

Thèse présentée pour obtenir le grade de

**DOCTEUR DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE**

spécialité : Mathématiques Appliquées

par

Erwan LE PENNEC

**Bandelettes  
et  
représentation géométrique  
des images**

Soutenue le 19 décembre 2002 devant le jury composé de

MM. Albert COHEN	Président
Rachid DERICHE	Examineur
Frédéric FALZON	Examineur
Stéphane MALLAT	Directeur de thèse
Yves MEYER	Rapporteur
Martin VETTERLI	Rapporteur



# Remerciements

L'attention que m'a portée Stéphane MALLAT tout au long de cette thèse mérite plus que des remerciements : j'ai au cours de cette période appris beaucoup auprès de lui et pas uniquement d'un point de vue scientifique. Son enthousiasme a été communicatif et cette thèse a été pour moi un véritable plaisir.

Yves MEYER et Martin VETTERLI m'ont fait l'honneur d'accepter d'être les rapporteurs de cette thèse. Je les remercie non seulement pour le travail ingrat que cela suppose mais aussi notamment l'un, Yves MEYER, pour le plaisir que j'ai eu à suivre son cours de DEA et l'autre, Martin VETTERLI, pour le soutien que j'ai trouvé en lui lors de mes premiers exposés.

La présence d'Albert COHEN est d'autant plus précieuse qu'il a dirigé Basarab MATEI sur un thème similaire pendant la même période. Je remercie Albert COHEN pour cette stimulation permanente ainsi que pour son invitation au CEMRACS où nous avons pu confronter nos approches.

Rachid DERICHE m'a fait le plaisir d'être l'œil le plus extérieur dans le jury. Je le remercie pour sa présence et surtout pour son regard critique sur ce travail.

Frédéric FALZON a suivi l'évolution des bandelettes depuis leur début. Ses encouragements répétés et sa volonté d'appliquer les bandelettes sur de vraies images, des images satellites, plutôt que sur des exemples jouets ont grandement contribué à l'avancement de ce projet. Il faut également associer à ces remerciements *Alcatel Space* qui a financé en partie ces recherches à travers un contrat avec le CMAP.

J'ai en effet passé ces années de thèse au Centre de Mathématiques APpliquées (CMAP) de l'École Polytechnique où j'ai eu la chance d'être accueilli dans des conditions exceptionnelles. Je souhaite remercier tous les membres de l'équipe que je les aie dérangés dans leur bureau (ou le mien), écoutés (ou interrompus) en salle café, accompagnés courir (ou jouer au foot) ou plus simplement croisés régulièrement dans les couloirs. . . Je commence par adresser mes plus grands respects aux anciens et actuel directeurs (Jean-Claude NÉDELEC, Pierre-Arnaud RAVIARD et Vincent GIOVANGIGLI) ainsi qu'un grand merci à tous les autres (Aldjia, Carl, Jeanne, Emmanuel, François, Geo, Grégoire, Habib, Kamal, Kamel, Laurence, Liliane, Marc, Patrice, Nathalie, Natacha, Robert, Sofiane, Sylvain, Toufik, Véronique, Victorita). Je décerne une mention spéciale à ceux qui ont du supporter ma présence plus longtemps dans leur bureau (Abdessatar, Asma, Anne, Benjamin, Charles, Dora, Hatem, Jean-Philippe, Kahoutar, Maureen, Rémi, Sandrine), une mention encore plus spéciale à Emmanuel BACRY sans lequel il n'y aurait pas de *LastWave* et donc, sans doute, pas de bandelettes ainsi qu'une dernière mention très spéciale aux *employés* de *Let It Wave* (Christophe et Jérôme).

Je souhaite également remercier l'équipe de Nanterre qui m'a accueilli durant mon monitorat et en particulier Patrice BERTAIL, Christina BUTUCEA, Caroline CORDON-WEBER, Nathalie CHÈZE, Stephan CLÉMENÇON, Patrick CATTIAUX, Sylvie MÉLÉARD, Laurent MESNAGER et Karine TRIBOULEY. Je remercie plus spécialement mon *tuteur pédagogique* Christian LÉONARD.

Je remercie également les petits cachanais qui me fréquentent depuis bientôt huit ans (Aurélien, Christophe, Clémentine, David, Florian, Laurent, Manu, Manue, Vincent(s), Sylvain, Vadim) et plus particulièrement ceux qui ont du cohabiter avec moi à Montparnasse (Mathieu, Tristan et Jean-Michel!). Je n'oublie pas non plus différentes personnes que j'ai pu croiser durant cette période : Annabelle, Anne, Aurelia, Ahmed, Christophe, Franck, Jean-Thomas, Jeff, Julien, Lionel, Marie, Matt, Rémi, Seb, Thomas.

---

Je remercie également toute ma famille qui a eu la gentillesse de me supporter tout au long de cette longue aventure. Merci à Betty, Brigitte, Christophe, Jean-Yves, Julien, Jérôme, Gwen, Loïc, Mamig, Marinette, Mylène, Olivier, Tatie.

Enfin, je souhaite remercier Joachim DU BELLAY pour sa compréhension envers mon orthographe désastreuse.

P.S. : Si vous vous sentez injustement oublié, n'hésitez pas à me contacter !

Quant aux fautes qui se pourraient trouver en l'impression, comme de lettres transposées, omises, ou superflues, la première édition les excusera, et la discrétion du lecteur savant qui ne s'arrêtera à si petites choses.

Joachim DU BELLAY, *Adresse au lecteur* en postface de la *Deffence et Illustration de la langue francoyse* (1549)



---

# Table des matières

---

	<b>Remerciements</b> . . . . .	<b>3</b>
<b>1</b>	<b>Introduction</b> . . . . .	<b>11</b>
	<b>1.1 Géométrie et représentation</b> . . . . .	<b>12</b>
	1.1.1 Introduction de la géométrie dans la représentation. . . . .	12
	1.1.2 Modèle des images . . . . .	12
	1.1.2.1 Régularité . . . . .	13
	1.1.2.2 Présentation du modèle. . . . .	13
	<b>1.2 Représentation en vision</b> . . . . .	<b>15</b>
	1.2.1 Représentation double couche par contours. . . . .	15
	1.2.2 Autres modèles de contours . . . . .	15
	<b>1.3 Représentation en analyse harmonique.</b> . . . . .	<b>16</b>
	1.3.1 Décomposition atomique. . . . .	16
	1.3.2 Approximation dans des bases orthonormées . . . . .	17
	1.3.3 Bases d'ondelettes . . . . .	17
	1.3.3.1 Dimension 1 . . . . .	18
	1.3.3.2 Dimension 2 . . . . .	19
	<b>1.4 Géométrie et décompositions atomiques</b> . . . . .	<b>24</b>
	1.4.1 Cas d'une indicatrice . . . . .	24
	1.4.2 Curvelets. . . . .	25
	1.4.3 Edgeprint . . . . .	27
	1.4.4 Ondelettes ENO . . . . .	27
	1.4.5 Bandelettes. . . . .	28
	<b>1.5 Résumé de la thèse.</b> . . . . .	<b>28</b>
<b>2</b>	<b>Bandelettes.</b> . . . . .	<b>33</b>
	<b>2.1 Géométrie</b> . . . . .	<b>34</b>
	2.1.1 Contours, courbes et flots . . . . .	34
	2.1.2 Estimation de la direction de régularité . . . . .	35
	<b>2.2 Bandelettes</b> . . . . .	<b>35</b>
	2.2.1 Déformation de l'espace . . . . .	35
	2.2.2 Relation flot-courbe . . . . .	38
	2.2.3 Opérateur de déformations sur les fonctions . . . . .	41
	2.2.4 Bandelettes. . . . .	42
	2.2.5 Rôle et choix des deux bases . . . . .	44
	<b>2.3 Bandelettes et domaines</b> . . . . .	<b>45</b>
	2.3.1 Adaptation des bandelettes à un domaine . . . . .	45
	2.3.2 Segmentation . . . . .	46

2.4	<b>Représentation</b>	46
2.4.1	Approche deux couches	47
2.4.2	Approche une couche	50
<b>3</b>	<b>Frame de bandelettes : construction et application au débruitage</b>	<b>51</b>
3.1	<b>Frame de bandelettes</b>	<b>52</b>
3.1.1	Bandelettes de l'espace tout entier	52
3.1.2	Ondelettes et espaces multirésolutions.	52
3.1.2.1	Dimension 1	53
3.1.2.2	Dimension 2	53
3.1.3	Bandelettisation de l'espace tout entier	55
3.1.4	Domaines et bandelettisation	57
3.1.5	Frame de bandelettes et reconstruction	63
3.1.6	Décomposition en opérateurs par domaines.	65
3.1.7	Transformée en bandelette discrète	66
3.1.8	L'opérateur de translation	68
3.2	<b>Mesure de la géométrie</b>	<b>68</b>
3.2.1	Estimation de la direction de régularité	68
3.2.2	Décomposition en domaines	72
3.3	<b>Débruitage</b>	<b>78</b>
3.3.1	Débruitage par seuillage	78
3.3.2	Frame de bandelettes invariant par translation	79
3.3.3	Estimation de la géométrie	80
3.3.4	Résultats numériques	80
<b>3A</b>	<b>Ondelettes sur l'intervalle</b>	<b>89</b>
3A.1	Ondelettes sur l'intervalle	90
3A.2	Régularité des ondelettes de bords	93
3A.3	Transformée en ondelettes discrètes sur l'intervalle	96
3A.4	Ondelettes de bord et schéma discret	97
3A.5	Régularité des ondelettes de bords modifiées	98
<b>3B</b>	<b>Estimation de la direction de régularité</b>	<b>101</b>
3B.1	Norme du gradient lissé au voisinage de la singularité	102
3B.2	Direction du gradient	105
<b>4</b>	<b>Approximation non linéaire dans un frame de bandelettes</b>	<b>111</b>
4.1	<b>Géométrie des domaines</b>	<b>112</b>
4.1.1	Conditions sur la géométrie des domaines	112
4.1.2	Géométrie et grass-fire	114
4.2	<b>Approximation</b>	<b>116</b>
4.2.1	Régularité et produits scalaires avec des ondelettes	116
4.2.2	Approximation linéaire de la géométrie	118
4.2.3	Approximation non-linéaire sur un domaine $\Omega$ .	119
4.2.4	Approximation non-linéaire	129
4.3	<b>Détection dans le cas des fonctions étoilées</b>	<b>138</b>
4.3.1	Fonctions étoilées	138
4.3.2	Détection	139
4.3.2.1	Chaînage des maxima et construction des régions	140
4.3.2.2	Intégration du flot	141



