

Le format de compression d'image JPEG ou comment les mathématiques servent (parfois) à quelque chose!

E. LE PENNEC

Lycée P. Langevin – LPMA (Paris 7) – LIW

14 octobre 2005

Erwan Le Pennec

Erwan Le Pennec



Erwan Le Pennec



- Bac C – Lycée P. Langevin (93).

Erwan Le Pennec



- Bac C – Lycée P. Langevin (93).
- ENS Cachan (95).

Erwan Le Pennec



- Bac C – Lycée P. Langevin (93).
- ENS Cachan (95).
- Licence et Maîtrise de Math (96).

Erwan Le Pennec



- Bac C – Lycée P. Langevin (93).
- ENS Cachan (95).
- Licence et Maîtrise de Math (96).
- DEA : Mathématiques et Intelligence Artificielle (97).

Erwan Le Pennec



- Bac C – Lycée P. Langevin (93).
- ENS Cachan (95).
- Licence et Maîtrise de Math (96).
- DEA : Mathématiques et Intelligence Artificielle (97).
- Agrégation de Math (97).

Erwan Le Pennec



- Bac C – Lycée P. Langevin (93).
- ENS Cachan (95).
- Licence et Maîtrise de Math (96).
- DEA : Mathématiques et Intelligence Artificielle (97).
- Agrégation de Math (97).
- Doctorat : Bandelettes et représentation géométrique des images (98–02).

Erwan Le Pennec



- Bac C – Lycée P. Langevin (93).
- ENS Cachan (95).
- Licence et Maîtrise de Math (96).
- DEA : Mathématiques et Intelligence Artificielle (97).
- Agrégation de Math (97).
- Doctorat : Bandelettes et représentation géométrique des images (98–02).
- Let It Wave : Traitement d'image et en particulier compression d'image de visage (02–04).

Erwan Le Pennec



- Bac C – Lycée P. Langevin (93).
- ENS Cachan (95).
- Licence et Maîtrise de Math (96).
- DEA : Mathématiques et Intelligence Artificielle (97).
- Agrégation de Math (97).
- Doctorat : Bandelettes et représentation géométrique des images (98–02).
- Let It Wave : Traitement d'image et en particulier compression d'image de visage (02–04).
- Maître de Conférence – Paris 7 – LPMA, équipe de statistique (04–).

Compression d'image

Compression d'image



Compression d'image



→ 0110101...

Compression d'image



→ 0110101... →



Plan

Plan

- Image numérique

Plan

- Image numérique
- Compression sans perte

Plan

- Image numérique
- Compression sans perte
- Compression avec perte

Plan

- Image numérique
- Compression sans perte
- Compression avec perte
- Bases pour les images

Plan

- Image numérique
- Compression sans perte
- Compression avec perte
- Bases pour les images
- JPEG

Plan

- Image numérique
- Compression sans perte
- Compression avec perte
- Bases pour les images
- JPEG
- Et après ?

Image numérique

Image numérique



- Image définie (capturée) dans un rectangle (fonction).

Image numérique



- Image définie (capturée) dans un rectangle (fonction).
- Image numérique : version discrétisée en position (matrice, mosaïque) et en valeurs (8 bits).

Image numérique



- Image définie (capturée) dans un rectangle (fonction).
- Image numérique : version discrétisée en position (matrice, mosaïque) et en valeurs (8 bits).
- Couleur prise en compte comme 3 images (RGB) (24 bits).

Image numérique



- Image définie (capturée) dans un rectangle (fonction).
- Image numérique : version discrétisée en position (matrice, mosaïque) et en valeurs (8 bits).
- Couleur prise en compte comme 3 images (RGB) (24 bits).
- Taille mémoire importante : $1024 \times 2048 \times 24 = 6 \times 2^{13}$ bits = 6 Mo

Image numérique



- Image définie (capturée) dans un rectangle (fonction).
- Image numérique : version discrétisée en position (matrice, mosaïque) et en valeurs (8 bits).
- Couleur prise en compte comme 3 images (RGB) (24 bits).
- Taille mémoire importante : $1024 \times 2048 \times 24 = 6 \times 2^{13}$ bits = 6 Mo
- Besoin de compression.

Compression d'image

Compression d'image



- Image numérique (NB) : capteur d'appareil photo,...

Compression d'image



- Image numérique (NB) : capteur d'appareil photo,...
- Version modifiée (perte d'information) : changement de résolution ou autre...

Compression d'image



→ 0110101...
←

- Image numérique (NB) : capteur d'appareil photo,...
- Version modifiée (perte d'information) : changement de résolution ou autre...
- Compression sans perte (le retour vers la version simplifiée est possible)

Compression sans perte

Compression sans perte



→ 0110101...
←

Compression sans perte



→ 0110101...
←

- Compression de type ZIP, RAR and co.

Compression sans perte



→ 0110101...
←

- Compression de type ZIP, RAR and co.
- Résumé sans perte d'information !

Compression sans perte



→ 0110101...

- Compression de type ZIP, RAR and co.
- Résumé sans perte d'information !
- Principe : utiliser la redondance, les répétitions...

Compression sans perte



→ 0110101...

- Compression de type ZIP, RAR and co.
- Résumé sans perte d'information !
- Principe : utiliser la redondance, les répétitions...
- Exemples : abréviations, symboles,...

Algorithme RLE

Algorithme RLE

- Run Length Encoding : Codage de la Longueur de la Série en Cours...

Algorithme RLE

- Run Length Encoding : Codage de la Longueur de la Série en Cours...
- Algorithme de compression le plus simple.

Algorithme RLE

0 – 0 – 0 – 1 – 1 – 1 – 1 – 1 – 0 – 0 – 0 – 0 – 2 – 2 – 2 – 2 – 128 – 128 – 128

- Run Length Encoding : Codage de la Longueur de la Série en Cours...
- Algorithme de compression le plus simple.
- Utilisation de la répétition (assez rare dans la vraie vie).

Algorithme RLE

0 – 0 – 0 – 1 – 1 – 1 – 1 – 1 – 0 – 0 – 0 – 0 – 2 – 2 – 2 – 2 – 128 – 128 – 128

↓

(0, 3) – (1, 5) – (0, 4) – (2, 4) – (128, 3)

- Run Length Encoding : Codage de la Longueur de la Série en Cours...
- Algorithme de compression le plus simple.
- Utilisation de la répétition (assez rare dans la vraie vie).
- Remplacer une suite de valeur identique par un symbole suivi de la valeur et du nombre de fois où elle apparaît.

Compression par dictionnaire

Compression par dictionnaire

0 - 0 - 0 - 1 - 1 - 1 - 1 - 1 - 0 - 0 - 0 - 0 - 2 - 2 - 2 - 2 - 128 - 128 - 128
↓
(1) - 0 - (2) - 1 - (3) - (4) - (5) - 128

- Remplacement d'une suite de symboles par son numéro dans un dictionnaire.

Compression par dictionnaire

0 - 0 - 0 - 1 - 1 - 1 - 1 - 1 - 0 - 0 - 0 - 0 - 2 - 2 - 2 - 2 - 128 - 128 - 128

↓

(1) - 0 - (2) - 1 - (3) - (4) - (5) - 128

avec

(1) = 0 - 0, (2) = 1 - 1 - 1 - 1, (3) = 0 - 0 - 0 - 0,

(4) = 2 - 2 - 2 - 2, (5) = 128 - 128

- Remplacement d'une suite de symboles par son numéro dans un dictionnaire.
- Difficulté : avoir le même dictionnaire au codage et au décodage.

Compression par dictionnaire

0 - 0 - 0 - 1 - 1 - 1 - 1 - 1 - 0 - 0 - 0 - 0 - 2 - 2 - 2 - 2 - 128 - 128 - 128

↓

(1) - 0 - (2) - 1 - (3) - (4) - (5) - 128

avec

(1) = 0 - 0, (2) = 1 - 1 - 1 - 1, (3) = 0 - 0 - 0 - 0,

(4) = 2 - 2 - 2 - 2, (5) = 128 - 128

- Remplacement d'une suite de symboles par son numéro dans un dictionnaire.
- Difficulté : avoir le même dictionnaire au codage et au décodage.
- Construction d'un dictionnaire avec le train binaire déjà lu : pas besoin de transmettre ce dictionnaire !

Compression par dictionnaire

0 - 0 - 0 - 1 - 1 - 1 - 1 - 1 - 0 - 0 - 0 - 0 - 2 - 2 - 2 - 2 - 128 - 128 - 128

↓

(1) - 0 - (2) - 1 - (3) - (4) - (5) - 128

avec

(1) = 0 - 0, (2) = 1 - 1 - 1 - 1, (3) = 0 - 0 - 0 - 0,

(4) = 2 - 2 - 2 - 2, (5) = 128 - 128

- Remplacement d'une suite de symboles par son numéro dans un dictionnaire.
- Difficulté : avoir le même dictionnaire au codage et au décodage.
- Construction d'un dictionnaire avec le train binaire déjà lu : pas besoin de transmettre ce dictionnaire !
- LZ77, LZW, ZIP, RAR...

Compression entropique

Compression entropique

- Langue : concept fréquent = mot court.

Compression entropique

- Langue : concept fréquent = mot court.
- Théorie de l'information (Statistique) : valeur fréquente = code court.

Compression entropique

- Langue : concept fréquent = mot court.
- Théorie de l'information (Statistique) : valeur fréquente = code court.
- Mesure de la fréquence : probabilités.

$$p_i = \frac{\text{Nb apparitions de la valeur } i}{\text{Nb total}}$$

Compression entropique

- Langue : concept fréquent = mot court.
- Théorie de l'information (Statistique) : valeur fréquente = code court.
- Mesure de la fréquence : probabilités.

$$p_i = \frac{\text{Nb apparitions de la valeur } i}{\text{Nb total}}$$

- Longueur du message :

$$\text{Nb total} \times \left(\sum_i p_i \times \text{longueur du code pour } i \right)$$

Compression entropique

- Langue : concept fréquent = mot court.
- Théorie de l'information (Statistique) : valeur fréquente = code court.
- Mesure de la fréquence : probabilités.

$$p_i = \frac{\text{Nb apparitions de la valeur } i}{\text{Nb total}}$$

- Longueur du message :

$$\text{Nb total} \times \left(\sum_i p_i \times \text{longueur du code pour } i \right)$$

- Choix de $l_i = \text{longueur du code pour } i$?

Compression entropique

- Langue : concept fréquent = mot court.
- Théorie de l'information (Statistique) : valeur fréquente = code court.
- Mesure de la fréquence : probabilités.

$$p_i = \frac{\text{Nb apparitions de la valeur } i}{\text{Nb total}}$$

- Longueur du message :

$$\text{Nb total} \times \left(\sum_i p_i \times \text{longueur du code pour } i \right)$$

- Choix de $l_i =$ longueur du code pour i ?
- Longueur optimale :

$$l_i = -\log_2(p_i)$$

Compression entropique

- Langue : concept fréquent = mot court.
- Théorie de l'information (Statistique) : valeur fréquente = code court.
- Mesure de la fréquence : probabilités.

$$p_i = \frac{\text{Nb apparitions de la valeur } i}{\text{Nb total}}$$

- Longueur du message :

$$\text{Nb total} \times \left(\sum_i p_i \times \text{longueur du code pour } i \right)$$

- Choix de $l_i =$ longueur du code pour i ?
- Longueur optimale :

$$l_i = -\log_2(p_i)$$

- Existence d'algorithmes : LZ (dictionnaire), Huffman (arbre), Arithmétique (intervalle).

GIF

GIF



\Rightarrow 0 – 116 – 128 – 255 – ...
 \Leftarrow

- Liste de la valeur des pixels.

