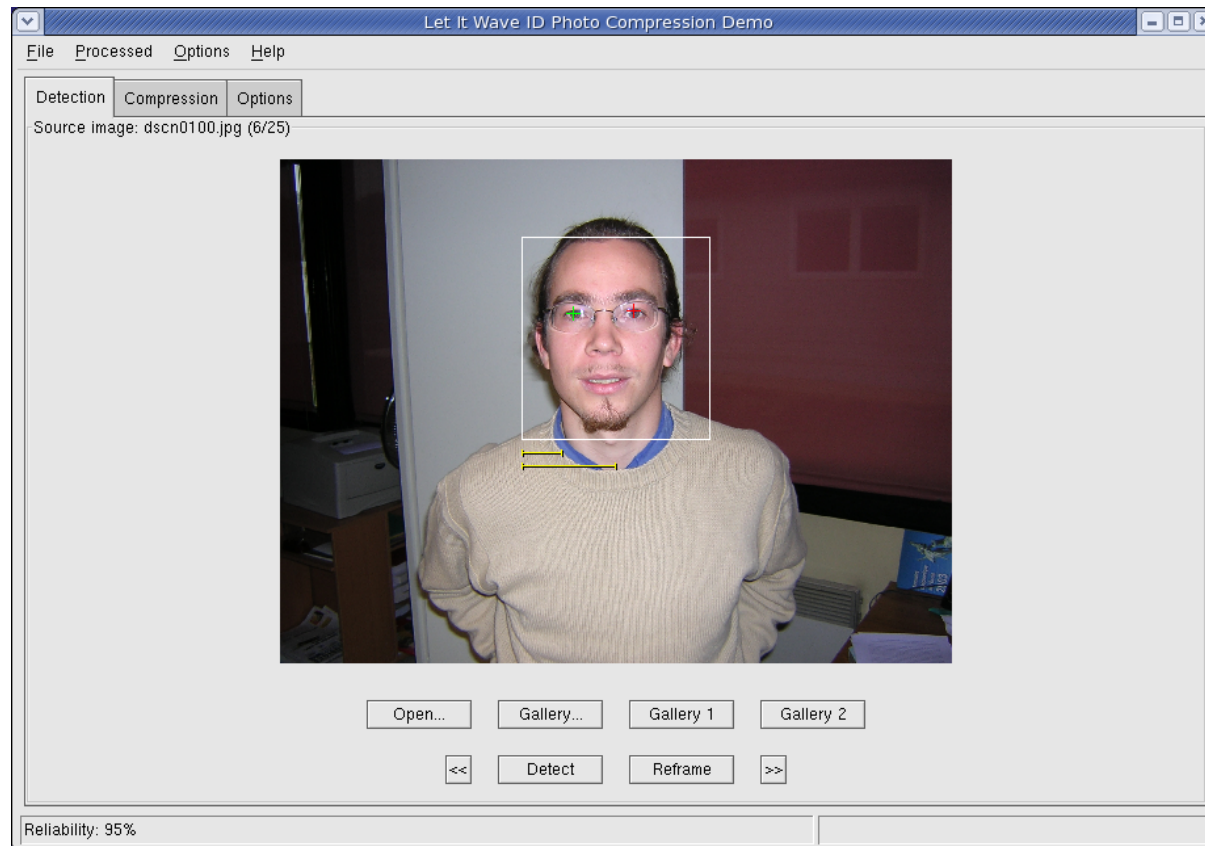
LIW ID Photo Codec

- Produit commercialisé et développé dans le cadre d'une entreprise (LIW).

LIW ID Photo Codec

- Produit commercialisé et développé dans le cadre d'une entreprise (LIW).
- Produit = solution complète \neq programme de recherche.

LIW ID Photo Codec



- Produit commercialisé et développé dans le cadre d'une entreprise (LIW).
- Produit = solution complète \neq programme de recherche.
- Interface, prise de vue, détection de visage,

LIW ID Photo Codec



- Produit commercialisé et développé dans le cadre d'une entreprise (LIW).
- Produit = solution complète \neq programme de recherche.
- Interface, prise de vue, détection de visage, recadrage, compression, post-traitement,...

Conclusion

Conclusion

- Survol de la compression d'image.

Conclusion

- Survol de la compression d'image.
- Fondations mathématiques.

Conclusion

- Survol de la compression d'image.
- Fondations mathématiques.
- Importance de la géométrie et des modèles.

Conclusion

- Survol de la compression d'image.
- Fondations mathématiques.
- Importance de la géométrie et des modèles.
- Importance des mathématiques dans l'informatique.

Conclusion

- Survol de la compression d'image.
- Fondations mathématiques.
- Importance de la géométrie et des modèles.
- Importance des mathématiques dans l'informatique.
- Plus d'infos :
 - `lepennecc@math.jussieu.fr`
 - `http://www.math.jussieu.fr/~lepennecc`

Masters

Masters

- Traitement du signal :
 - Master 2 : Modélisation Aléatoire (Paris 7)
<http://www.master.math.univ-paris7.fr/stat/stat.php>
 - Master 2 : Mathématiques, Vision et Apprentissage (ENS Cachan)
<http://www.cmla.ens-cachan.fr/Cmla/DeaMVA/>

Masters

- Traitement du signal :
 - Master 2 : Modélisation Aléatoire (Paris 7)
<http://www.master.math.univ-paris7.fr/stat/stat.php>
 - Master 2 : Mathématiques, Vision et Apprentissage (ENS Cachan)
<http://www.cmla.ens-cachan.fr/Cmla/DeaMVA/>
- Débouchés :
 - Académiques,
 - Industriels...