<b>4A</b>	<b>Démonstrations : Géométrie des domaines.</b>	<b>143</b>
4A.1	Grass-fire et domaines	144
4A.2	Lemmes de géométrie	149
<b>4B</b>	<b>Démonstrations : Approximation</b>	<b>159</b>
4B.1	Approximation linéaire de la géométrie	160
4B.2	Approximation non-linéaire sur un domaine $\Omega$	163
4B.2.1	Les trois tableaux	163
4B.2.2	Le cas des grandes échelles de lissage $s \geq s_0$	165
4B.2.2.1	Les ondelettes isotropes ne rencontrant pas $\mathcal{C}_s$	166
4B.2.2.2	Ondelettes isotropes rencontrant $\mathcal{C}_s$	167
4B.2.3	Échelle minimale pour les bandelettes	170
4B.2.4	Ondelettes déformées	175
4B.2.4.1	Ondelettes déformées ne rencontrant pas $\mathcal{C}_s$	175
4B.2.4.2	Ondelettes déformées rencontrant $\mathcal{C}_s$	176
4B.2.5	Bandelettes intérieures	179
4B.2.5.1	Bandelettes intérieures ne rencontrant pas $\mathcal{C}_s$	180
4B.2.5.2	Bandelettes intérieures rencontrant $\mathcal{C}_s$ avec $j_2 \geq \log_2(s)$	183
4B.2.5.3	Bandelettes intérieures rencontrant $\mathcal{C}_s$ avec $j_2 \leq \log_2(s)$	191
4B.2.6	Bandelettes de bord	198
4B.2.6.1	Bandelettes de bord ne rencontrant pas $\mathcal{C}_s$	198
4B.2.6.2	Bandelettes de bord rencontrant $\mathcal{C}_s$ avec $j_1 \geq j_2$	199
4B.2.6.3	Bandelettes de bord rencontrant $\mathcal{C}_s$ avec $j_2 \geq j_1$	200
4B.3	Approximation non-linéaire	208
4B.3.1	Les trois tableaux	208
4B.3.1.1	Cas du lissage large ( $s \geq s_0$ )	210
4B.3.1.2	Échelle minimale dans le frame de bandelettes	211
4B.3.1.3	Ondelettes isotropes extérieures.	212
4B.3.1.4	Dans les domaines.	213
4B.3.2	Erreur en dessous de l'échelle $\epsilon$	214
<b>5</b>	<b>Perspectives</b>	<b>217</b>
5.1	Bilan critique des bandelettes	218
5.2	Extensions possibles	219
5.2.1	Redondance et lifting scheme	219
5.2.2	Géométrie et segmentation du flot	219
5.2.3	Débruitage et déconvolution	219
5.2.4	Compression	222
5.3	Dimensions supérieures	224
5.3.1	Ondelettes anisotropes et anisotropes agrégées	224
5.3.2	Bandelettes multidimensionnelles	224
	<b>Bibliographie</b>	<b>227</b>



---

# Chapitre 1

## Introduction

---

<b>1.1 Géométrie et représentation . . . . .</b>	<b>12</b>
1.1.1 Introduction de la géométrie dans la représentation. . . . .	12
1.1.2 Modèle des images . . . . .	12
1.1.2.1 Régularité . . . . .	13
1.1.2.2 Présentation du modèle. . . . .	13
<b>1.2 Représentation en vision . . . . .</b>	<b>15</b>
1.2.1 Représentation double couche par contours. . . . .	15
1.2.2 Autres modèles de contours . . . . .	15
<b>1.3 Représentation en analyse harmonique. . . . .</b>	<b>16</b>
1.3.1 Décomposition atomique. . . . .	16
1.3.2 Approximation dans des bases orthonormées . . . . .	17
1.3.3 Bases d'ondelettes . . . . .	17
1.3.3.1 Dimension 1 . . . . .	18
1.3.3.2 Dimension 2 . . . . .	19
<b>1.4 Géométrie et décompositions atomiques . . . . .</b>	<b>24</b>
1.4.1 Cas d'une indicatrice . . . . .	24
1.4.2 Curvelets. . . . .	25
1.4.3 Edgeprint . . . . .	27
1.4.4 Ondelettes ENO . . . . .	27
1.4.5 Bandelettes. . . . .	28
<b>1.5 Résumé de la thèse. . . . .</b>	<b>28</b>

A l'origine, le titre de cette thèse était *Compression d'images utilisant leur régularité géométrique*. Le programme était donc de construire une représentation adaptée à la géométrie et d'en déduire un algorithme de compression. Cette thèse a permis de réaliser la première partie de ce programme en définissant une méthodologie permettant d'utiliser la nature géométrique des images dans leur représentation. Les résultats obtenus définissent un cadre pratique et théorique pour la construction d'algorithmes de traitement d'images (débruitage, déconvolution, compression ldots).

## 1.1 Géométrie et représentation

### 1.1.1 Introduction de la géométrie dans la représentation

L'idée centrale de ce travail est que les images naturelles ne sont pas de simples fonctions de  $L^2([0, 1]^2)$  mais qu'elles ont une composante géométrique. Cet aspect géométrique est souvent utilisé sous la forme d'un modèle des images de type  $u + v$  où  $u$  est une partie *géométrique*, une partie qui contient l'essentiel des structures géométriques de l'image, et  $v$  une partie comprenant les textures et le bruit [Mey01]. Bien que cette décomposition ne soit pas bien définie, elle correspond à l'idée qu'une grande partie de l'information dans les images est portée par la partie géométrique et que celle-ci doit être traitée différemment de la composante de textures.

Pour le problème de représentation, cet aspect géométrique des images est également la source de deux types de régularité : la régularité de la géométrie dans l'image et la régularité des images le long de la géométrie. Toute régularité implique une forme de redondance que l'on souhaite pouvoir exploiter. La géométrie apparaît dans ce travail comme une source de régularité plus que comme une source d'information.

L'exploitation des redondances est une des idées centrales de la construction des représentations creuses, c'est à dire des représentations permettant d'obtenir de bonnes approximations avec peu de coefficients. L'exploitation de nouvelles formes de régularité, les régularités de type géométrique, doit donc permettre une amélioration par rapport aux représentations existantes qui ne les utilisent pas.

Cette thèse présente la construction d'une représentation adaptée à l'exploitation de ces régularités géométriques. Cette représentation, dite représentation en bandelettes, est basée sur des produits tensoriels d'ondelettes monodimensionnelles, dont les échelles peuvent être différentes selon les deux directions, et qui sont déformés pour suivre la géométrie des images. La définition de cette géométrie ainsi que la construction des bandelettes font l'objet du premier chapitre. Dans le chapitre suivant, on construit la représentation en bandelettes sous la forme d'un frame qui permet d'obtenir dans le dernier chapitre des résultats d'approximations non linéaires. Les bandelettes permettent ainsi de représenter une image régulière sauf sur des contours eux-mêmes réguliers aussi efficacement que si l'image était entièrement régulière.

### 1.1.2 Modèle des images

Le modèle d'image utilisé est celui d'une fonction régulière, sauf sur des contours qui sont eux-mêmes réguliers, que l'on lisse et bruite.

### 1.1.2.1 Régularité

La régularité apparaît dans deux contextes différents : celui de l'image elle-même et celui des contours. On utilise cependant la même notion de régularité dans les deux cas : la fonction doit être dérivable jusqu'à un certain ordre et ses dérivées partielles doivent rester bornées.

On vérifie que si une fonction  $f$  a ses dérivées partielles d'ordre  $\alpha$  bornées alors il existe une constante  $K$  tel que

$$\forall x \in \Omega, \quad |f(x) - f(x_0) - P_{x_0}(x)| \leq K|x - x_0|^\alpha \quad (1.1)$$

où  $P_{x_0}$  est le polynôme de Taylor de degré  $\alpha - 1$  défini au point  $x_0$ . La plus petite constante  $K$  possible est un multiple de la norme de la plus grande dérivée partielle d'ordre  $\alpha$  de  $f$  sur le domaine :

$$K = \frac{\max_{|\gamma|=\alpha} \left\| \frac{\partial^\gamma}{\partial x^\gamma} f \right\|_\infty}{\alpha!} \quad (1.2)$$

où, si  $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_d)$ ,  $\frac{\partial^\gamma}{\partial x^\gamma}$  est défini par

$$\frac{\partial^\gamma}{\partial x^\gamma} = \frac{\partial^{\gamma_1}}{\partial x_1^{\gamma_1}} \cdots \frac{\partial^{\gamma_d}}{\partial x_d^{\gamma_d}} . \quad (1.3)$$

Si les dérivées partielles d'ordre  $\alpha$  de  $f$  sont bornées, il en est de même pour les dérivées partielles d'ordre  $\beta$  avec  $\beta \leq \alpha$ . On note alors

$$\|D^\alpha f\|_\infty = \max_{|\kappa| \leq \alpha} \left\| \frac{\partial^\kappa}{\partial x^\kappa} f \right\|_\infty . \quad (1.4)$$

### 1.1.2.2 Présentation du modèle

Les fonctions  $f$  observées sont modélisées comme étant des images régulières par morceaux convolées par un noyau de lissage, dont l'échelle est variable, et auxquelles on ajoute un bruit. Ce modèle correspond à des objets réguliers séparés par des frontières régulières qui peuvent être floues.

Les fonctions du modèle sont définies à partir de fonctions  $f$  telles que, sauf sur un ensemble de courbe  $\mathcal{C}_i$ , les dérivées partielles d'ordre  $\alpha$  de  $f$  sont bornées. On suppose également que les dérivées d'ordre  $\alpha$  des paramétrisations normales de ces courbes sont également bornées et on impose des conditions sur leurs positions relatives : celles-ci ne peuvent se rencontrer sans le faire avec un certain angle. La figure 1.1 illustre ce modèle.

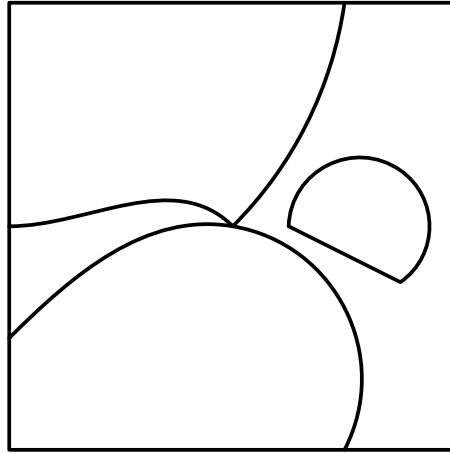


FIGURE 1.1 – La géométrie du modèle : un ensemble de courbes dont les dérivées d'ordre  $\alpha$  des paramétrisations normales sont bornées avec des conditions d'angles sur les jonctions.