GIF



$\begin{matrix} \rightarrow \\ \leftarrow \end{matrix} 0 - 116 - 128 - 255 - \dots \begin{matrix} \rightarrow \\ \leftarrow \end{matrix} 0110101\dots$

- Liste de la valeur des pixels.
- Compression sans perte par un codage entropique (ZIP).

GIF



\Rightarrow 0 – 116 – 128 – 255 – ... \Leftarrow 0110101...

- Liste de la valeur des pixels.
- Compression sans perte par un codage entropique (ZIP).
- Efficace mais limité à des facteurs de compression de 2-3 maximum pour les images naturelles.

Compression avec perte

Compression avec perte



⇒ 0110101...01...
⇐

- Pour améliorer le taux de compression, il faut perdre de l'information !

Compression avec perte



0110101...

- Pour améliorer le taux de compression, il faut perdre de l'information !
- Exemples (facteur 16 de compression) :
 - changement de résolution,

Compression avec perte



→ 0110101...

- Pour améliorer le taux de compression, il faut perdre de l'information !
- Exemples (facteur 16 de compression) :
 - changement de résolution,
 - nombre de couleurs utilisées,

Compression avec perte



→ 0110101...

- Pour améliorer le taux de compression, il faut perdre de l'information !
- Exemples (facteur 16 de compression) :
 - changement de résolution,
 - nombre de couleurs utilisées,
 - facteur de qualité (JPEG)

Compression avec perte



⇔ 0110101...

- Pour améliorer le taux de compression, il faut perdre de l'information !
- Exemples (facteur 16 de compression) :
 - changement de résolution,
 - nombre de couleurs utilisées,
 - facteur de qualité (JPEG)
- Comment ça marche JPEG ?

Bases...

Bases...

- Un peu de math !

Bases...

$$128 = 1 \times 100 + 2 \times 10 + 8 \times 1$$

- Un peu de math !
- Base pour les nombres.

Bases...

$$\begin{aligned} 128 &= 1 \times 100 + 2 \times 10 + 8 \times 1 \\ \vec{V} = (1, 2, 8) &= 1\vec{x} + 2\vec{y} + 8\vec{z} \end{aligned}$$

- Un peu de math !
- Base pour les nombres.
- Base pour les vecteurs.

Bases...

$$\begin{aligned} 128 &= 1 \times 100 + 2 \times 10 + 8 \times 1 \\ \vec{V} = (1, 2, 8) &= 1\vec{x} + 2\vec{y} + 8\vec{z} \\ P(X) = 1 + 2X + 8X^2 &= 1X^0 + 2X + 8X^2 (+ \dots) \end{aligned}$$

- Un peu de math !
- Base pour les nombres.
- Base pour les vecteurs.
- Base pour les polynômes.

Bases...

$$\begin{aligned} 128 &= 1 \times 100 + 2 \times 10 + 8 \times 1 \\ \vec{V} = (1, 2, 8) &= 1\vec{x} + 2\vec{y} + 8\vec{z} \\ P(X) = 1 + 2X + 8X^2 &= 1X^0 + 2X + 8X^2 (+ \dots) \\ f(x) &= 1f_1(x) + 2f_2(x) + 8f_3(x) (+ \dots) \end{aligned}$$

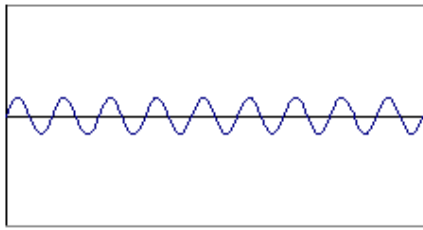
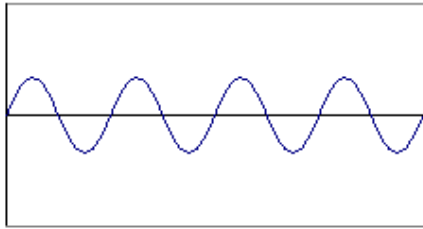
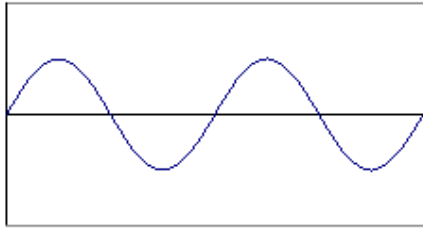
- Un peu de math !
- Base pour les nombres.
- Base pour les vecteurs.
- Base pour les polynômes.
- Base pour les fonctions !!!

Base de Fourier

Base de Fourier

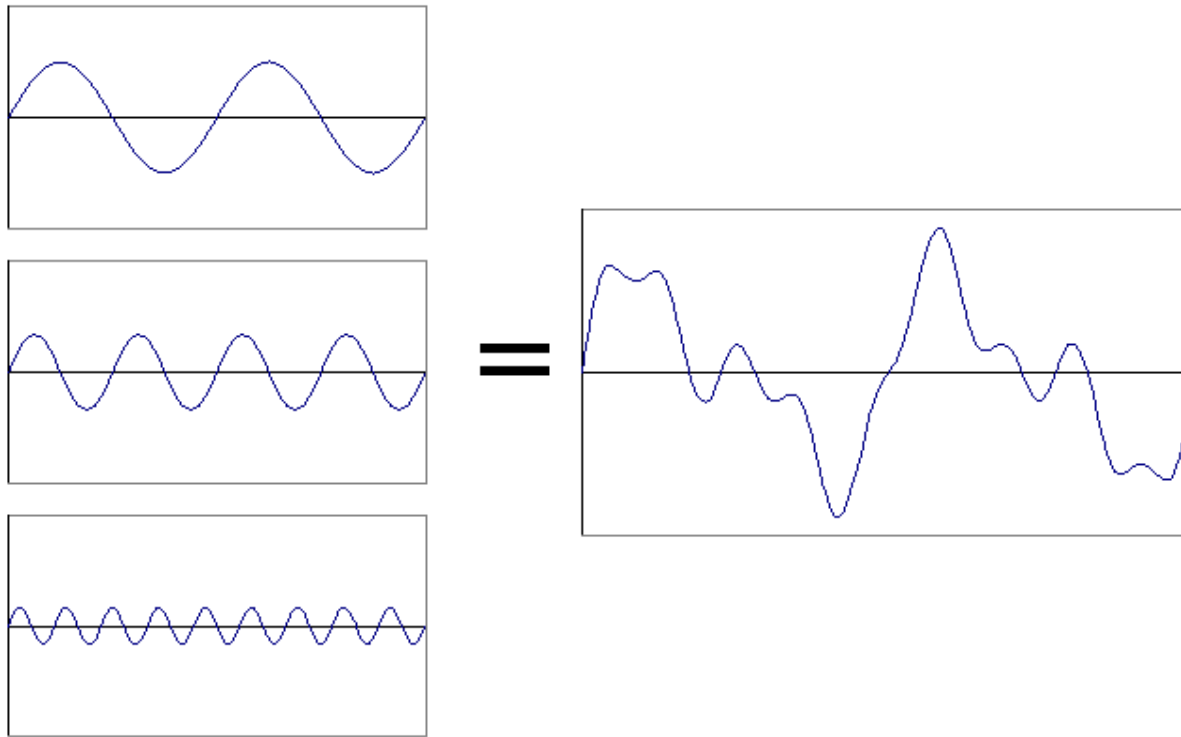
- Joseph Fourier (1807) : La propagation de la chaleur dans les solides.

Base de Fourier



- Joseph Fourier (1807) : La propagation de la chaleur dans les solides.
- Décomposition des fonctions sur l'intervalle $[0, 1]$ dans une base de cosinus et sinus.

Base de Fourier



● Joseph Fourier (1807) : La propagation de la chaleur dans les solides.

● Décomposition des fonctions sur l'intervalle $[0, 1]$ dans une base de cosinus et sinus.

● Toute fonction sur l'intervalle s'écrit comme somme de sinusoides :

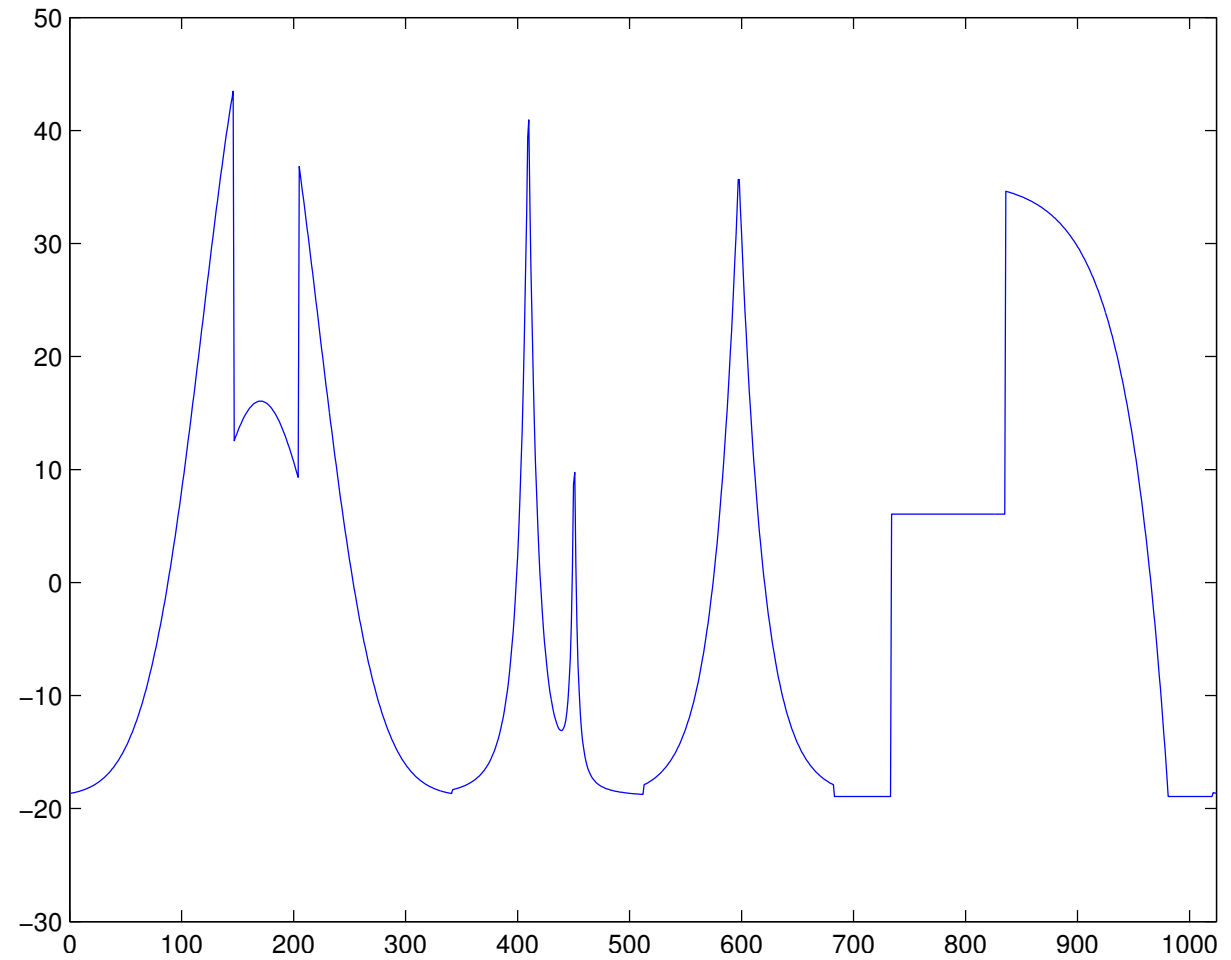
$$f(x) = c_0 + c_1 \cos(2\pi \times x) + s_1 \cos(2\pi \times x) + c_2 \cos(2 \times 2\pi \times x) \\ + s_2 \sin(2 \times 2\pi \times x) + c_3 \cos(3 \times 2\pi \times x) + s_3 \sin(3 \times 2\pi \times x) + \dots$$