Pour être plus précis, les courbes  $\mathcal{C}_i$  sont de longueur finie et deux courbes distinctes  $\mathcal{C}_i$  et  $\mathcal{C}_j$  sont :

- soit disjointes,
- soit non et alors elles se rencontrent avec des angles sur les tangentes supérieures à  $\theta_0$  (cf figure 1.2).

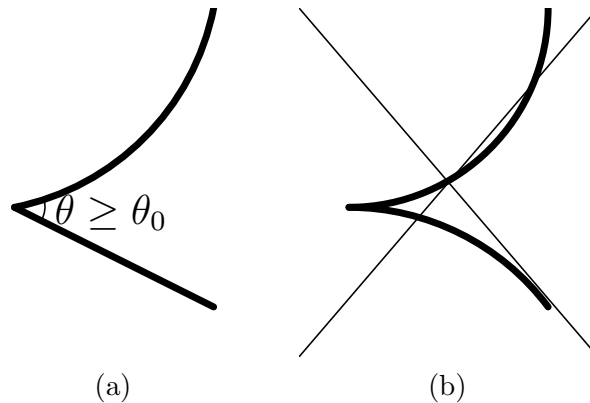


FIGURE 1.2 – Les jonctions du modèle : (a) une jonction possible, (b) une jonction impossible.

Ces fonctions  $f$  ne peuvent avoir que des contours nets or les images naturelles possèdent des contours flous. Les dispositifs d'acquisition des images lissent en effet celle-ci. On modélise cet effet par une convolution avec un noyau de lissage d'échelle variable. Ce lissage permet d'obtenir des contours d'une variété beaucoup plus grande et dont la richesse échappe à la plupart des représentations géométriques.

Les fonctions du modèle sont donc définies comme les fonctions  $f$  précédentes convoluées avec un noyau de lissage  $h_s$  auxquelles on ajoute un bruit  $b$  pour obtenir des fonctions  $f_s$  définie par

$$f_s = f \star h_s + b \quad (1.5)$$

où  $\star$  représente une convolution.

De manière plus précise, le noyau de lissage  $h_s$  est défini par dilatation d'un noyau de lissage  $h$  dont les dérivées partielles d'ordre  $\alpha$  sont bornées, à support dans  $[-1, 1]^2$  et d'intégrale 1 par

$$h_s = \frac{1}{s^2} h\left(\frac{x}{s}\right) \quad (1.6)$$

de sorte que l'intégrale de  $h_s$  soit également égale à 1.

Le bruit  $b$  est pour sa part laissé non spécifié ici mais sera souvent choisi comme un bruit blanc gaussien de moyenne nulle et de variance  $\sigma^2$ .

## 1.2 Représentation en vision

La première grande famille de représentation utilisant la géométrie est celle des représentations originaires de la vision. Leur caractéristique commune est d'être centrées sur l'idée de contours.

### 1.2.1 Représentation double couche par contours

La technique de *sketch* introduite par Carlsson [Car88, Car84] est le prototype de ces représentations. Elle est basée sur une détection de contours par une méthode de maxima de gradient. Les valeurs de part et d'autre des contours sont alors extraites et leur régularité permet de les coder efficacement par un codage différentiel.

Ces informations ponctuelles au voisinage des contours permettent alors une reconstruction d'une version simplifiée de la fonction par diffusion de ces valeurs de chaque côté des contours. Cette diffusion permet la reconstruction d'une image où les valeurs au voisinage des contours sont les bonnes et l'image régulière entre ceux-ci.

Cette reconstruction n'est pas exacte et l'information manquante est obtenue en codant le résidu, la différence entre l'image originale et la reconstruction, que l'on considère comme ne comportant plus d'information géométrique.

Les grands principes de cette représentations sont donc les suivants :

- la géométrie est donnée par la position des contours,
- les valeurs le long des contours sont régulières et
- la diffusion de ces valeurs donnent une reconstruction telle que le résidu est une fonction uniformément régulière.

Il faut noter que l'utilisation des contours est justifiée plus par leur importance en tant que tels que comme source de régularité.

### 1.2.2 Autres modèles de contours

D'autres modèles basés sur les contours ont été proposés mais les idées centrales restent similaires.

Elder et Zucker [EZ98, Eld99] ont étendu la représentation de Carlsson pour obtenir des contours qui ne soient pas des sauts en définissant une échelle locale de lissage utilisée après la reconstruction par diffusion. La détection des contours proposée permet l'estimation de contours adaptés à cette notion d'échelle locale de lissage mais le reste du schéma est très similaire à celui de Carlsson. La régularité des valeurs au voisinage des contours ainsi que

la régularité de l'échelle de lissage le long de ceux-ci sont exploitées. La partie texturée est également obtenue à l'aide d'un résidu.

Les maxima d'ondelettes introduits par Mallat et Zhong [MSZ92] sont une autre approche basée sur l'idée de contours. Dans celle-ci, la carte de contours n'est plus unique mais est définie pour chaque échelle dyadique d'une décomposition en ondelette continue de l'image. La position des maxima locaux de la norme de la décomposition ainsi que leurs valeurs sont conservées. La reconstruction d'une image à partir de ces maxima est possible et est, bien que cette représentation ne soit pas complète, très proche de l'image originale.

Cette approche a également été modifiée par Mallat et Froment [FM92] pour construire une représentation double couche de l'image en utilisant uniquement certains contours, ceux considérés comme significatifs, à chaque échelle. La reconstruction obtenue à l'aide de ces maxima ne permet plus de récupérer les textures et une technique de résidu est nécessaire pour obtenir une représentation complète.

Ces approches utilisent la nature géométrique des images en cherchant à exploiter la présence des contours mais le contrôle de ces représentations n'est pas facile. L'utilisation de deux couches distinctes, qui ne sont pas nécessairement bien définies, et l'absence de propriété de conservation de l'énergie dans ces représentations posent en effet des difficultés. D'une part, la présence de deux couches non orthogonales impliquent une certaine redondance et donc une certaine inefficacité. D'autre part, l'absence de contrôle énergétique rend difficile l'analyse de la stabilité de la représentation.

## 1.3 Représentation en analyse harmonique

La seconde grande famille de représentations des images est celle de l'analyse harmonique. L'objectif est ici la construction de familles de fonctions permettant d'approcher efficacement l'image à l'aide de sommes finies de ces fonctions.

### 1.3.1 Décomposition atomique

Le principe des décompositions atomiques est le suivant : on se donne un dictionnaire  $\mathcal{D} = \{g_m\}_{m \in \mathbb{Z}}$  de fonctions et on recherche des approximations d'une fonction  $f$  sous la forme

$$f_M = \sum_{i=1}^M c_i g_{m_i} \quad (1.7)$$

pour minimiser l'erreur d'approximation  $\|f - f_M\|_2^2$ . On impose de plus que l'approximation puisse être obtenue à l'aide d'éléments dont la profondeur dans le dictionnaire augmente au plus de manière polynômiale en  $M$  de manière par exemple à éviter un dictionnaire fait d'une énumération d'une famille dense. Cette approximation est dite non-linéaire [DeV98] car les éléments  $g_{m_i}$  choisis dans la décomposition dépendent de la fonction  $f$  considérée.

On mesure alors l'efficacité de la représentation atomique avec le dictionnaire  $\mathcal{D}$  par la vitesse de décroissance de cette erreur d'approximation en fonction du nombre de coefficients conservés.

Le dictionnaire  $\mathcal{D}$  peut lui-même avoir été choisi parmi une famille de dictionnaires  $\{\mathcal{D}_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$  en fonction de la fonction  $f$ . Cette approximation est alors dite hautement non-linéaire car on introduit un degré supplémentaire de non linéarité par le choix du dictionnaire. On mesure dans ce cas l'efficacité de la représentation atomique par la vitesse



de décroissance de cette erreur d'approximation en fonction du nombre de coefficients conservés et du nombre de paramètres nécessaires à la description du dictionnaire dans la famille.

Cette efficacité dépend de la classe de fonctions considérée aussi bien que du choix du dictionnaire.

### 1.3.2 Approximation dans des bases orthonormées

Les bases orthonormées ont sans doute la forme la plus simple parmi ces dictionnaires. Elles sont effet fixes et ne nécessitent donc aucun paramètre dépendant de la fonction à approcher.

Elle permettent de plus un contrôle simple sur la norme  $L^2$  des fonction : si  $\mathcal{B} = \{b_m\}$  est une base orthonormée et  $f$  une fonction, on a la propriété de conservation de l'énergie suivante :

$$\|f\|_2^2 = \sum_m |\langle f, b_m \rangle|^2 . \quad (1.8)$$

Il en résulte que si l'on souhaite approcher la fonction  $f$  par  $f_M$  définie à l'aide de  $M$  coefficients choisis dans  $I_M$  et si l'on souhaite minimiser l'erreur entre  $f$  et  $f_M$  :

$$\|f - f_M\|_2^2 = \sum_{m \notin I_M} |\langle f, b_m \rangle|^2, \quad (1.9)$$

il suffit de conserver les  $M$  plus grands coefficients ainsi que leurs positions. Le terme d'approximation non-linéaire [DeV98] est utilisé par opposition à l'approximation linéaire qui consiste à conserver les  $M$  premiers coefficients. Bien que dans l'approximation linéaire la position des coefficients ne soit pas à retenir, l'intérêt de l'approximation non-linéaire reste entier car ceci ne fait au plus que doubler le nombre de paramètres à conserver.

La question du choix de la base  $\mathcal{B}$  se pose alors. On souhaite en effet trouver une base telle que l'erreur entre  $f$  et son approximation non-linéaire avec  $M$  coefficients  $f_M$  décroisse rapidement pour une large classe de fonctions. Pour une classe donnée, cette décroissance dépend de la base utilisée et permet de classer les performances d'approximation des différentes bases. Elle est mesurée à l'aide d'un exposant  $\kappa$  reliant l'erreur au nombre de coefficients

$$\|f - f_M\|_2^2 \leq KM^{-\kappa} . \quad (1.10)$$

On recherche maintenant la meilleure base pour les fonctions du modèle, c'est-à-dire une base telle que l'exposant  $\kappa$  soit maximal.

### 1.3.3 Bases d'ondelettes

Les bases d'ondelettes forment une famille de bases optimales pour la représentation des signaux monodimensionnels réguliers par morceaux. Leur construction et leurs propriétés sont décrites notamment dans les ouvrages de Daubechies [Dau92], DeVore [DeV98] ou de Mallat [Mal98]. On en propose ici un bref panorama.

### 1.3.3.1 Dimension 1

Les bases d'ondelettes sont construites à partir d'une unique fonction  $\psi$  dilatée par des facteurs d'échelles dyadiques  $2^j$  et translatée à l'échelle  $2^j$  par des facteurs proportionnels à  $2^j$ . La fonction  $\psi$  peut-être choisie de sorte que la famille

$$\left\{ \frac{1}{2^{j/2}} \psi\left(\frac{x - 2^j k}{2^j}\right) = \psi_{j,k}(x) \right\}_{j \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}} \quad (1.11)$$

forme une base orthonormée de  $L^2(\mathbb{R})$ .

L'ondelette  $\psi$  est reliée à une fonction d'échelle  $\phi$  et à la notion d'espace multirésolution comme on le rappelle dans la section 3.1.2. Cette fonction est utilisée dans la construction des bases bidimensionnelles de la section suivante.

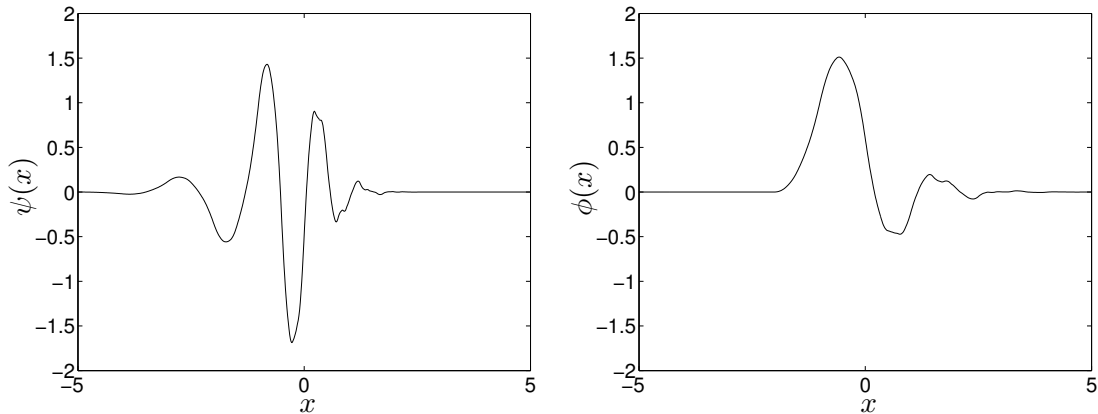


FIGURE 1.3 – Une ondelette  $\psi$  et sa fonction d'échelle  $\phi$  correspondante.

Les théorèmes d'approximation en ondelettes nécessitent une condition sur l'intégrale de ces ondelettes contre les polynômes. Celle-ci doit être nulle pour tous les polynômes de degré strictement inférieur à  $p$ . On dit alors que l'ondelette possède  $p$  moments nuls.

Ces bases d'ondelettes permettent une représentation optimale des fonctions régulières [DeV98] :

**Théorème 1.1.** *Si  $f$  est telle que sa dérivée d'ordre  $\alpha$  est bornée et si l'ondelette  $\psi$  possède  $p \geq \alpha$  moments nuls alors la décroissance de l'erreur entre  $f$  et son approximation en ondelettes avec  $M$  coefficients satisfait*

$$\|f - f_M\|_2^2 \leq KM^{-2\alpha} \quad (1.12)$$

où  $K$  est une constante ne dépendant que de  $f$  et de l'ondelette utilisée.

A l'inverse de la plupart des représentations classiques (Fourier, transformée en cosinus, ...), elles permettent également une représentation optimale des fonctions régulières par morceaux. En effet, Daubechies [Dau98] construit des ondelettes à support compact et celles-ci permettent d'obtenir le théorème suivant [DeV98] :

**Théorème 1.2.** *Si  $f$  est telle qu'en dehors d'un nombre fini de points sa dérivée d'ordre  $\alpha$  est bornée et si l'ondelette  $\psi$  possède  $p \geq \alpha$  moments nuls et est à support compact alors*

la décroissance de l'erreur entre  $f$  et son approximation en ondelettes avec  $M$  coefficients satisfait

$$\|f - f_M\|_2^2 \leq KM^{-2\alpha} \quad (1.13)$$

où  $K$  est une constante ne dépendant que de  $f$  et de l'ondelette utilisée.

La décroissance de l'erreur d'approximation en ondelettes est donc la même dans le cas d'une fonction régulière et d'une fonction régulière par morceaux. Les ondelettes permettent donc de s'affranchir d'un nombre fini de singularités. La qualité de la reconstruction de la figure 1.4 obtenue à partir de 10% des coefficients illustre cette propriété.

Plus précisément, Daubechies [Dau98] montre comment obtenir  $\psi$  à support compact minimal pour un nombre de moments nuls donné. Si l'on veut  $p$  moments nuls, alors l'ondelette a un support de taille  $2p + 1$  et elle est dérivable  $\alpha$  fois avec  $\alpha$  de l'ordre de  $0.2p$  et ses dérivées sont bornées. Ce sont ces ondelettes à support compact que l'on utilise par la suite.

### 1.3.3.2 Dimension 2

Les ondelettes peuvent être étendues en dimension 2 par un procédé de tensorisation : il existe deux constructions que l'on détaille dans la section 3.1.2 permettant l'obtention de bases de  $L^2(\mathbb{R}^2)$ .

Dans la première construction, on utilise trois types d'ondelettes dilatées et translatées par des facteurs  $2^j$

$$\psi_{j,k}^o(x) = \frac{1}{2^j} \psi^k\left(\frac{x - 2^j k}{2^j}\right) \quad o \in 1, 2, 3 \quad (1.14)$$

avec

$$\psi^1(x) = \phi(x_1) \psi(x_2) \quad (1.15)$$

$$\psi^2(x) = \psi(x_1) \phi(x_2) \quad (1.16)$$

$$\psi^3(x) = \psi(x_1) \psi(x_2) \cdot \quad (1.17)$$

$$(1.18)$$

Ces ondelettes, représentées dans la figure 1.5, sont qualifiées d'isotropes, car leur support est carré, et forment une base orthonormée de  $L^2(\mathbb{R}^2)$  :

$$L^2(\mathbb{R}^2) = \text{Vect} \{ \psi_{j,k}^o \}_{o \in 1,2,3, j \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}^2} \quad (1.19)$$

$$= \text{Vect} \{ \phi_{j,k_1} \otimes \psi_{j,k_2}, \psi_{j,k_1} \otimes \phi_{j,k_2}, \psi_{j,k_1} \otimes \psi_{j,k_2} \}_{j \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}^2} \quad (1.20)$$

où  $\otimes$  désigne le produit tensoriel.

Ces ondelettes possèdent des propriétés d'optimalité pour l'approximation des fonctions régulières [DeV98] :

**Théorème 1.3.** *Si  $f$  est telle que ses dérivées partielles d'ordre  $\alpha$  sont bornées et si  $\psi$  possède  $p \geq \alpha$  moments nuls alors la décroissance de l'erreur entre  $f$  et son approximation en ondelettes isotropes avec  $M$  coefficients satisfait*

$$\|f - f_M\|_2^2 \leq KM^{-\alpha} \quad (1.21)$$

où  $K$  est une constante ne dépendant que de  $f$  et de l'ondelette utilisée.

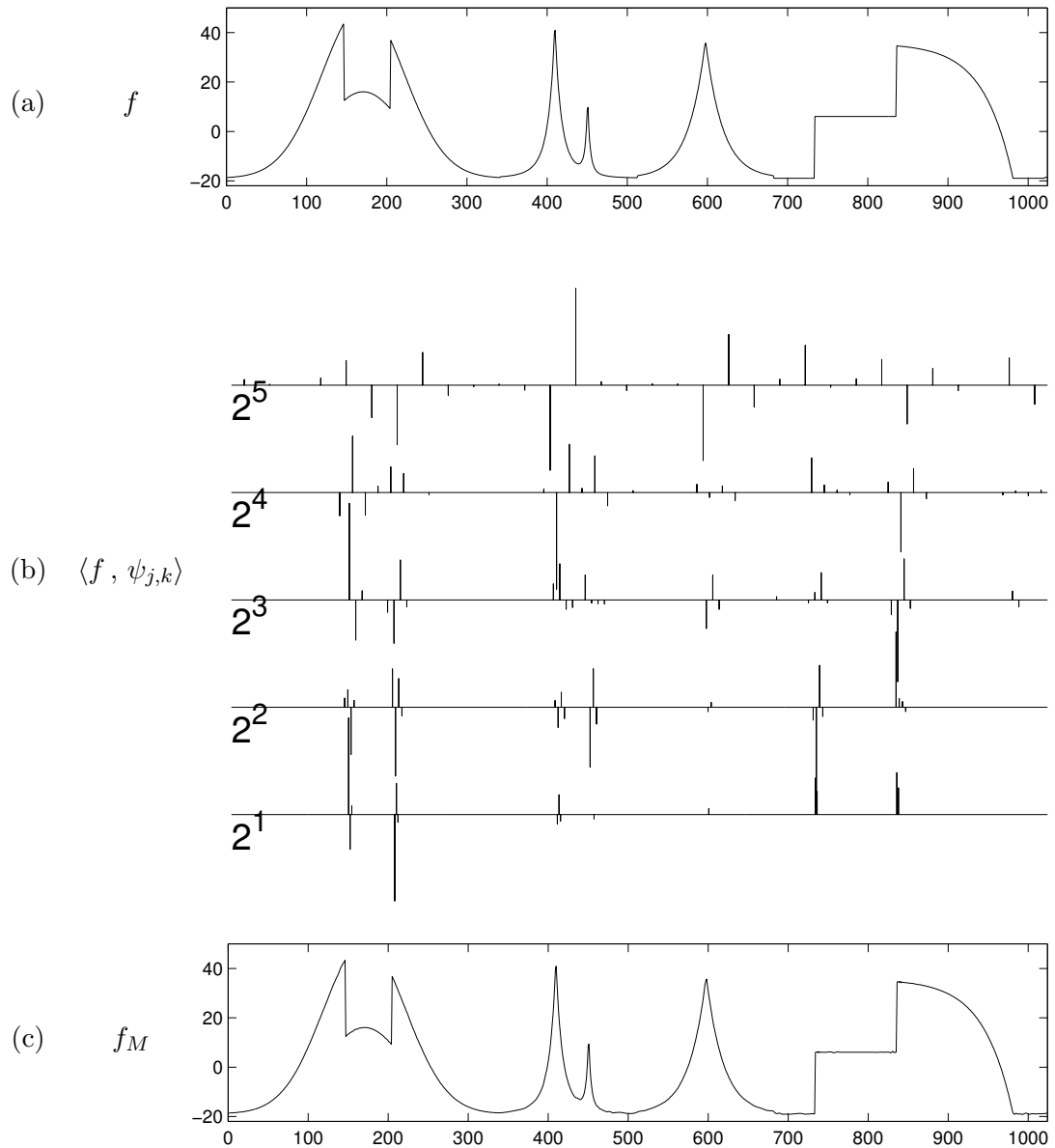


FIGURE 1.4 – Approximation non linéaire d'une fonction  $f$  avec  $M = 100 \simeq 10\%$  des coefficients : (a) la fonction  $f$ , (b) les 100 coefficients d'ondelettes  $\langle f, \psi_{j,k} \rangle$  conservés, (c) la fonction  $f_M$  reconstruite à partir de ces coefficients.