Exemple

Exemple

Nb de sinus

Reconstruction

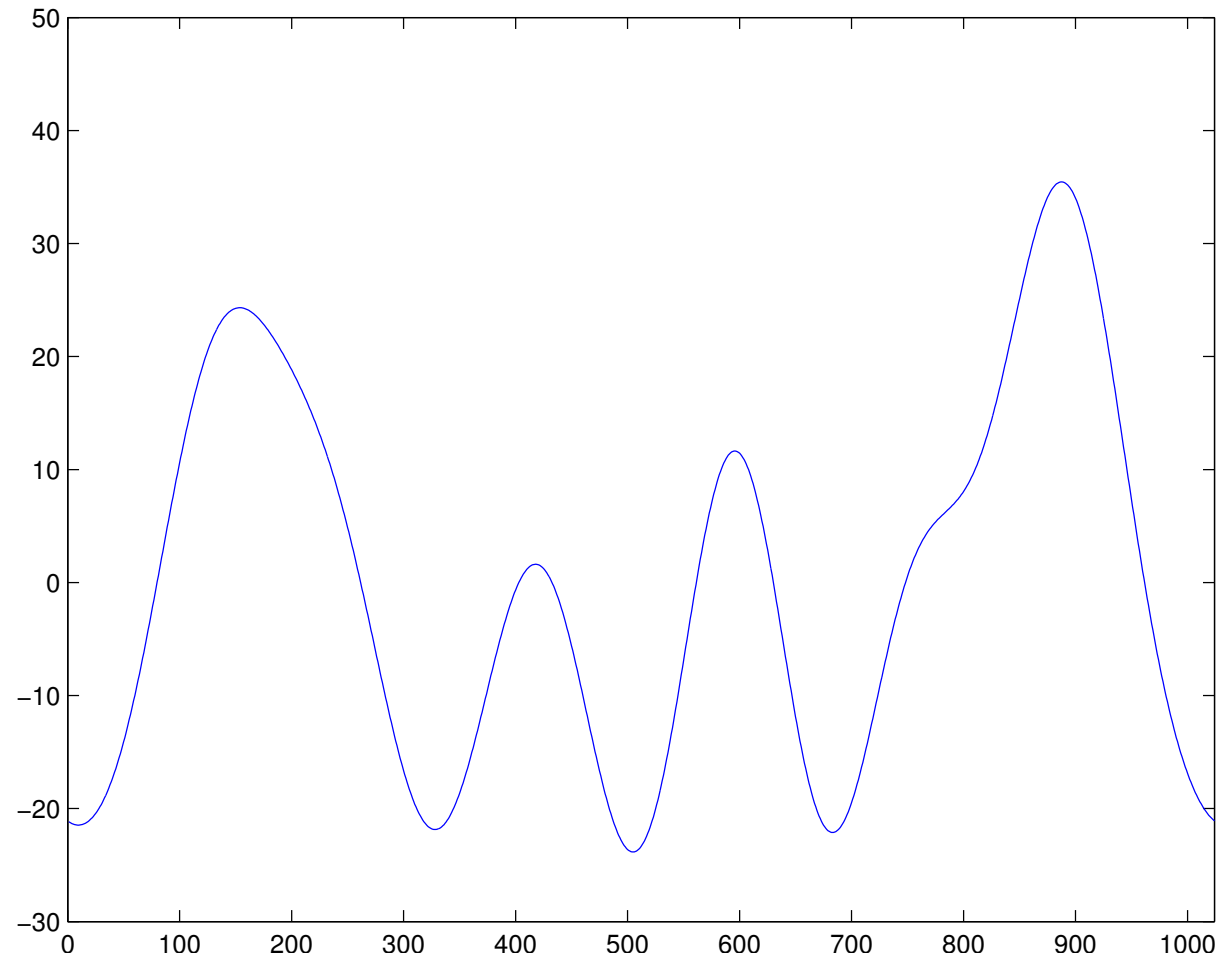


Exemple

Nb de sinus

Reconstruction

16

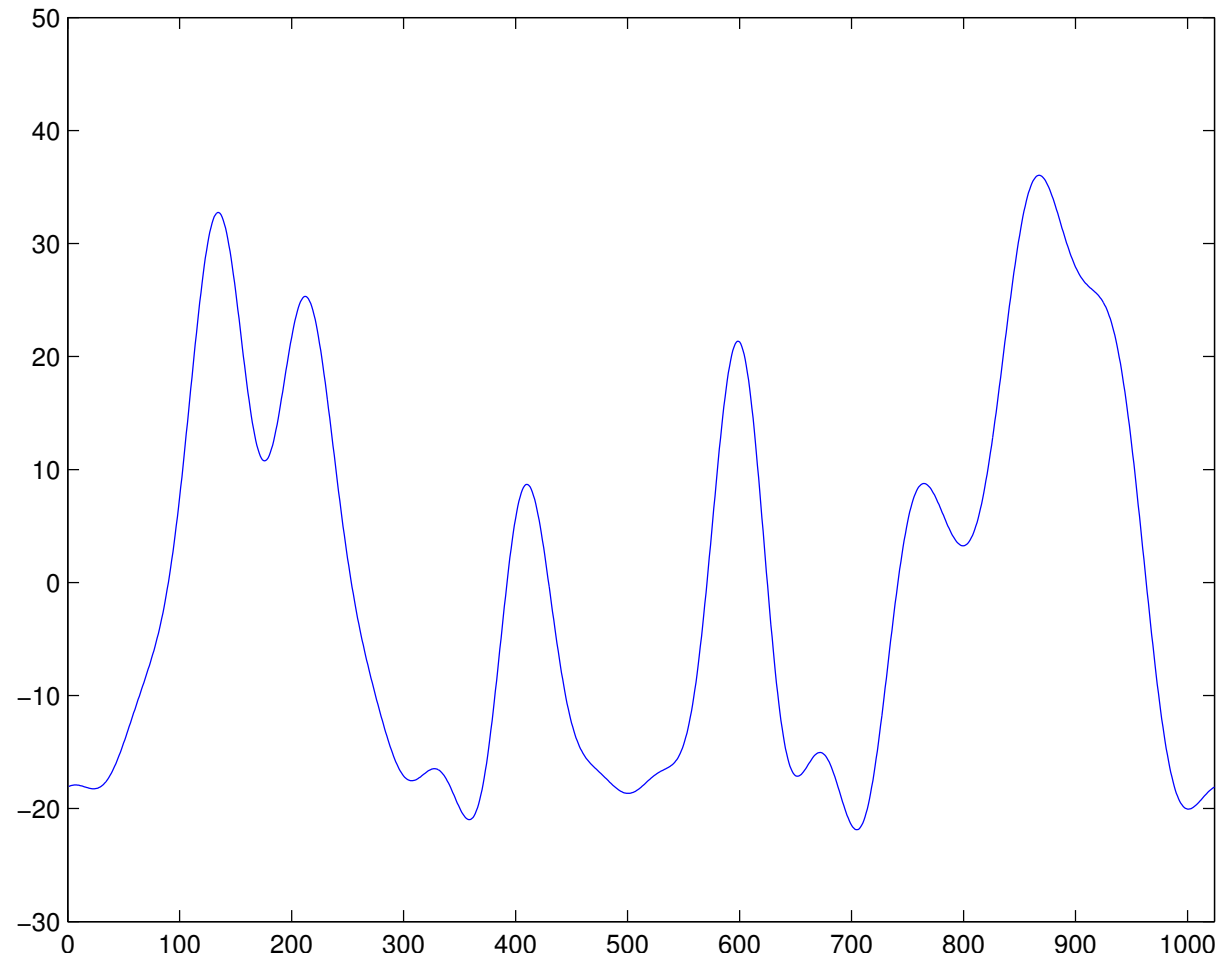


Exemple

Nb de sinus

Reconstruction

32

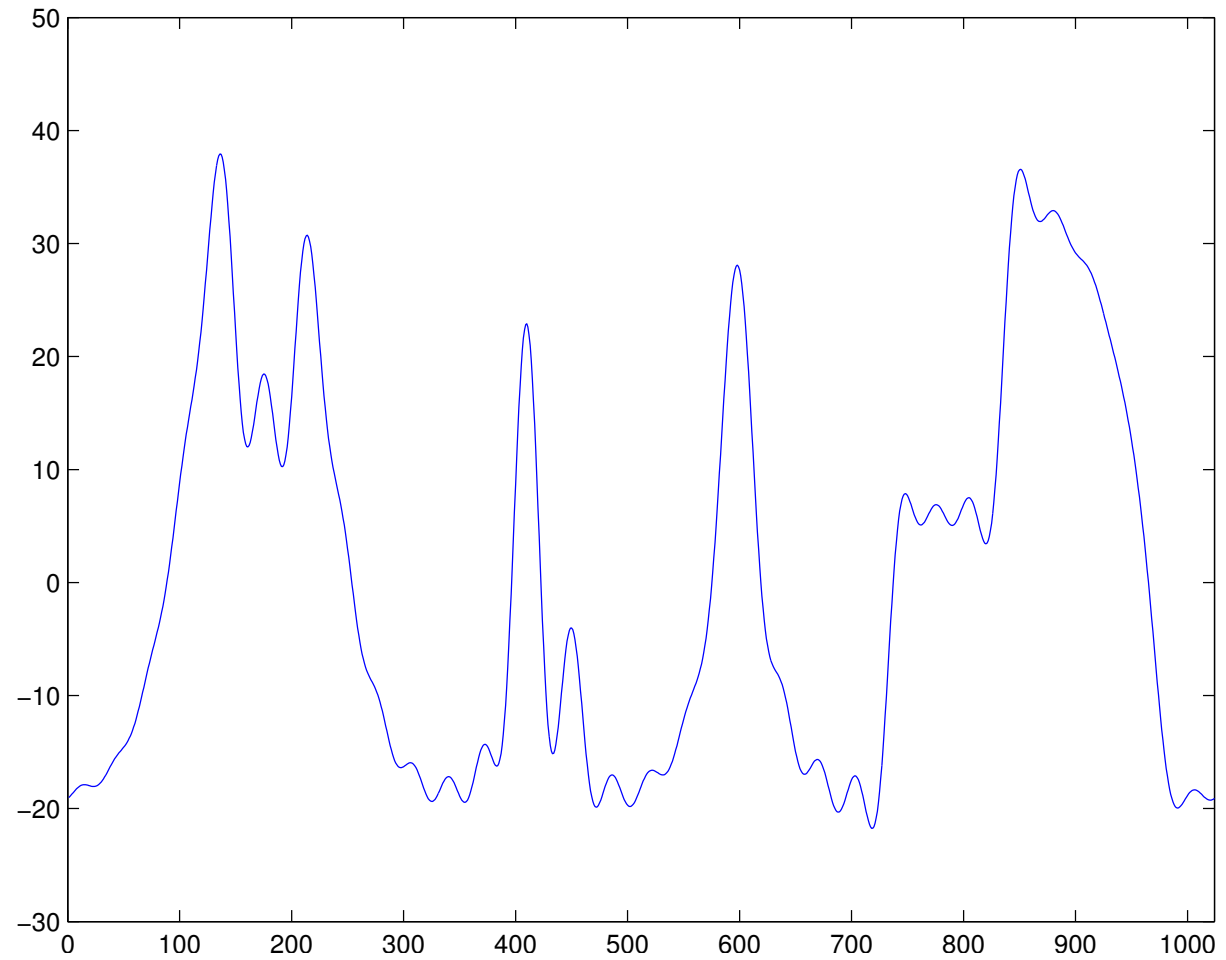


Exemple

Nb de sinus

Reconstruction