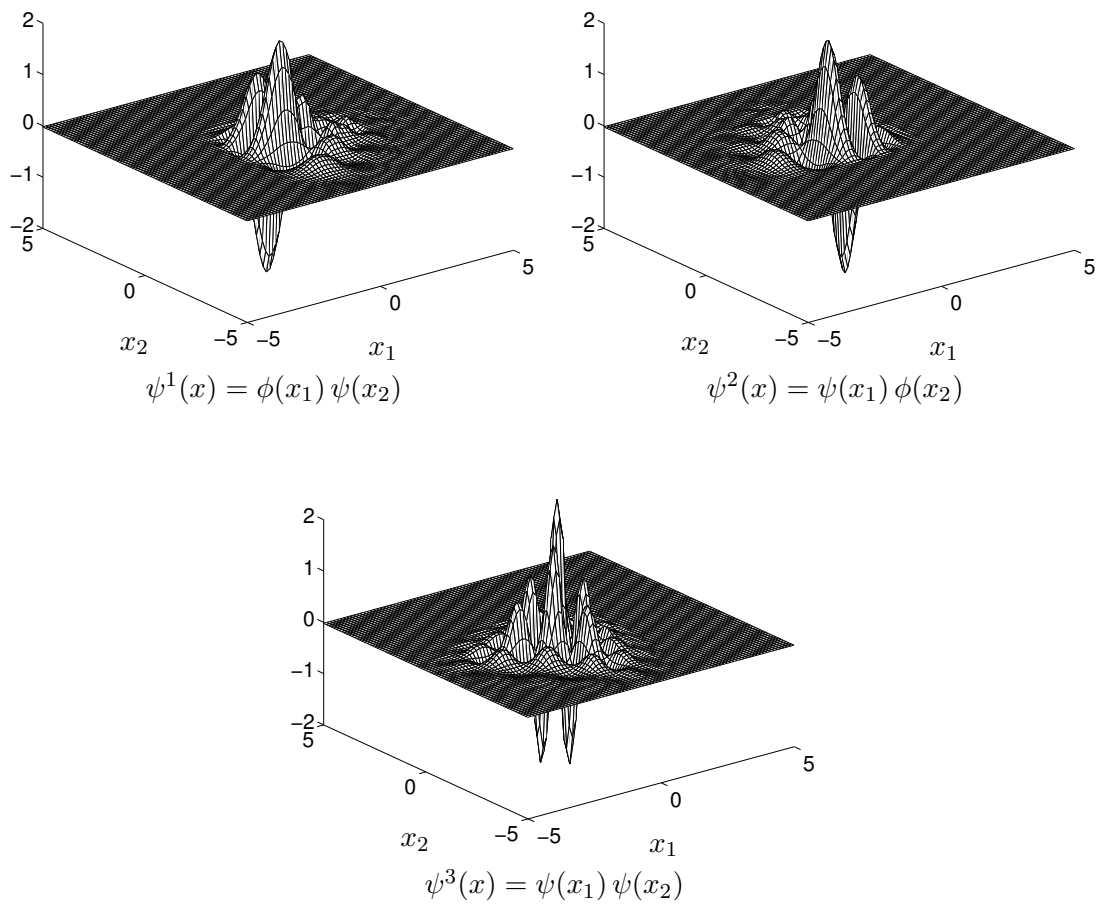


FIGURE 1.5 – Ondelettes isotropes obtenues à l'aide de l'ondelette de la figure 1.3.

Ce résultat ne s'étend plus au cas d'un nombre fini de singularité le long de courbes et la décroissance obtenue pour les fonctions du modèle est beaucoup plus lente. Elle correspond à celle des fonctions à variation bornée. Cette classe de fonctions permet en effet d'obtenir des résultats théoriques d'approximation non-linéaire.

La variation totale d'une image est définie par l'intégrale de la norme du gradient généralisé de la fonction :

$$\|f\|_V = \int |\nabla f(x)| dx \quad (1.22)$$

et les fonctions à variation bornée sont celles dont la variation totale est finie. On obtient pour ces fonctions le théorème suivant du à Cohen et al. [CdPX99] :

**Théorème 1.4.** *Si  $f$  est à variation bornée et  $\psi$  possède  $p \geq 1$  moments nuls alors la décroissance de l'erreur entre  $f$  et son approximation en ondelettes isotropes avec  $M$  coefficients satisfait*

$$\|f - f_M\|_2^2 \leq K \|f\|_V M^{-1} . \quad (1.23)$$

où  $K$  est une constante ne dépendant que de l'ondelette utilisée.

L'autre construction conduit à une base orthonormée définie par un unique type d'ondelette fait d'un produit tensoriel de deux ondelettes à des échelles qui peuvent être différentes :

$$L^2(\mathbb{R}^2) = \text{Vect} \{ \psi_{j_1, k_1} \otimes \psi_{j_2, k_2} \}_{j_1 \in \mathbb{Z}, j_2 \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}^2} . \quad (1.24)$$

Neumann et von Sachs [NvS97] appellent ces ondelettes, représentées dans la figure 1.6, des ondelettes anisotropes car leur support n'a pas nécessairement la même taille dans les deux directions. Elles sont également utilisées par deVore et al. [DKT98] sous le nom d'ondelettes hyperboliques.

Ces ondelettes anisotropes possèdent les même performance d'approximation non-linéaire que les ondelettes isotropes dans le cas des fonctions régulières [DKT98]

**Théorème 1.5.** *Si  $f$  est telle que ses dérivées partielles d'ordre  $\alpha$  sont bornées et si  $\psi$  possède  $p \geq \alpha$  moments nuls et est à support compact alors la décroissance de l'erreur entre  $f$  et son approximation  $f_M$  en ondelettes anisotropes avec  $M$  coefficients satisfait*

$$\|f - f_M\|_2^2 \leq K M^{-\alpha} \quad (1.25)$$

où  $K$  est une constante ne dépendant que de  $f$  et de l'ondelette utilisée.

Ce résultat ne s'étend pas plus au cas des fonctions du modèle que dans le cas des ondelettes isotropes. Cependant on a le résultat partiel suivant dans le cas où il y a une unique singularité et si celle-ci est alignée avec l'un des axes [NvS97].

**Théorème 1.6.** *Si  $f$  est telle que en dehors d'une droite horizontale ou verticale ses dérivées partielles d'ordre  $\alpha$  sont bornées et si  $\psi$  possède  $p \geq \alpha$  moments nuls et est à support compact alors la décroissance de l'erreur entre  $f$  et son approximation  $f_M$  en ondelettes anisotropes avec  $M$  coefficients satisfait*

$$\|f - f_M\|_2^2 \leq K M^{-\alpha} \quad (1.26)$$

où  $K$  est une constante ne dépendant que de  $f$  et de l'ondelette utilisée.

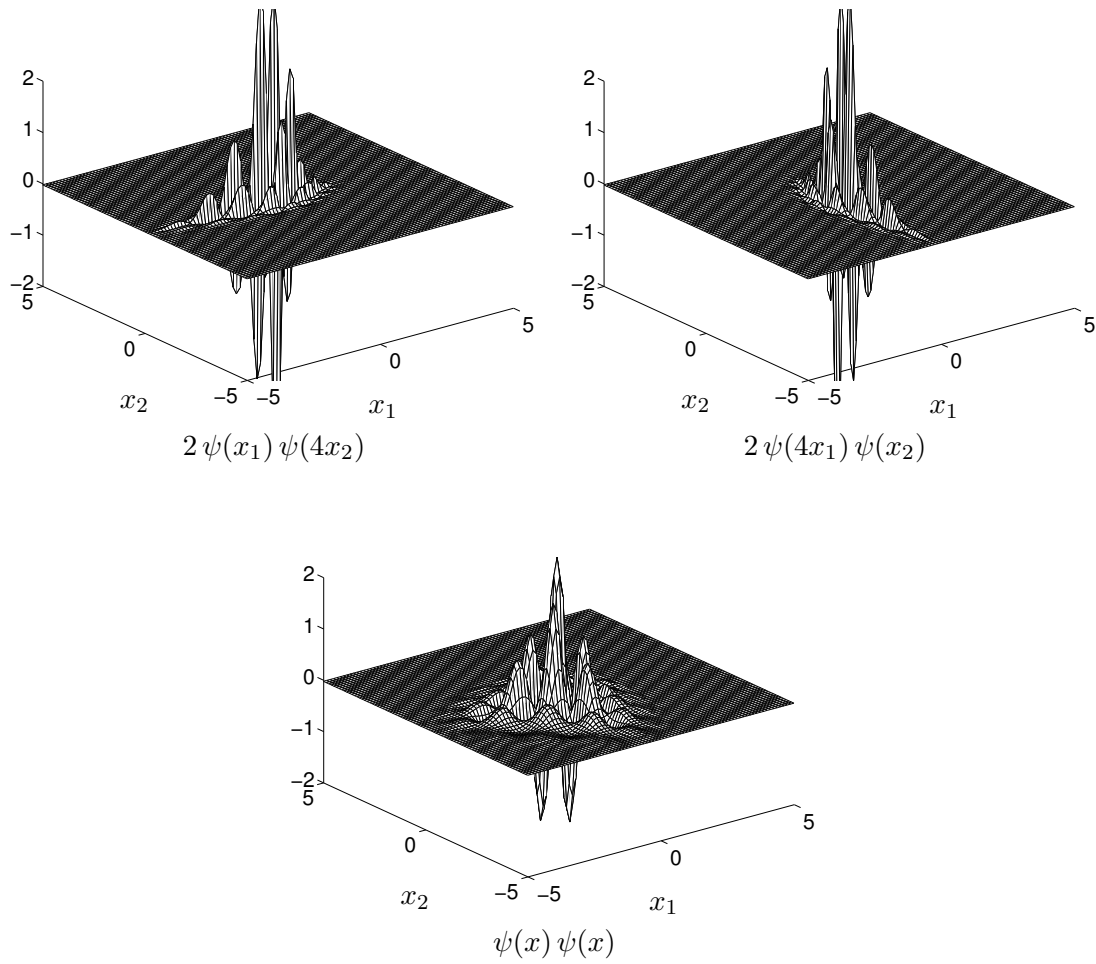


FIGURE 1.6 – Ondelettes anisotropes obtenues à l'aide de l'ondelette de la figure 1.3.

Contrairement au cas de la dimension 1, les résultats d'approximation non-linéaire en ondelettes des fonctions régulières ne s'étendent donc pas en dimension 2 au cas des fonctions régulières par morceaux. Ce phénomène dit de la *malédiction de la dimension* provient ici de la nécessité d'un grand nombre d'ondelettes pour recouvrir une singularité le long d'une courbe.

## 1.4 Géométrie et décompositions atomiques

L'exemple simple de l'indicatrice d'un ensemble régulier permet de comprendre l'enjeu de l'introduction de la géométrie dans les représentations harmoniques et d'introduire les différentes solutions déjà proposées.

### 1.4.1 Cas d'une indicatrice

Pour démontrer l'intérêt de l'introduction d'un caractère géométrique dans les décompositions atomiques, on se place dans un cas simple : celui d'une fonction  $f$  définie comme l'indicatrice d'un ensemble  $\Omega$  dont le bord  $\partial\Omega$  est telle que la dérivée d'ordre  $\alpha$  de sa paramétrisation normale est bornée pour  $\alpha \geq 2$ .

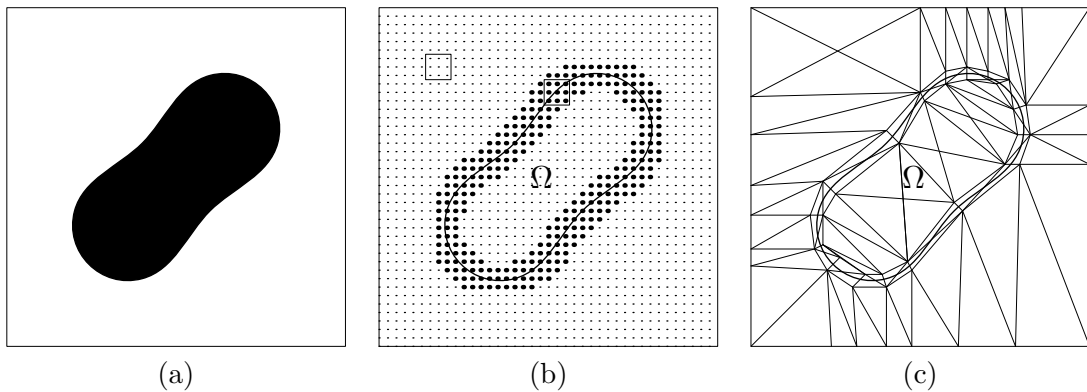


FIGURE 1.7 – Cas d'une indicatrice : (a) l'ensemble  $\Omega$  et l'indicatrice  $f$  associée, (b) les coefficients d'ondelettes rencontrant le bord  $\partial\Omega$  à une échelle donnée, (c) une triangulation adaptée.

On cherche à approcher cette fonction par des décompositions atomiques.

Le premier dictionnaire utilisé est celui des ondelettes isotropes. Pour obtenir une majoration de l'erreur d'approximation en ondelette, on utilise alors l'appartenance de cette fonction à l'espace  $BV$  des fonctions à variations bornées. La décroissance de l'erreur entre  $f$  et  $f_M$  son approximation non-linéaire par ondelettes avec  $M$  coefficients satisfait

$$\|f - f_M\|^2 \leq CM^{-1} \quad (1.27)$$

et on vérifie que cette estimation de la décroissance est optimale. En effet, à chaque échelles  $2^j$ , les coefficients d'ondelettes non nulles sont ceux correspondant à des ondelettes rencontrant le bord  $\partial\Omega$ . Ces ondelettes recouvrent donc tout le bord et sont en nombre proportionnel à  $l(\partial\Omega)2^{-j}$ . L'amplitude des coefficients correspondants de l'ordre de  $2^j$  entraîne alors la décroissance de l'erreur avec une puissance de  $-1$ . C'est cette accumulation



des coefficients d'ondelettes sur le bord  $\partial\Omega$  qui engendre l'incapacité des ondelettes à exploiter la régularité de celui-ci. On note de plus que ces  $M$  coefficients utilisés doivent être précisés et que cette approximations nécessite en fait  $2M$  paramètres : les  $M$  coefficients et le même nombre de paramètres pour préciser quels sont ces coefficients.

La régularité du bord est de nature géométrique. Elle peut être exploitée par des structures adaptées. Pour en donner une idée, on abandonne temporairement la dénombrabilité des dictionnaires et donc la limitation sur la profondeur de recherche. On utilise le dictionnaire des fonction constantes sur des triangles. En faisant suivre le bord aux triangles comme dans la figure 1.7, on obtient une décroissance en fonction du nombre de triangles utilisés  $M$  qui satisfait

$$\|f - f_M\|^2 \leq CM^{-2}. \quad (1.28)$$

Ici ces  $M$  coefficients correspondent à  $7M$  paramètres (les  $M$  coefficients eux-mêmes et les  $6M$  coordonnées des sommets des triangles), ce qui ne change pas la décroissance asymptotique.

L'utilisation de triangle dont la longueur est de l'ordre de  $M^{-1}$  et la largeur de  $M^{-2}$ , là où les ondelettes étaient isotropes de largeur  $M^{-2}$ , permet cette décroissance plus rapide. Le long du bord du domaine  $\Omega$ , l'indicatrice présente un comportement très différent selon la direction. Elle est irrégulière lorsqu'on traverse le contour puisqu'elle présente un saut et requiert donc des éléments fins dans cette direction. Elle est régulière lorsqu'on suit le contour et peut donc exploiter des structures plus longues. C'est cette anisotropie que peut exploiter, à l'inverse des ondelettes isotropes, la triangulation adaptative.

Donoho [Don98] montre que cette décroissance est optimale dans le cas  $\alpha = 2$  pour les approximations non-linéaire dans un dictionnaire et il présente une méthode, appelée décomposition en *wegdelets* [Don98, Don99], permettant d'obtenir une telle représentation. Celle-ci est basée sur une partition adaptative de l'image et fonctionne par le même principe que la triangulation adaptative.

On peut également retrouver cette vitesse de décroissance avec une approche totalement différente des approches de dictionnaires. Si l'on suppose que l'on est capable d'estimer la position du bord  $\partial\Omega$ , on peut essayer d'approcher ce bord. Or approcher le bord de la fonction revient à approcher la fonction elle-même dans le cas des indicatrices et on se ramène à un problème monodimensionnel. On vérifie que l'erreur  $L^2$  d'approximation sur la fonction correspond à la surface comprise entre la courbe et son approximation et donc à une erreur d'approximation  $L^1$  sur celle-ci. On en déduit que, avec cette description de l'indicatrice via son bord, l'erreur d'approximation satisfait

$$\|f - f_M\|^2 \leq KM^{-\alpha} \quad \forall \alpha \geq 2. \quad (1.29)$$

Cette approche ne se traduit pas directement sous la forme d'une décomposition atomique mais l'idée d'approcher la géométrie est utilisée par la suite.

Ces deux approches montrent que des considérations géométriques peuvent améliorer la représentation des indicatrices. On présente maintenant les principales extensions de ces idées pour les images.

## 1.4.2 Curvelets

Donoho et Candès [CD99a, CD00] proposent avec les *curvelets* un dictionnaire fixe, très simple et adapté à la géométrie. Les curvelets forment un frame, une famille génératrice

ayant des propriétés de conservation énergétique. Le dictionnaire ainsi obtenu n'est donc que légèrement plus complexe qu'une base orthonormée, il ne nécessite de plus aucune adaptation à l'image. Ce frame de curvelets permet quasiment d'atteindre la décroissance de l'erreur en  $M^{-2}$  dans le cas d'une fonction telle que, en dehors de contours dont les dérivées secondes sont bornées, ses dérivés partielles d'ordre 2 sont bornées. La décroissance obtenue satisfait en effet

$$\|f - f_M\|^2 \leq K(\log M)^3 M^{-2} . \quad (1.30)$$

Cette décomposition est basée sur une décomposition en sous-bandes comme dans une transformée en ondelettes classiques. Chacune de ces sous-bandes est alors transformée à l'aide d'une transformée directionnelle en *ridgelets* construite par Candès et Donoho [Can98, CD99b] sur des carrés de taille proportionnelle à l'échelle. Les curvelets ainsi obtenues forment un *tight frame* dont les éléments sont anisotropes avec une largeur de l'ordre de la longueur au carré comme pour les triangles dans la section précédente.

Le frame de curvelets ne peut s'appliquer tel quel au cas  $\alpha > 2$  puisque il n'est pas capable d'obtenir une décroissance plus rapide dans ce cas. La géométrie sous-jacente à cette construction est en effet linéaire et ne permet donc pas d'obtenir des ordres d'approximation supérieurs à  $\alpha = 2$ . La discrétisation de ce schéma est de plus difficile [DV01a, Do01, DD00] et la constante qui apparaît dans la décroissance est grande.

### 1.4.3 Edgeprint

Dragotti et Vetterli [DV01b, Dra02] proposent des dictionnaires adaptés aux images polynômiales par morceaux. Ces dictionnaires sont caractérisés par la position des discontinuités dans l'image. Les dictionnaires d'*edgeprints* utilisent la régularité du profil des singularités dues à leur nature polynômiale.

Cette représentation est basée sur les idées développées en 1D avec les *footprints* [DV00, DV02] : une fonction régulière par morceaux est décomposée en la somme d'une fonction régulière et de discontinuités de type polynômial. Chacune de ces discontinuités est représentée par sa position et sa décomposition dans la base orthonormée de footprints associée à sa position. Cette base de footprints engendre le même sous-espace de dimension  $d$  des coefficients du cône de singularité en ce point que les discontinuités polynômiales de degré inférieur à  $d - 1$ .

Les edgeprints sont une extension bidimensionnelle de ces footprints inspirée par la stratégie utilisée par les bandelettes présentées à Vancouver en 2000 [LPM00] : ceux-ci sont détectés le long de chaque ligne et chaque colonne puis chaînés le long des contours, enfin après avoir codé la géométrie, la valeur des coefficients de footprints le long de la courbe est traité comme un signal monodimensionnel et codé en utilisant encore une fois les footprints. Le codage des contours définit donc bien le dictionnaire d'edgeprints utilisés.

Cette approche s'étend aux fonctions régulières par morceaux en ajoutant dans le dictionnaire des ondelettes après les edgeprints. En effet, les edgeprints permettent d'obtenir une fonction polynômiale par morceaux et on peut toujours décomposer une fonction régulière par morceaux en une composante régulière et une composante polynômiale par morceaux.