64

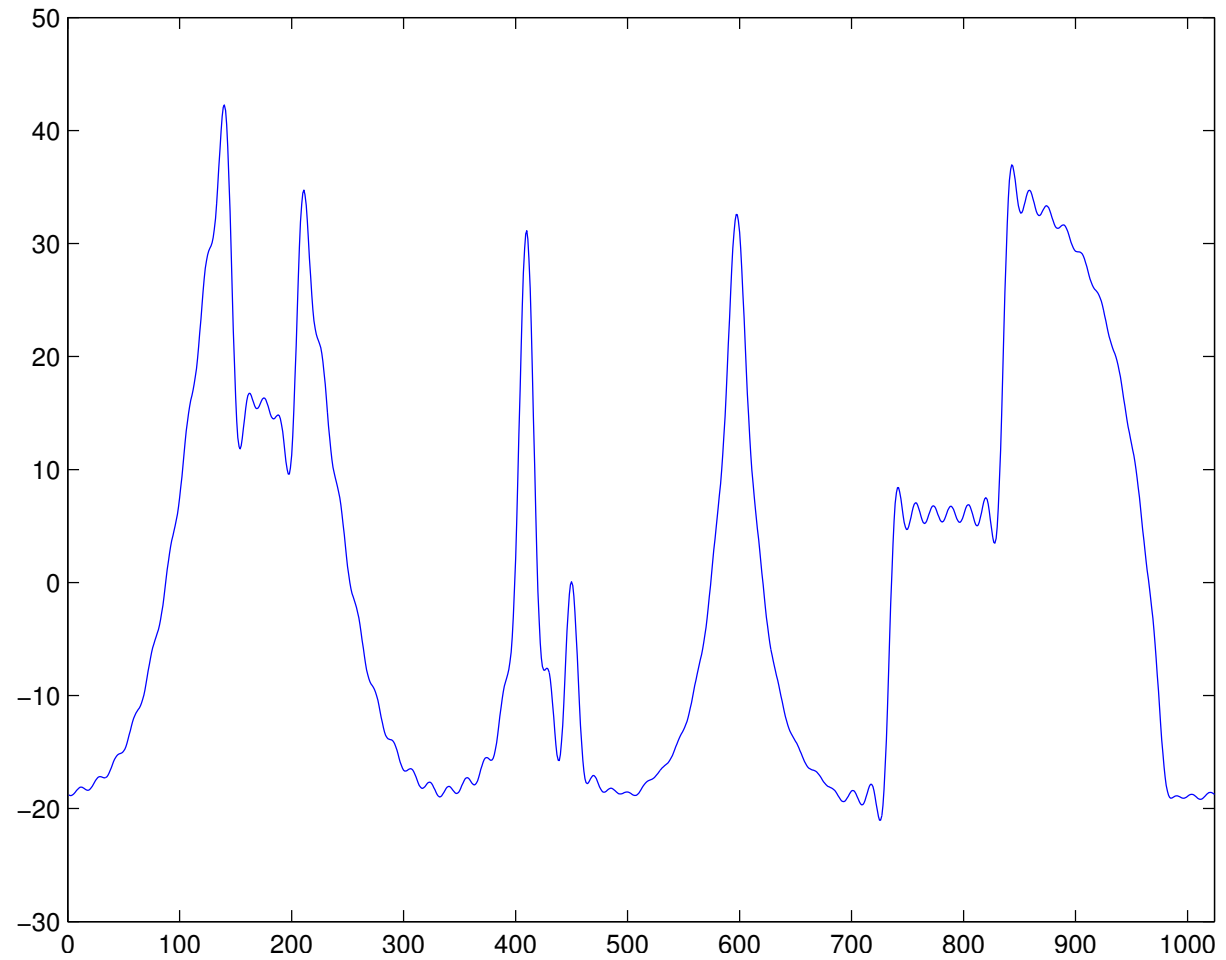


Exemple

Nb de sinus

Reconstruction

128

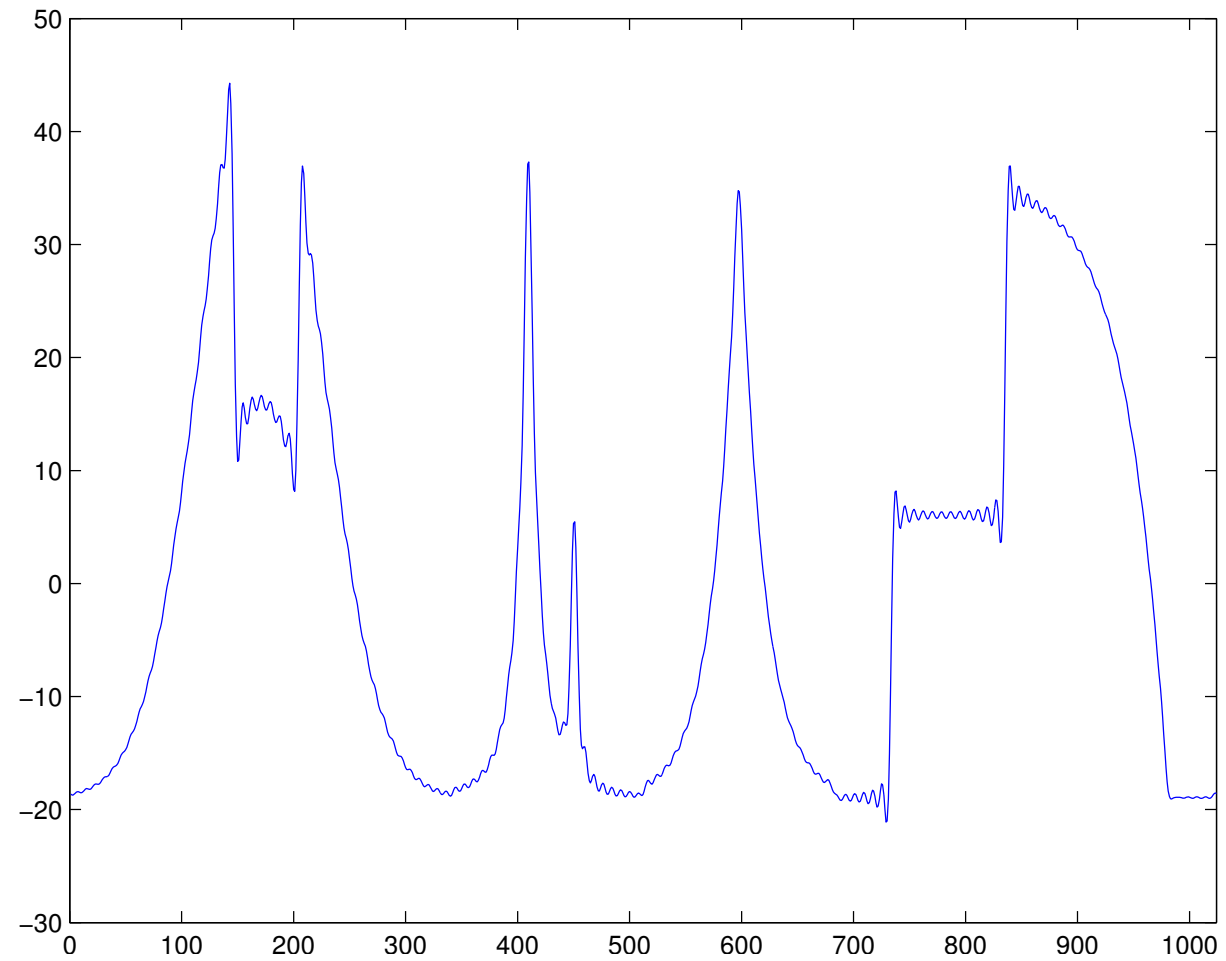


Exemple

Nb de sinus

256

Reconstruction

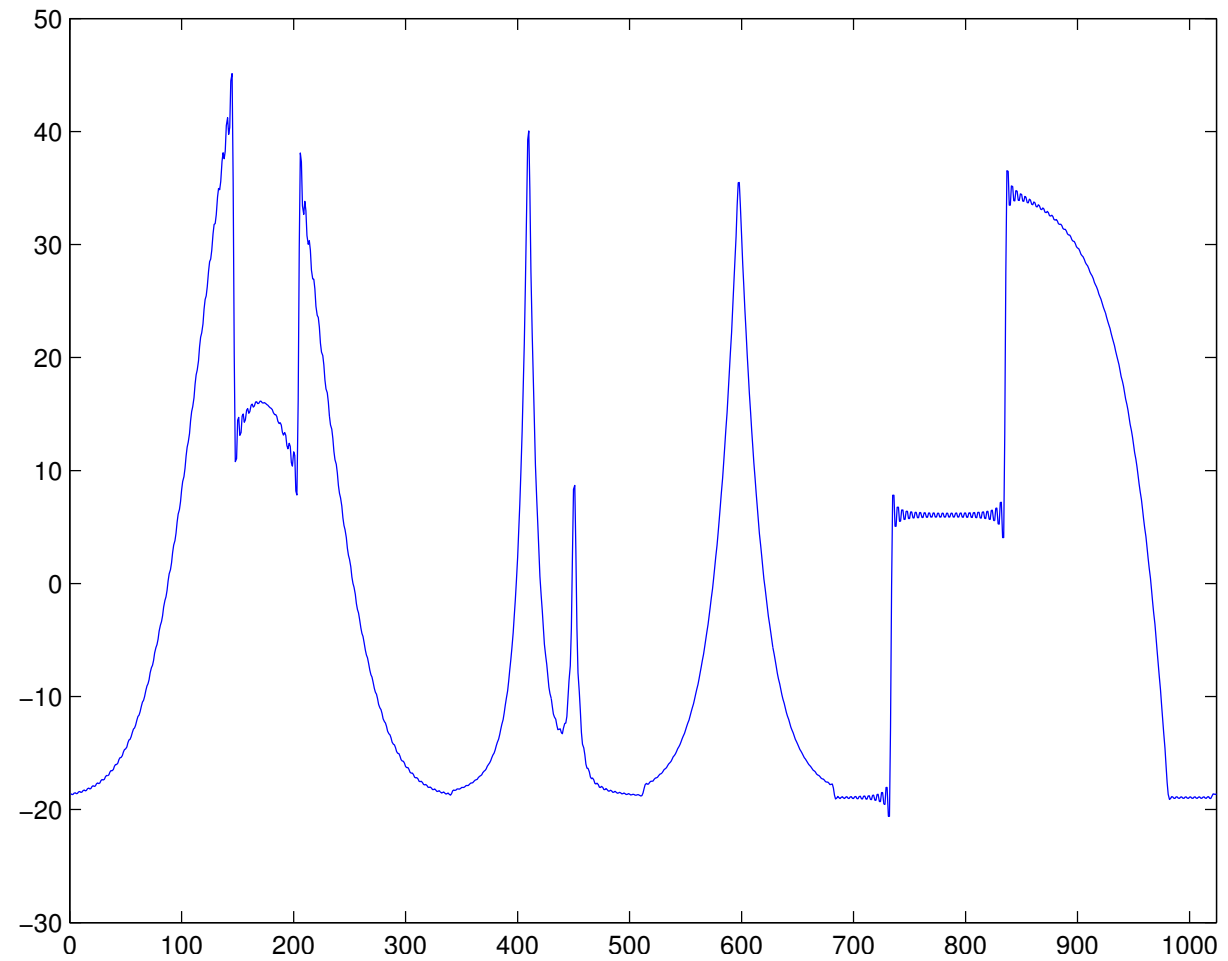


Exemple

Nb de sinus

Reconstruction

512

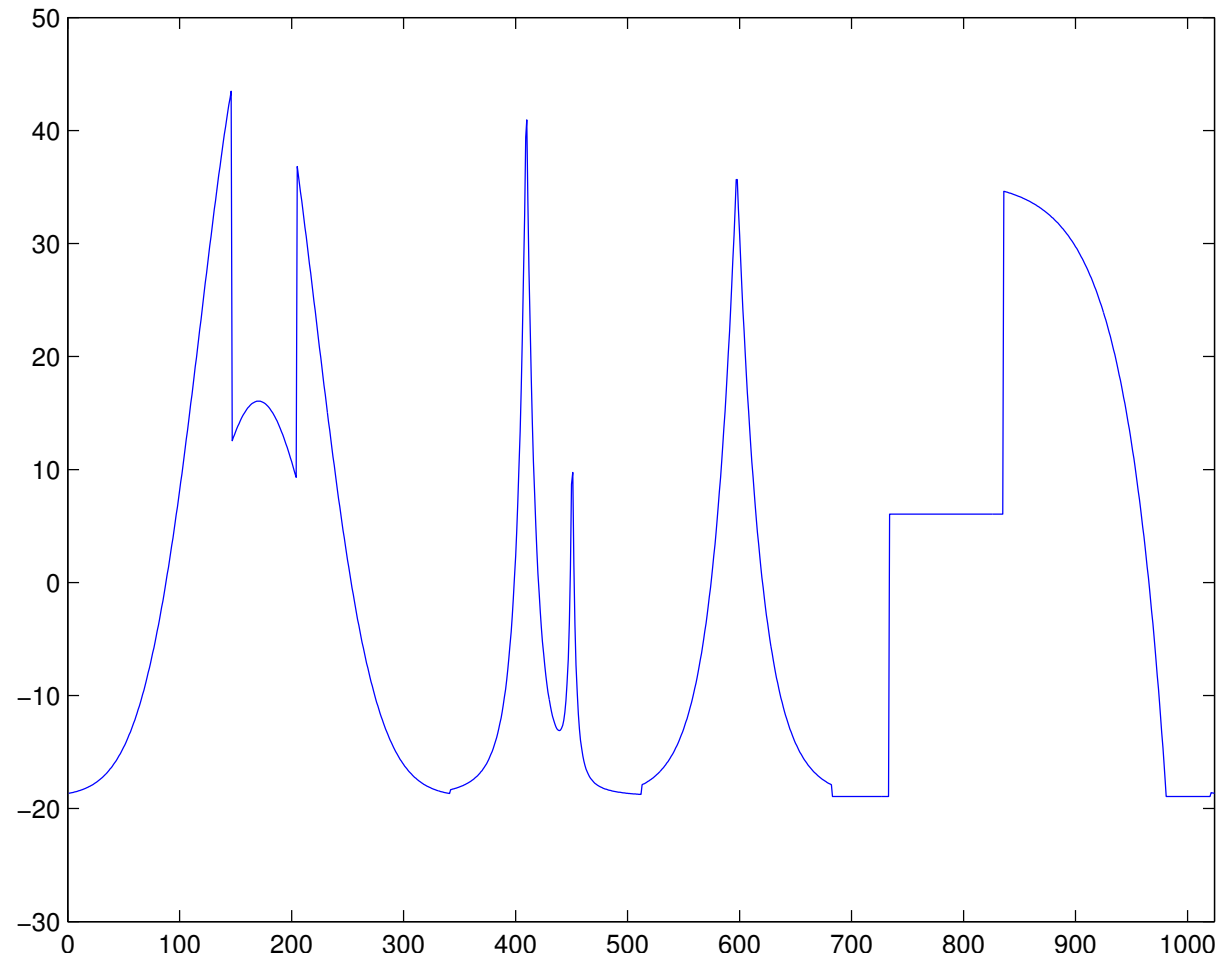