Finalement on note que le modèle de singularités utilisé est celui de singularités non lissées et que l'extension d'une telle construction à des singularités lissées n'est pas immédiate.

### 1.4.4 Ondelettes ENO

La dernière construction présentée est celle des ondelettes ENO bidimensionnelles de Cohen et Matei [CM01, CM02]. Elles sont définies à l'aide d'un schéma de lifting (*lifting scheme*) [Swe98] adaptatif et sont donc à rapprocher d'une technique de dictionnaires adaptatifs dans laquelle on ajoute des fonctions dans le dictionnaire suivant la décomposition de l'image dans les fonctions déjà utilisées.

Comme tout lifting, celui-ci est basé sur l'idée de grilles emboîtées et de prévision des coefficients d'une grille à l'autre. Le schéma de lifting proposé est adapté aux discontinuités sans nécessiter leurs détections préalables. Celui-ci cherche à éviter les oscillations comme dans les schémas antérieurs [AACD99b, AACD99a] basés sur les ondelettes ENO monodimensionnelles [Har93] et à utiliser la régularité de la géométrie par un modèle linéaire de singularité. De manière plus précise, dans leur modèle de prévision, Cohen et Matei [CM01, CM02] cherchent à éviter de prévoir à travers les singularités en minimisant les oscillations de la prévision. La régularité de la géométrie intervient lorsqu'ils estiment être en présence d'une discontinuité, ils utilisent alors localement un modèle de discontinuité polynômial de par et d'autre d'une droite.

Ce schéma est à rapprocher de ceux proposés par Baraniuk et al. [BCDS99] ou Mertins [Mer99] mais cherche à s'adapter de manière plus efficace à la géométrie en incorporant un modèle de discontinuité bidimensionnelle.

Dans cette représentation, la géométrie n'a pas à être détectée explicitement mais l'est implicitement puisque l'estimation de la régularité ou de l'irrégularité des points, et donc en un sens l'estimation de position des discontinuités, se fait à partir des coefficients de la grille plus grossière.

La principale difficulté de ce schéma est d'obtenir des résultats de stabilité et de décroissance de l'erreur. Cette difficulté provient de la non linéarité de la construction et de sa définition sur des grilles discrètes. Cohen et Matei conjecturent cependant une décroissance de l'erreur qui satisfait

$$\|f - f_M\|^2 \leq CM^{-2} \quad (1.31)$$

pour les fonctions telles que, en dehors d'un ensemble de contours dont les dérivées secondes des paramétrisations normales sont bornées, les dérivées partielles d'ordre 2 sont bornées.

Finalement on note que comme dans la construction précédente, le modèle de singularités utilisé est celui de singularités nettes et que l'extension d'une telle construction à des singularités lissées n'a pas encore été faite.

### 1.4.5 Bandelettes

Les bandelettes sont les éléments des dictionnaires adaptés à la géométrie des images construits dans cette thèse. Ces bandelettes sont obtenues à partir de déformations d'ondelettes anisotropes permettant via une rectification d'exploiter la régularité de la fonction selon sa direction de régularité maximale. Les bandelettes nécessitent une estimation explicite de la géométrie de l'image décrite comme une partition de l'image en domaines où une direction de régularité privilégiée est connue et en fond où aucune orientation n'est privilégiée.

Les bandelettes associées à cette géométrie forment un frame (une structure oblique) constitué de l'union de familles orthonormées sur chacun de ces domaines. Ce frame est associé à un algorithme rapide de décomposition et permet également une reconstruction efficace.

Il possède également des propriétés asymptotiques d'approximation des fonctions du modèle. On montre notamment que si la détection de la géométrie est suffisamment précise une fonction  $f_s$  du modèle, défini dans la section 1.1.2.2, de fonctions régulières, d'ordre  $\alpha$ , par morceaux peut être approchée dans le frame de bandelettes à l'aide de  $M$  coefficients à la fois pour la géométrie et pour les bandelettes de sorte que l'erreur entre  $f_s$  et son approximation  $f_M$  satisfasse

$$\|f_s - f_M\|^2 \leq CM^{-\alpha} . \quad (1.32)$$

Ce résultat est un résultat optimal et s'adapte au degré de régularité de la fonction et de ses contours ainsi qu'au lissage utilisé.

L'estimation de la géométrie proposée dans la thèse est une technique ad-hoc qui permet cependant d'obtenir des résultats théoriques pour une version simplifiée du modèle, les fonctions étoilées introduites par Donoho [Don99] qui ne possèdent pas de coins.

## 1.5 Résumé de la thèse

Pour conclure ce chapitre, on présente un résumé plus détaillé de cette thèse.

Le chapitre 1 introduit dans la section 1.1 le problème de l'utilisation de la géométrie pour la représentation des images ainsi que le modèle des images que l'on considère. L'état de l'art des représentations géométriques est présenté en distinguant les approches basées sur les contours de la section 1.2 et les approches d'analyse harmonique de la section 1.3. On détaille alors dans la section 1.4 certaines représentations géométriques issue de la dernière approche.

Dans le chapitre 2, on introduit les concepts centraux des bandelettes : la direction de régularité qui contient l'information géométrique dans la section 2.1 et la construction des bandelettes comme produit tensoriel de deux bases dans un espace déformé pour rectifier les directions de régularité dans la section 2.2. De manière plus précise, cette direction de régularité obtenue comme la direction orthogonale au gradient de la fonction lissée par un noyau de lissage  $g$  définit un flot  $\tau$  :

$$\tau(x) = \frac{\nabla(g \star f)(x)^\perp}{|\nabla(g \star f)(x)|}. \quad (1.33)$$

Ce flot correspond à la direction tangente à la courbe dans le cas particulier des contours nets. Lorsque ce flot est constant le long des directions verticales, on peut lui associer des courbes intégrales plutôt horizontales et réciproquement à une courbe plutôt horizontale on peut associer un flot constant le long des directions verticales. On associe alors aux courbes plutôt horizontales paramétrées par  $x_2 = c(x_1)$ , la déformation  $w$  définie par

$$w : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x_1, x_2) \mapsto (x_1, x_2 - c(x_1)). \quad (1.34)$$

Celle-ci est inversible, conserve la norme et permet d'aligner le flot associé à la courbe avec l'horizontale. Cette déformation en induit une  $W$  sur les images définie par

$$Wf(w(x)) = f(x) \quad (1.35)$$

et la base de bandelettes de l'espace entier est obtenue comme l'image par  $W^*$  d'un produit tensoriel de bases orthonormées :

$$B = \{W^*(g_{m_1}^1 \otimes g_{m_2}^2)\}_{m_1, m_2} \quad (1.36)$$

$$B = \{g_{m_1}^1(x_1) g_{m_2}^2(x_1 - c(x_2))\}_{m_1, m_2}. \quad (1.37)$$

On justifie alors le choix des bases d'ondelettes à support compacts pour les deux bases  $\{g_{m_1}^1\}$  et  $\{g_{m_2}^2\}$ . Ceci permet de capturer la régularité selon  $x_1$  et les éventuelles singularités selon  $x_2$ . Les bandelettes sont donc définies comme les images par  $W^*$  des ondelettes anisotropes. Dans la section 2.3, on montre que ce choix permet également de définir des bandelettes sur des domaines, ce qui est nécessaire puisque la transformation  $w$  n'est en fait définie que localement. La question de l'obtention de la géométrie et de la partition de l'espace qu'elle nécessite est alors posée mais la réponse est repoussée aux chapitres suivants. Ce chapitre se termine avec la section 2.4 et la présentation de deux représentations possibles basées sur les bandelettes : une représentation à deux couches de type  $u + v$ , où  $u$  est obtenu par minimisation de gradient sous contrainte des produits scalaires de bandelettes et  $v$  le résidu est représenté en ondelettes isotropes, et une représentation à une couche constituée d'un frame de bandelettes. L'abandon de la représentation à deux couches est justifié par des problèmes de stabilité et de redondance.

Le chapitre 3 expose la construction du frame de bandelettes. La section 3.1 débute par le rappel que la base de bandelettes de l'espace entier est une base d'ondelettes anisotropes déformées, ce qui se traduit, en reprenant les notations précédentes,

$$B = \{W^*(\psi_{j_1, k_1} \otimes \psi_{j_2, k_2})\}_{j_1 \in \mathbb{Z}, j_2 \in \mathbb{Z}, k_1 \in \mathbb{Z}, k_2 \in \mathbb{Z}} \quad (1.38)$$

$$B = \{\psi_{j_1, k_1}(x_1) \psi_{j_2, k_2}(x_2 - c(x_1))\}_{j_1 \in \mathbb{Z}, j_2 \in \mathbb{Z}, k_1 \in \mathbb{Z}, k_2 \in \mathbb{Z}} \quad (1.39)$$

$$B = \{b_{j_1, j_2, k_1, k_2}\}_{j_1 \in \mathbb{Z}, j_2 \in \mathbb{Z}, k_1 \in \mathbb{Z}, k_2 \in \mathbb{Z}} . \quad (1.40)$$

On établit alors un lien entre ondelettes isotropes et ondelettes anisotropes : la base de ces dernières peut s'obtenir par un changement de base correspondant à des transformées en ondelettes monodimensionnelles discrètes à partir de la base d'ondelettes isotropes. On en déduit en particulier un algorithme de calcul rapide, appelé bandelettisation, des coefficients de bandelettes de  $f$

$$\langle f, b_{j_1, j_2, k_1, k_2} \rangle \quad (1.41)$$

à partir des coefficients d'ondelettes isotropes de  $Wf$

$$\langle Wf, \psi_{j, k_1, k_2}^o \rangle \quad (1.42)$$

eux-mêmes obtenus par une transformée en ondelettes rapide. Ce procédé de bandelettisation permet la construction, en remplaçant les transformées en ondelettes discrètes par des transformées en ondelettes discrètes sur l'intervalle, d'une famille orthonormée de bandelettes associée à un domaine. Cette famille est constituée de bandelettes à l'intérieur du domaine et de fonctions de bord rendant complète la représentation. Si l'image est partitionnée en des domaines  $\Omega_i$  avec une déformation associée et un fond  $\bar{\Omega}$ , l'union des familles orthonormées de bandelettes  $\{b_{i, m}\}_m$  associées aux domaines  $\Omega_i$  et des ondelettes isotropes  $\{\psi_m\}_m$  rencontrant le fond  $\bar{\Omega}$  forme un frame, le frame de bandelettes, qui permet la représentation des images. Celui-ci satisfait l'inégalité de frame suivante

$$\|f\|^2 \leq \sum_{i \in I} \sum_m |\langle f, b_{i, m} \rangle|^2 + \sum_m |\langle f, \psi_m \rangle|^2 \leq (\#(I) + 1) \|f\|^2 \quad (1.43)$$

qui assure un contrôle sur l'énergie. Des algorithmes rapides de décomposition et de reconstruction associés à ce frame sont alors décrits à la fois dans le cadre continu et dans le cadre discret. Une méthode pour estimer la géométrie permettant une partition adaptée de l'image est présentée dans la section 3.2. Elle utilise la direction et la norme d'un gradient lissé de l'image pour obtenir des contours puis un procédé de croissance de région, un grass-fire, pour obtenir les domaines correspondants. L'intérêt pratique de cette construction des bandelettes est illustré par la construction d'un frame de bandelettes invariant par translation et son application au débruitage par seuillage dans la section 3.3.