Exemple

Nb de sinus

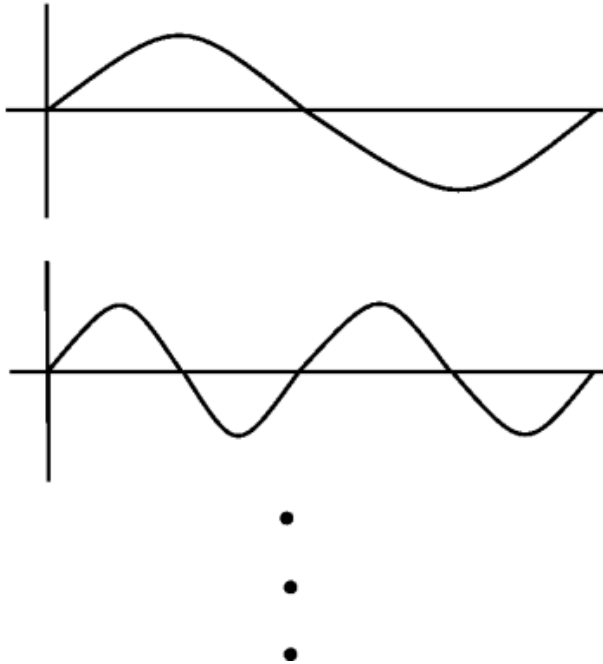
Reconstruction

1024



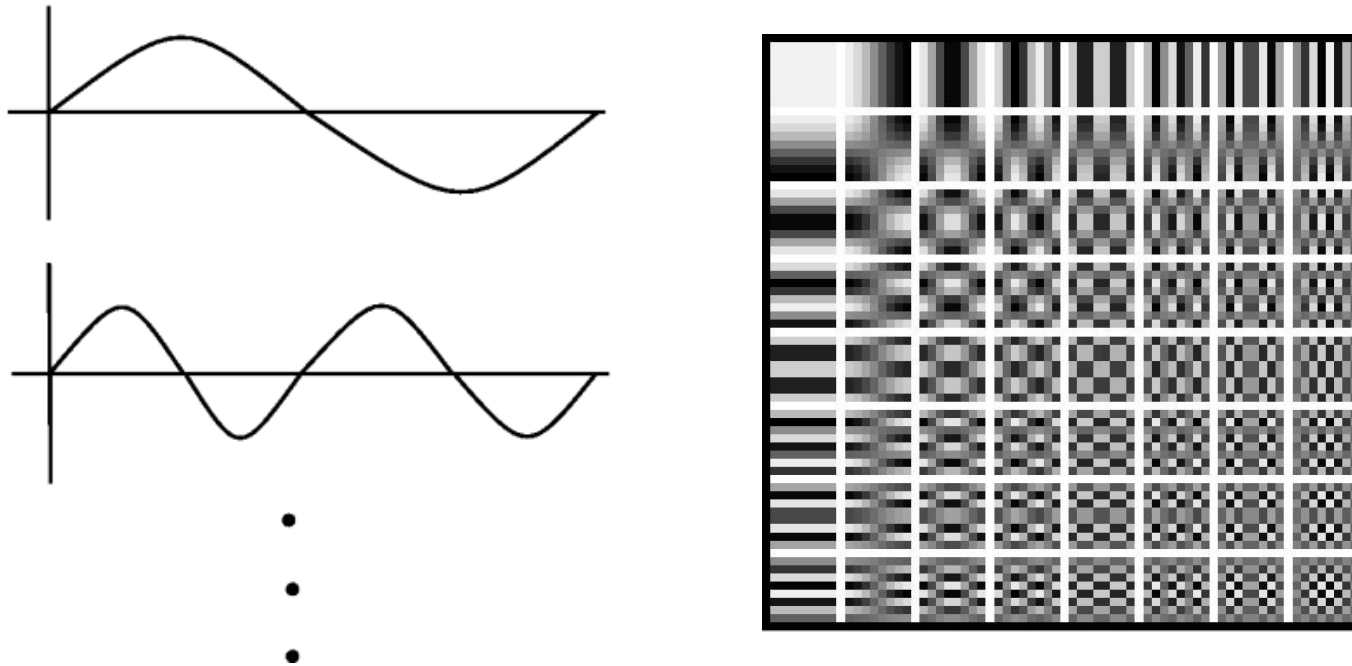
Base de Fourier 2D

Base de Fourier 2D



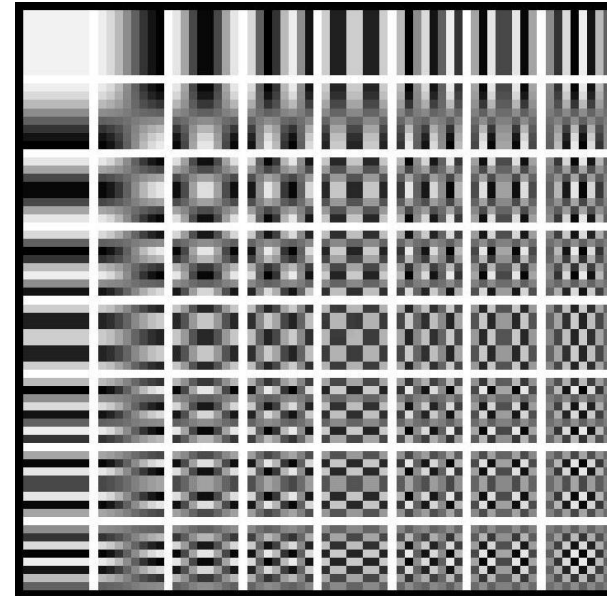
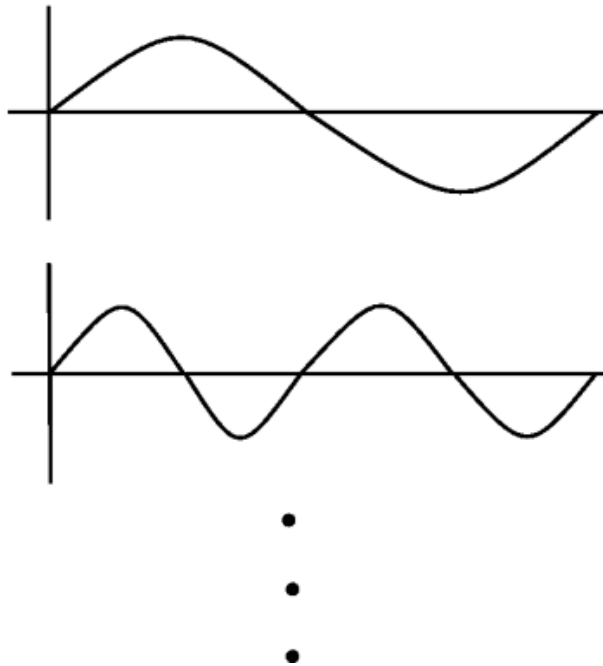
- Base de Fourier 1D : cosinus et sinus.

Base de Fourier 2D



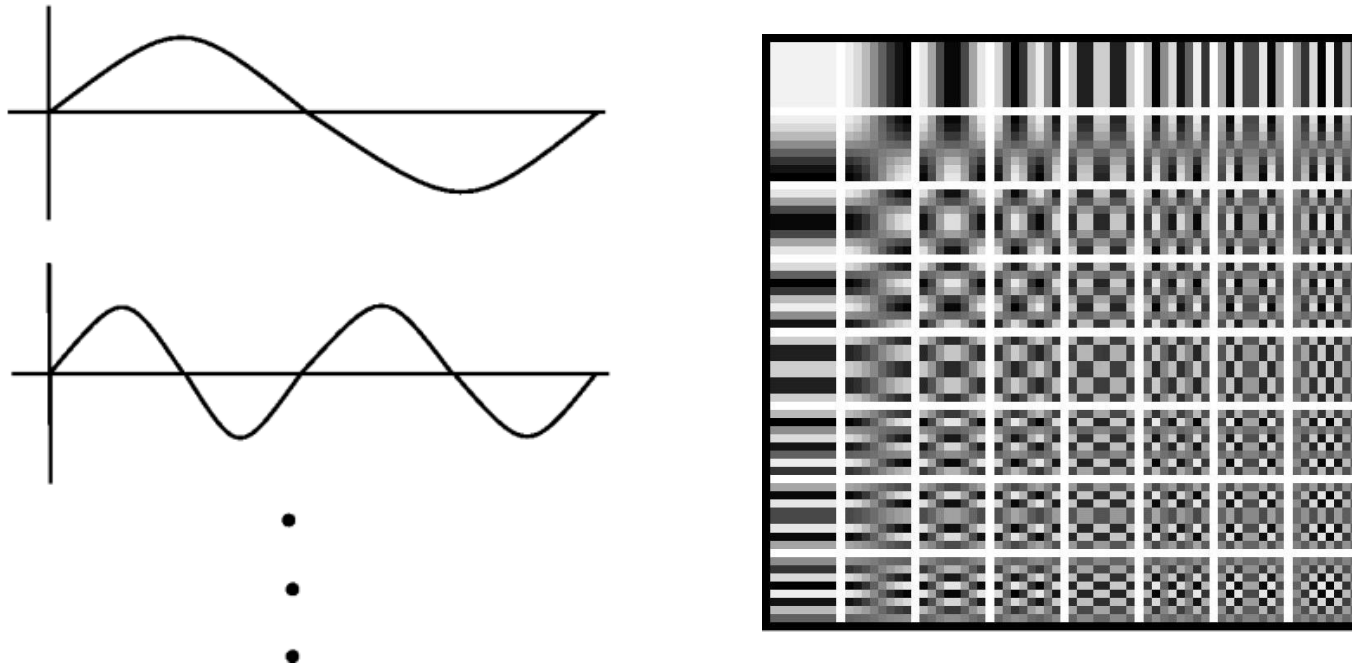
- Base de Fourier 1D : cosinus et sinus.
- Base de Fourier 2D : cosinus et sinus dans les deux directions.

Base de Fourier 2D



- Base de Fourier 1D : cosinus et sinus.
- Base de Fourier 2D : cosinus et sinus dans les deux directions.
- Base sur des carrés 8×8 DCT.

Base de Fourier 2D



- Base de Fourier 1D : cosinus et sinus.
- Base de Fourier 2D : cosinus et sinus dans les deux directions.
- Base sur des carrés 8×8 DCT.
- Base utilisée dans JPEG (Joint Picture Expert Group) en 1990.

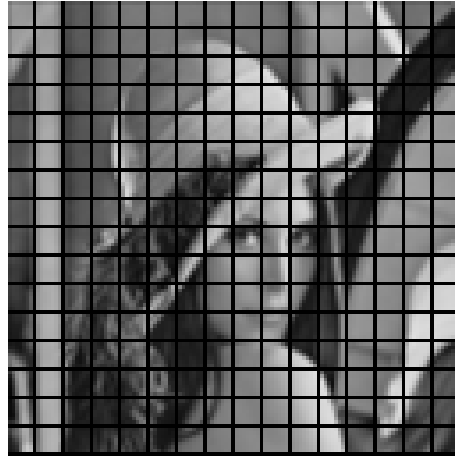
JPEG

JPEG



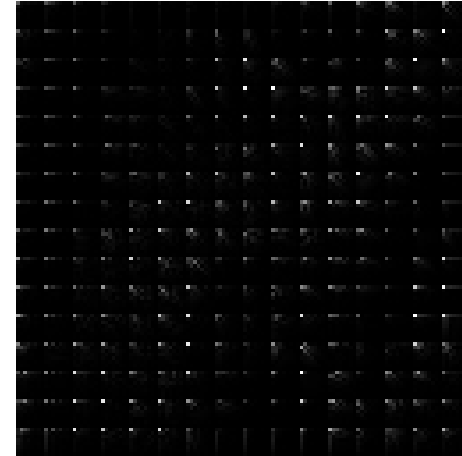
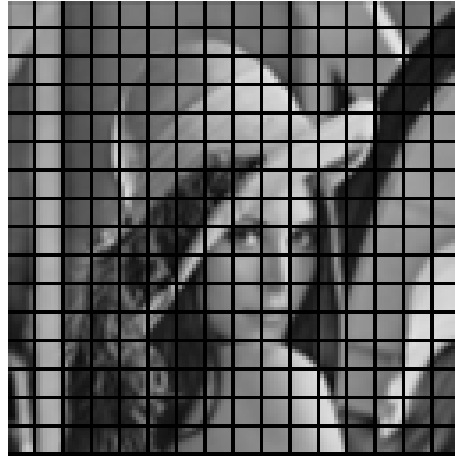
- Image initiale.

JPEG



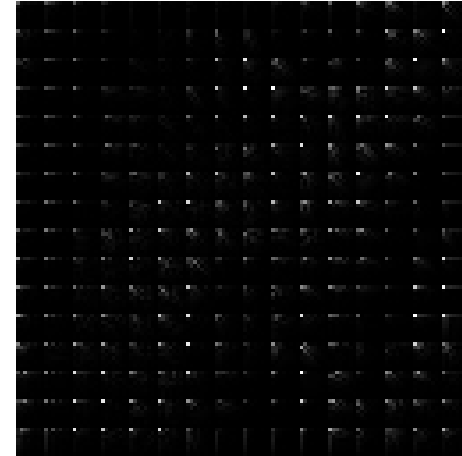
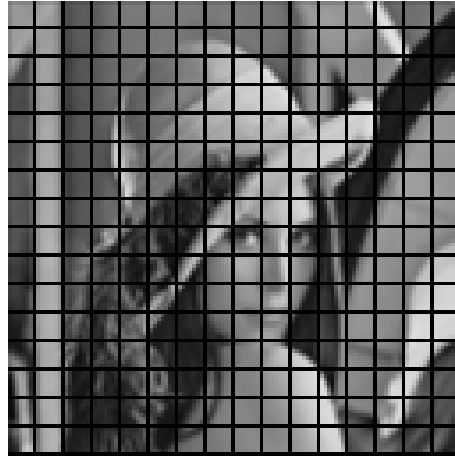
- Image initiale.
- Découpage en carré 8×8 .

JPEG



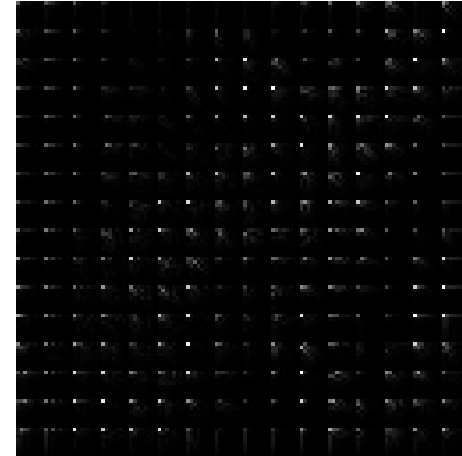
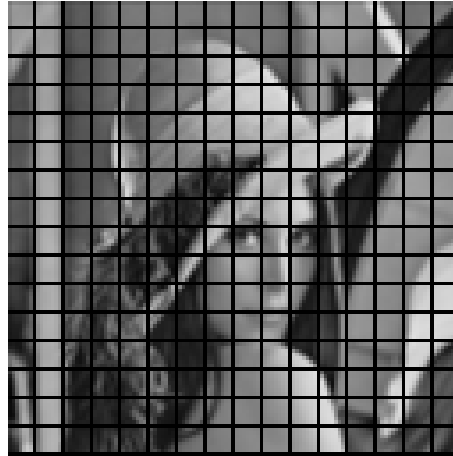
- Image initiale.
- Découpage en carré 8×8 .
- Décomposition dans la base de Fourier.

JPEG



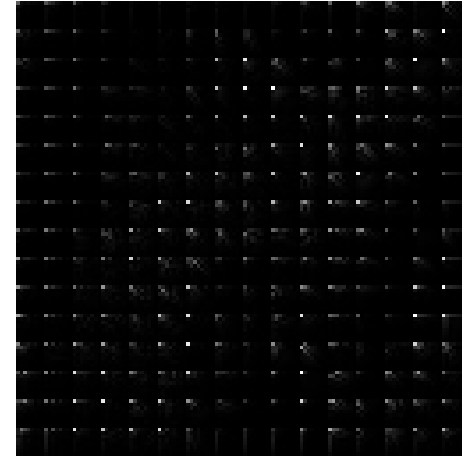
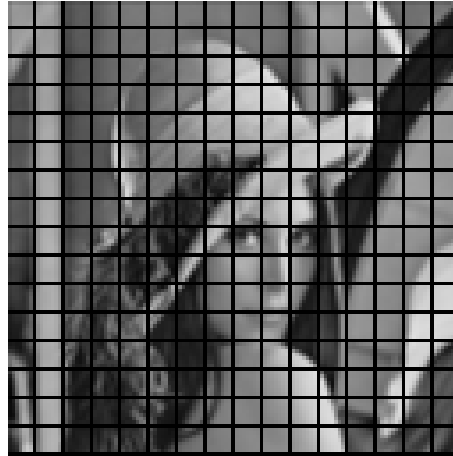
- Image initiale.
- Découpage en carré 8×8 .
- Décomposition dans la base de Fourier.
- Approximation (simplification) des coefficients (\simeq réduction du nombre de couleurs).

JPEG



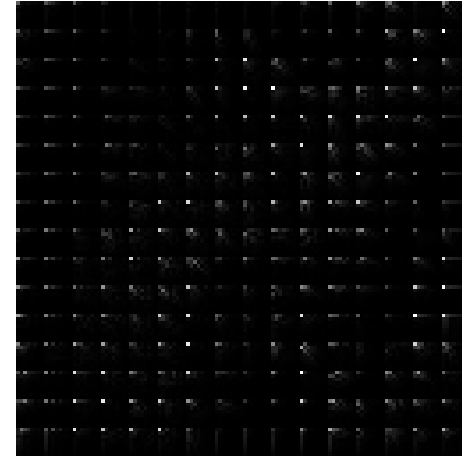
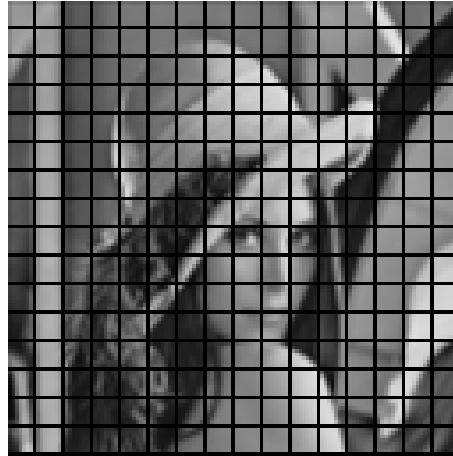
- Image initiale.
- Découpage en carré 8×8 .
- Décomposition dans la base de Fourier.
- Approximation (simplification) des coefficients (\simeq réduction du nombre de couleurs).
- Apparition de nombreux zéros (bon pour la compression) sans trop d'effet visuel.

JPEG



- Image initiale.
- Découpage en carré 8×8 .
- Décomposition dans la base de Fourier.
- Approximation (simplification) des coefficients (\simeq réduction du nombre de couleurs).
- Apparition de nombreux zéros (bon pour la compression) sans trop d'effet visuel.
- Compression sans perte (entropique/Huffman).

JPEG



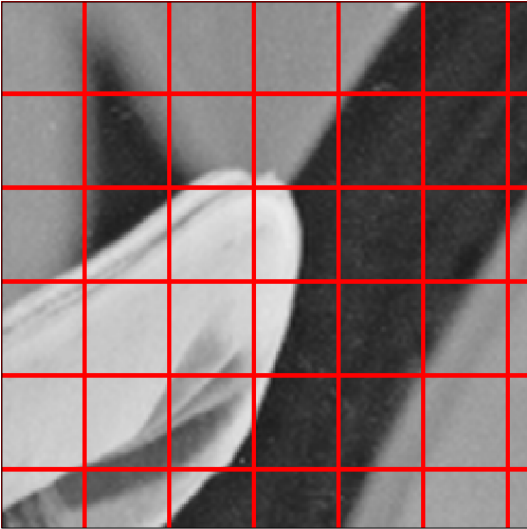
- Image initiale.
- Découpage en carré 8×8 .
- Décomposition dans la base de Fourier.
- Approximation (simplification) des coefficients (\simeq réduction du nombre de couleurs).
- Apparition de nombreux zéros (bon pour la compression) sans trop d'effet visuel.
- Compression sans perte (entropique/Huffman).
- Trop de zéros = apparitions des blocs dans les images.

Et après

Et après

- Choix de la base utilisée.

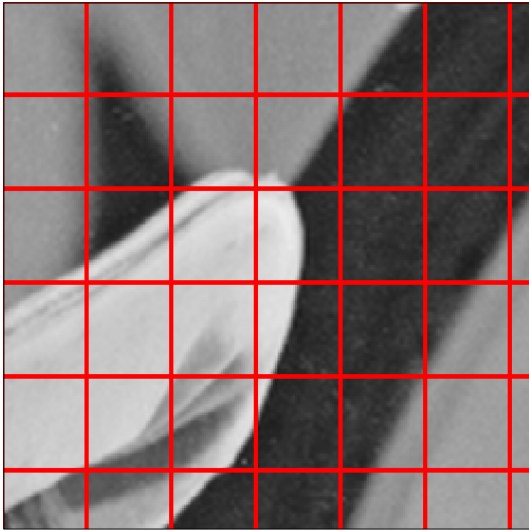
Et après



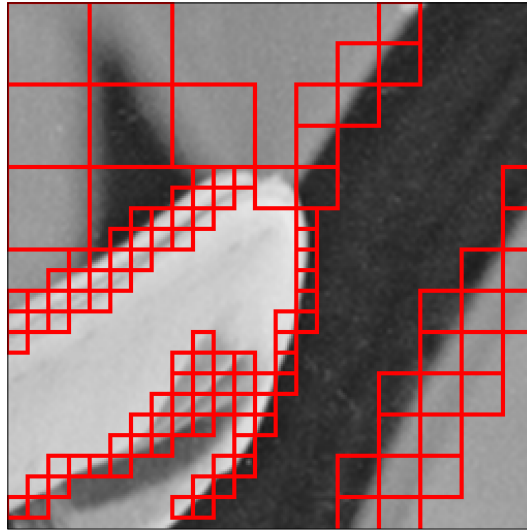
JPEG
Fourier
Base

- Choix de la base utilisée.
- 1990 – JPEG – DCT – carré de même taille.

Et après



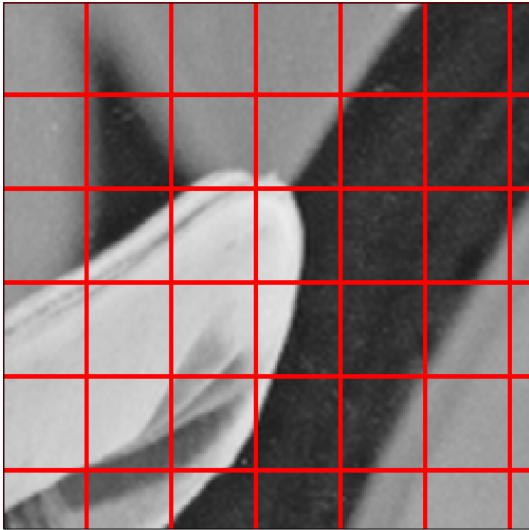
JPEG
Fourier
Base



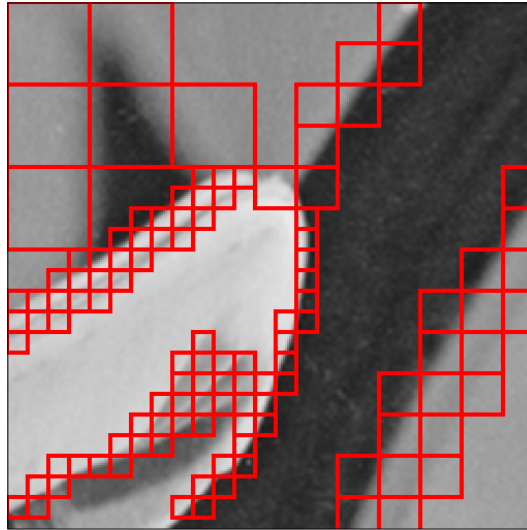
JPEG-2000
Ondelettes
Multiéchelle

- Choix de la base utilisée.
- 1990 – JPEG – DCT – carré de même taille.
- 2000 – JPEG-2000 – Ondelettes – taille adaptée à l'échelle.

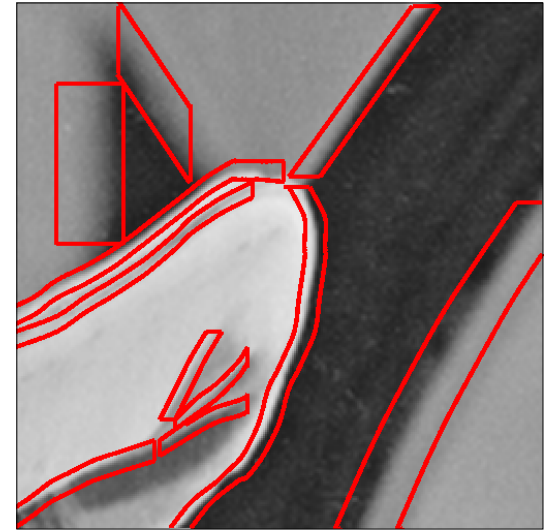
Et après



JPEG
Fourier
Base



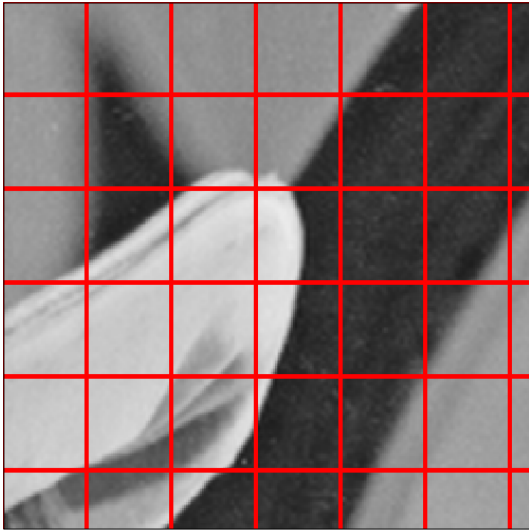
JPEG-2000
Ondelettes
Multiéchelle



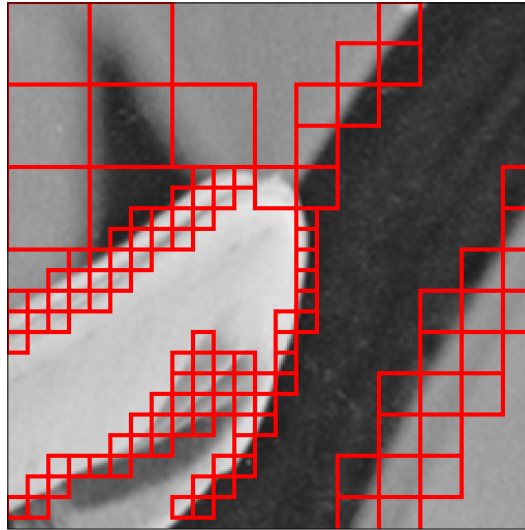
Bandelettes
Géométrie

- Choix de la base utilisée.
- 1990 – JPEG – DCT – carré de même taille.
- 2000 – JPEG-2000 – Ondelettes – taille adaptée à l'échelle.
- 2000++ – Bandelettes - forme adaptée à la géométrie.

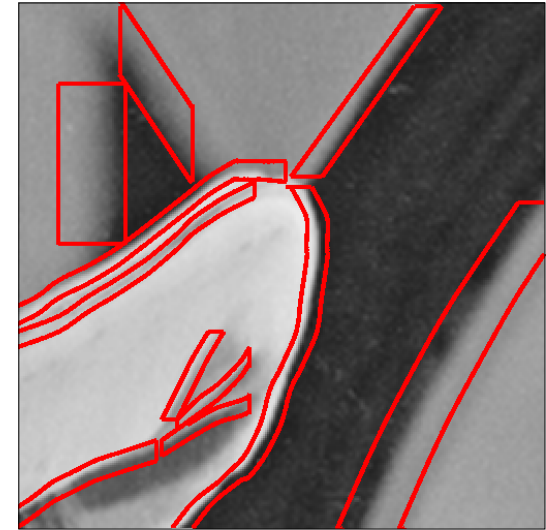
Et après



JPEG
Fourier
Base



JPEG-2000
Ondelettes
Multiéchelle



Bandelettes
Géométrie

- Choix de la base utilisée.
- 1990 – JPEG – DCT – carré de même taille.
- 2000 – JPEG-2000 – Ondelettes – taille adaptée à l'échelle.
- 2000++ – Bandelettes - forme adaptée à la géométrie.
- Domaine de recherche en Mathématique et en Informatique.

Let It Wave

Let It Wave

- Compression spécialisée pour les visages.

Let It Wave

- Compression spécialisée pour les visages.
- 500 octets = facteur 400 de compression !

Let It Wave

- Compression spécialisée pour les visages.
- 500 octets = facteur 400 de compression !
- Comparaison de différents algorithmes.

Let It Wave



JPEG

- Compression spécialisée pour les visages.
- 500 octets = facteur 400 de compression !
- Comparaison de différents algorithmes.

Let It Wave



JPEG



JPEG-2000

- Compression spécialisée pour les visages.
- 500 octets = facteur 400 de compression !
- Comparaison de différents algorithmes.

Let It Wave



JPEG



JPEG-2000



LET IT WAVE

- Compression spécialisée pour les visages.
- 500 octets = facteur 400 de compression !
- Comparaison de différents algorithmes.

Let It Wave



JPEG



JPEG-2000

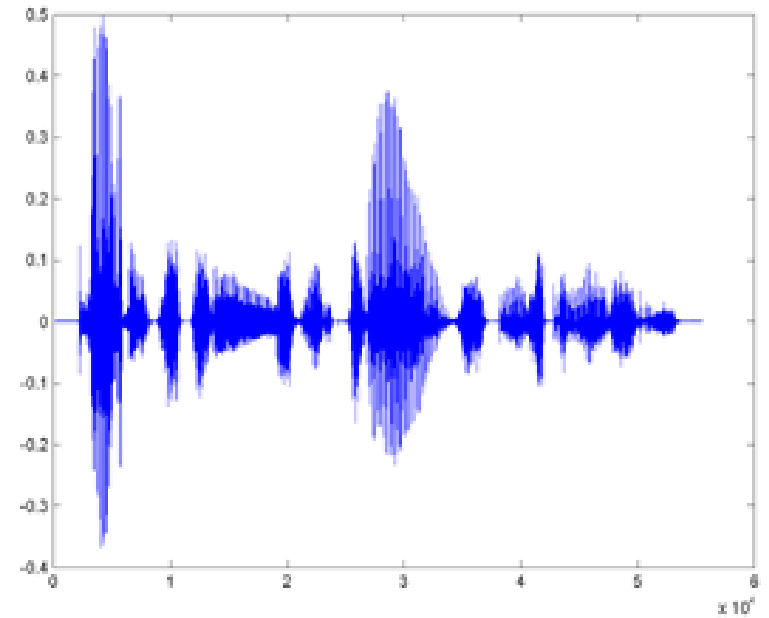
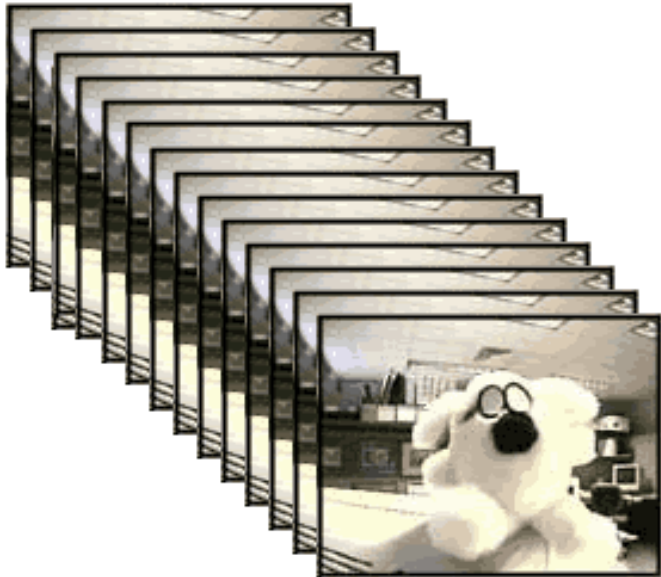


LET IT WAVE

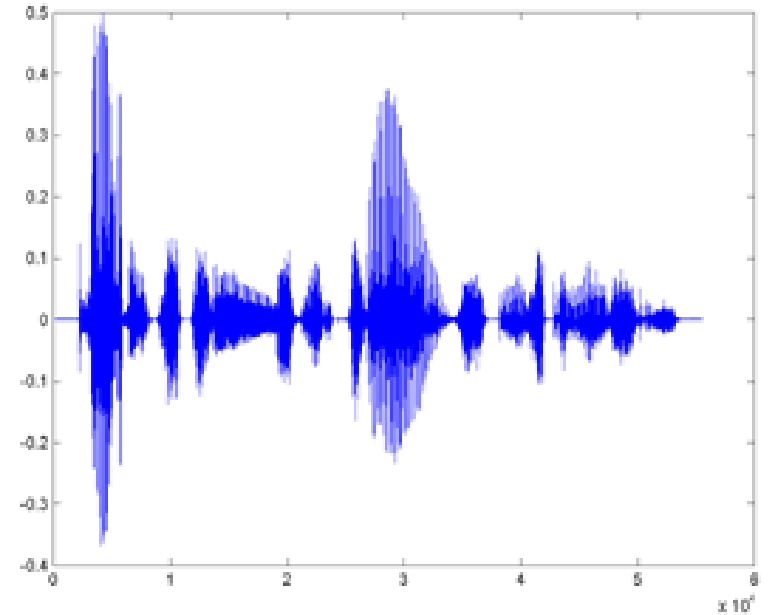
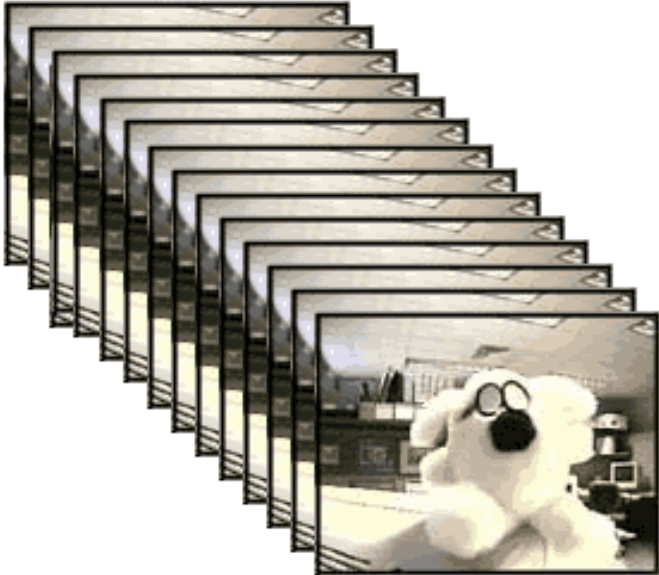
- Compression spécialisée pour les visages.
- 500 octets = facteur 400 de compression !
- Comparaison de différents algorithmes.
- Clé : spécialisation.

Vidéos et sons

Vidéos et sons

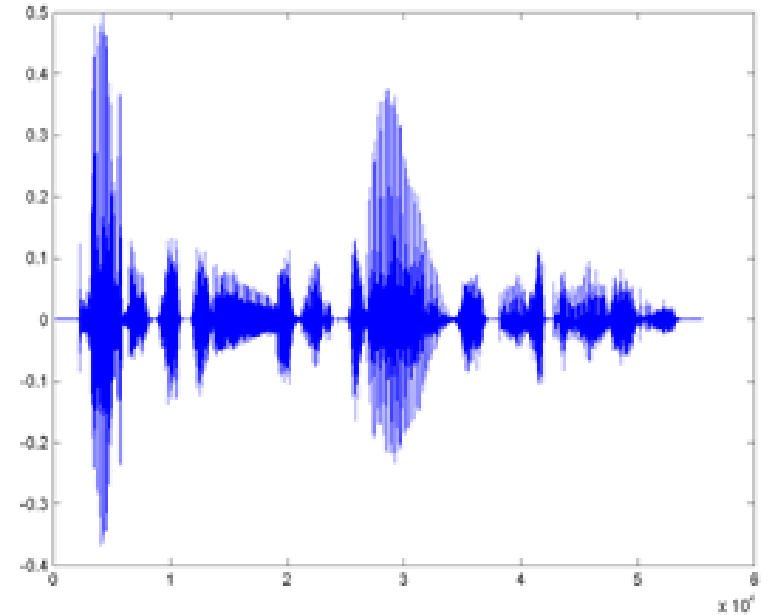
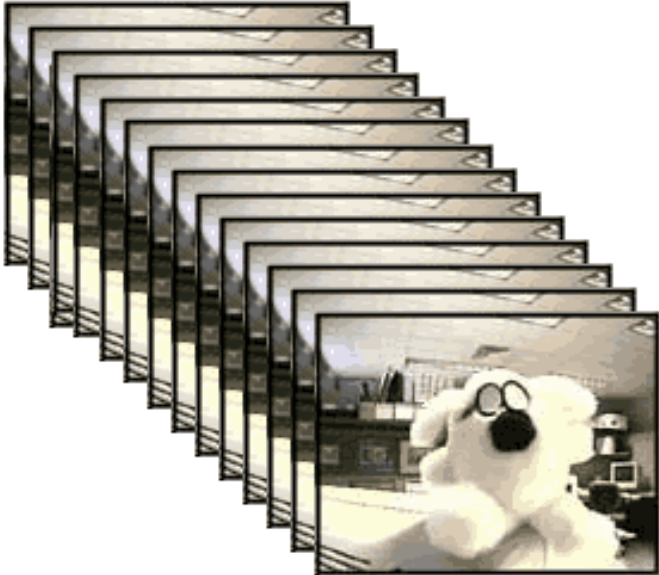


Vidéos et sons



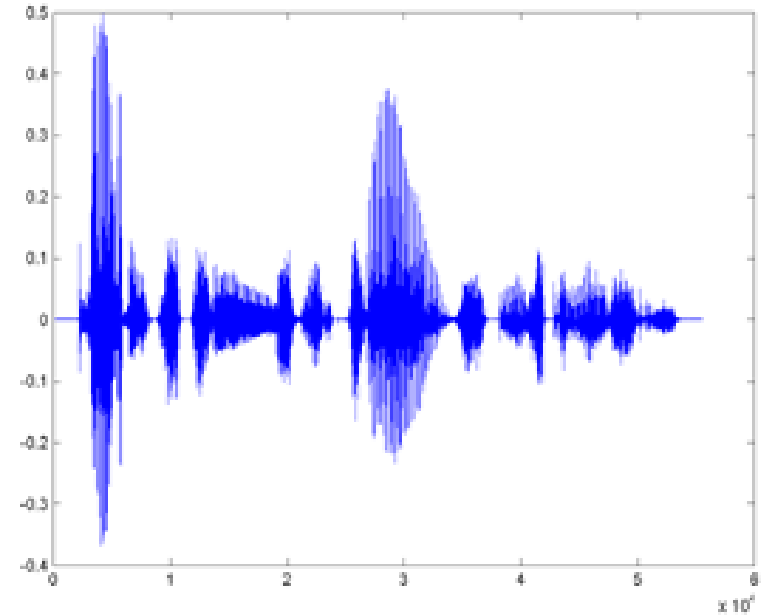
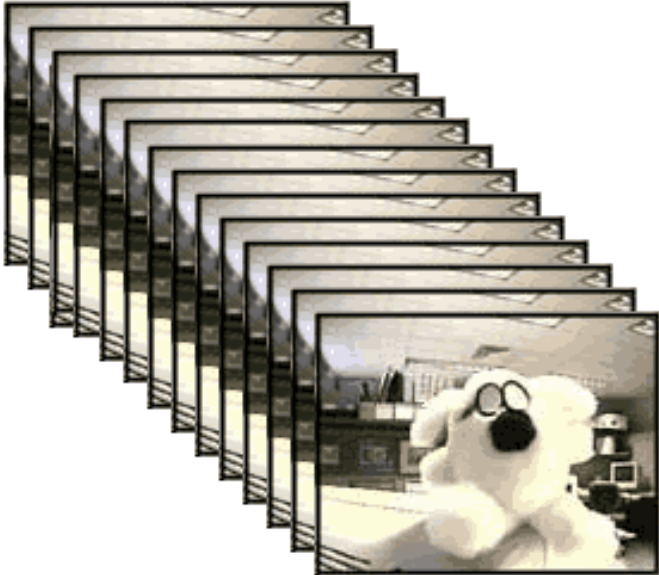
● Mêmes principes s'appliquent !

Vidéos et sons



- Mêmes principes s'appliquent !
- Vidéos : utilisation de la redondance temporelle (MPEG2, MPEG4, ...).

Vidéos et sons



- Mêmes principes s'appliquent !
- Vidéos : utilisation de la redondance temporelle (MPEG2, MPEG4, ...).
- Sons : utilisation de modèles auditifs (MP3, ...).

Conclusion

Conclusion

- Survol de la compression d'image.

Conclusion

- Survol de la compression d'image.
- JPEG moins mystérieux.

Conclusion

- Survol de la compression d'image.
- JPEG moins mystérieux.
- Importance des Mathématiques dans des objets courants.

Conclusion

- Survol de la compression d'image.
- JPEG moins mystérieux.
- Importance des Mathématiques dans des objets courants.
- Nombreux autres exemples : ordinateur, radio, télévision, téléphonie mobile, ...

Conclusion

- Survol de la compression d'image.
- JPEG moins mystérieux.
- Importance des Mathématiques dans des objets courants.
- Nombreux autres exemples : ordinateur, radio, télévision, téléphonie mobile, ...
- Les mathématiques servent (~~parfois~~) à quelque chose !

Conclusion

- Survol de la compression d'image.
- JPEG moins mystérieux.
- Importance des Mathématiques dans des objets courants.
- Nombreux autres exemples : ordinateur, radio, télévision, téléphonie mobile, ...
- Les mathématiques servent (~~parfois~~) à quelque chose !
- Il y a des maths presque partout !

Conclusion

- Survol de la compression d'image.
- JPEG moins mystérieux.
- Importance des Mathématiques dans des objets courants.
- Nombreux autres exemples : ordinateur, radio, télévision, téléphonie mobile, ...
- Les mathématiques servent (~~parfois~~) à quelque chose !
- Il y a des maths presque partout !
- Pour plus de renseignements : lepenne@math.jussieu.fr