L'annexe 3A présente en détail la construction des ondelettes sur l'intervalle et la démonstration de propriétés de régularité des ondelettes associées. L'annexe 3B est consacrée aux justifications théoriques de la méthode d'estimation de la géométrie à partir du gradient des fonctions lissées.

Le chapitre 4 présente les propriétés asymptotiques d'approximation non-linéaire du frame de bandelettes pour les fonctions du modèle et constitue la partie la plus théorique de cette thèse. Il débute par la définition dans la section 4.1 de contraintes que doivent satisfaire les domaines pour permettre les théorèmes d'approximation. A une certaine précision près  $\eta$ , le domaine associé à un contour doit être confiné, d'une largeur suffisante

autour du contour, et bien isolé, à une distance suffisante des autres contours. On montre alors que si la détection de la géométrie est précise à  $\eta$  près, en un sens que l'on définit, alors le grass-fire issu de cette géométrie estimée donne des domaines qui sont bien confinés et bien isolés à  $\eta$  près. On démontre alors dans la section 4.2 le théorème 4.2 d'approximation linéaire pour les images :

**Théorème 4.2.** *Soit  $f$  un fonction telle que, en dehors d'un ensemble de courbes dont les dérivées d'ordre  $\alpha$  des paramétrisations normales sont bornées, les dérivées partielles d'ordre  $\alpha$  sont bornées, il existe deux constantes  $K_1$  et  $K_2$  ne dépendant que de la fonction  $f$ , du noyau de lissage  $h$  et de l'ondelette  $\psi$  telles que pour tout  $\epsilon$ , si on connaît une détection à  $\eta = \inf(\epsilon, s)$  près de la géométrie et que cette géométrie estimée est uniformément dérivable alors on peut construire une approximation  $f_{s,\epsilon}$  de  $f_s$  à l'aide de  $M_{s,\epsilon}$  coefficients au total pour la géométrie et le frame de bandelettes où*

$$M_{s,\epsilon} \leq K_1 \epsilon^{-1/\alpha} \quad (1.44)$$

et

$$\|f_s - f_{s,\epsilon}\|_2^2 \leq K_2 \epsilon \quad (1.45)$$

soit

$$\|f_s - f_{s,\epsilon}\|_2^2 \leq K_1^\alpha K_2 M_{s,\epsilon}^{-\alpha} \quad (1.46)$$

où les constantes  $K_1$  et  $K_2$  ne dépendent que de la fonction  $f$ , du noyau de lissage  $h$  et des ondelettes utilisées.

Ce théorème constitue le résultat central de cette thèse avec la construction du frame lui-même et demande pour sa démonstration des lemmes sur l'approximation de la géométrie ainsi que sur l'approximation non-linéaire pour chaque domaine. On conclut alors ce chapitre dans la section 4.3 en exhibant une classe de fonctions, les fonctions étoilées introduites par Donoho [Don99], pour lesquelles on est capable de démontrer que la méthode de détection proposée permet d'obtenir une détection suffisamment précise au sens défini dans ce chapitre.

Dans l'annexe 4A, on démontre que le grass-fire issu d'une géométrie bien détectée donne des domaines isolés et confinés. Cette démonstration est technique et basée quasi entièrement sur le fait que les courbes sont bien approchées par leur polynôme de Taylor associé. L'annexe 4B contient la partie technique des démonstrations d'approximation non-linéaire du chapitre 4.

Enfin dans le chapitre 5, après avoir rappelé brièvement le contenu de cette thèse, on expose dans la section 5.1 quelques objections concernant la géométrie, l'utilisation d'un frame et la classe des fonctions du modèle. On présente alors des extensions possibles des bandelettes : en deux dimensions dans la section 5.2 et aux dimensions supérieures dans la section 5.3.





---

# Chapitre 2

## Bandelettes

---

<b>2.1 Géométrie</b>	<b>34</b>
2.1.1 Contours, courbes et flots	34
2.1.2 Estimation de la direction de régularité	35
<b>2.2 Bandelettes</b>	<b>35</b>
2.2.1 Déformation de l'espace	35
2.2.2 Relation flot-courbe	38
2.2.3 Opérateur de déformations sur les fonctions	41
2.2.4 Bandelettes.	42
2.2.5 Rôle et choix des deux bases	44
<b>2.3 Bandelettes et domaines</b>	<b>45</b>
2.3.1 Adaptation des bandelettes à un domaine	45
2.3.2 Segmentation	46
<b>2.4 Représentation</b>	<b>46</b>
2.4.1 Approche deux couches	47
2.4.2 Approche une couche	50

La plupart des représentations d'images utilisant la géométrie sont basées sur l'idée de contours. La détection de ceux-ci est un problème mal posé puisque la notion de contour elle-même est mal définie. Ici, on évite cette difficulté puisque la géométrie apparaît sous la forme de direction de régularité maximale locale, une notion mieux définie. Les bandelettes sont précisément construites pour suivre ces directions.

## 2.1 Géométrie

Le lien entre les directions de régularité maximale et contours est fort puisque la tangente à un contour est une direction de régularité maximale. La notion de direction de régularité est cependant plus générale et plus facile à estimer.

### 2.1.1 Contours, courbes et flots

Les approches issues de la vision recherchent les contours dans les images et les considèrent comme une source centrale d'information. La géométrie de l'image est représentée par ses contours, c'est-à-dire par des courbes.

Chaque courbe  $\mathcal{C}$  peut être paramétrée par sa paramétrisation normale, la paramétrisation par l'abscisse curviligne  $s$  :

$$\mathcal{C} = \{c(s) = (c_1(s), c_2(s)), s \in \mathbb{R}, c_1 : \mathbb{R} \mapsto [0, 1] \text{ et } c_2 : \mathbb{R} \mapsto [0, 1]\} \quad (2.1)$$

ou par n'importe quelle autre paramétrisation.

Au delà de l'information de position, la courbe donne une information de direction : sa tangente indique la direction qui ne la traverse pas et qui est donc une direction de régularité maximale.

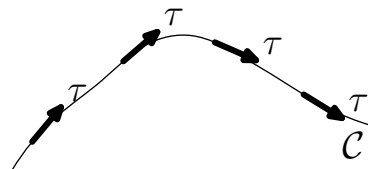


FIGURE 2.1 – Un contour  $\mathcal{C}$  et son flot  $\tau$  défini par sa tangente.

On parle de flot  $\tau$  le long du contour pour désigner le vecteur unitaire de cette direction de régularité maximale le long du contour :

$$\tau(c(s)) = c'(s) = \begin{pmatrix} c'_1(s) \\ c'_2(s) \end{pmatrix}. \quad (2.2)$$

Ce flot  $\tau$  peut s'étendre au voisinage du contour grâce à cette notion de régularité maximale et est beaucoup mieux défini que la position. En effet, pour tout contour la direction de régularité peut être mesurée tandis que la position ne peut être déterminée que dans le cas des contours nets.

## 2.1.2 Estimation de la direction de régularité

La direction de régularité maximale est simple à déterminer lorsque la fonction  $f$  est régulière, il s'agit de la direction orthogonale au gradient

$$\tau(x) = \frac{\nabla f(x)^\perp}{|\nabla f(x)|}. \quad (2.3)$$

Cette estimation n'est plus possible lorsque  $f$  n'est plus dérivable donc par exemple autour des discontinuités ou bien lorsqu'on introduit du bruit, qu'il soit un bruit additif ou un bruit de pixelisation, puisque le gradient n'est alors plus défini.

Afin d'estimer la direction de régularité dans ces cas, on utilise une technique classique de lissage utilisée couramment pour la détection [MH80, Can86, Jai89] : la fonction est convoluée avec un noyau de lissage d'échelle variable et le gradient est mesuré sur cette fonction lissée.

En effet si le noyau de lissage  $g$  est régulier alors la fonction  $g \star f$  est régulière et on peut calculer son gradient. Le flot  $\tau$  sera donc défini comme l'orthogonal de ce gradient

$$\tau(x) = \frac{\nabla(g \star f)(x)^\perp}{|\nabla(g \star f)(x)|}. \quad (2.4)$$

L'information de direction n'étant pertinente qu'aux endroits où la fonction a des transitions, le gradient n'est utilisé que s'il est suffisamment grand. Finalement, le compromis entre une échelle de lissage grande qui permet d'éliminer le bruit et une échelle de lissage petite qui permet une bonne précision se fait à l'aide d'un algorithme multi-échelles que l'on détaille dans la section 3.2 du chapitre suivant. La figure 2.2 illustre ces idées.

## 2.2 Bandelettes

Les bandelettes sont obtenues à partir d'une déformation locale  $w$  de l'espace permettant d'aligner la direction de régularité avec une direction fixe et de se ramener à une base séparable. Les bandelettes sont obtenues comme l'image par  $w^{-1}$  de cette base séparable de produits tensoriels de bases monodimensionnelles.

### 2.2.1 Déformation de l'espace

On souhaite trouver une transformation  $w$  du plan telle que l'action de son gradient  $\nabla w$  sur la direction  $\tau(x)$  au point  $x$  donne une direction constante  $\tau_0$

$$(\nabla w)(\tau(x)) = \tau_0 \quad (2.5)$$

afin de rectifier celle-ci. Une telle transformation n'existe pas pour tous les champs  $\tau$  mais nous allons exhiber un cas dans lequel ceci est possible au moins localement.

Si l'on revient à un contour net, l'idée est rectifier ce contour  $\mathcal{C}$ , c'est à dire de l'aligner avec une droite par exemple horizontale si celui-ci est plutôt horizontal. Deux transformations naturelles permettent ceci : la transformation qui rend verticale la direction orthogonale au contour et la transformation qui garde verticale la direction verticale. L'effet de ces deux transformations est présenté dans la figure 2.3.

La première transformation consiste le long du contour à transformer les droites orthogonales à la tangente en des droites verticales et à les translater verticalement pour aligner

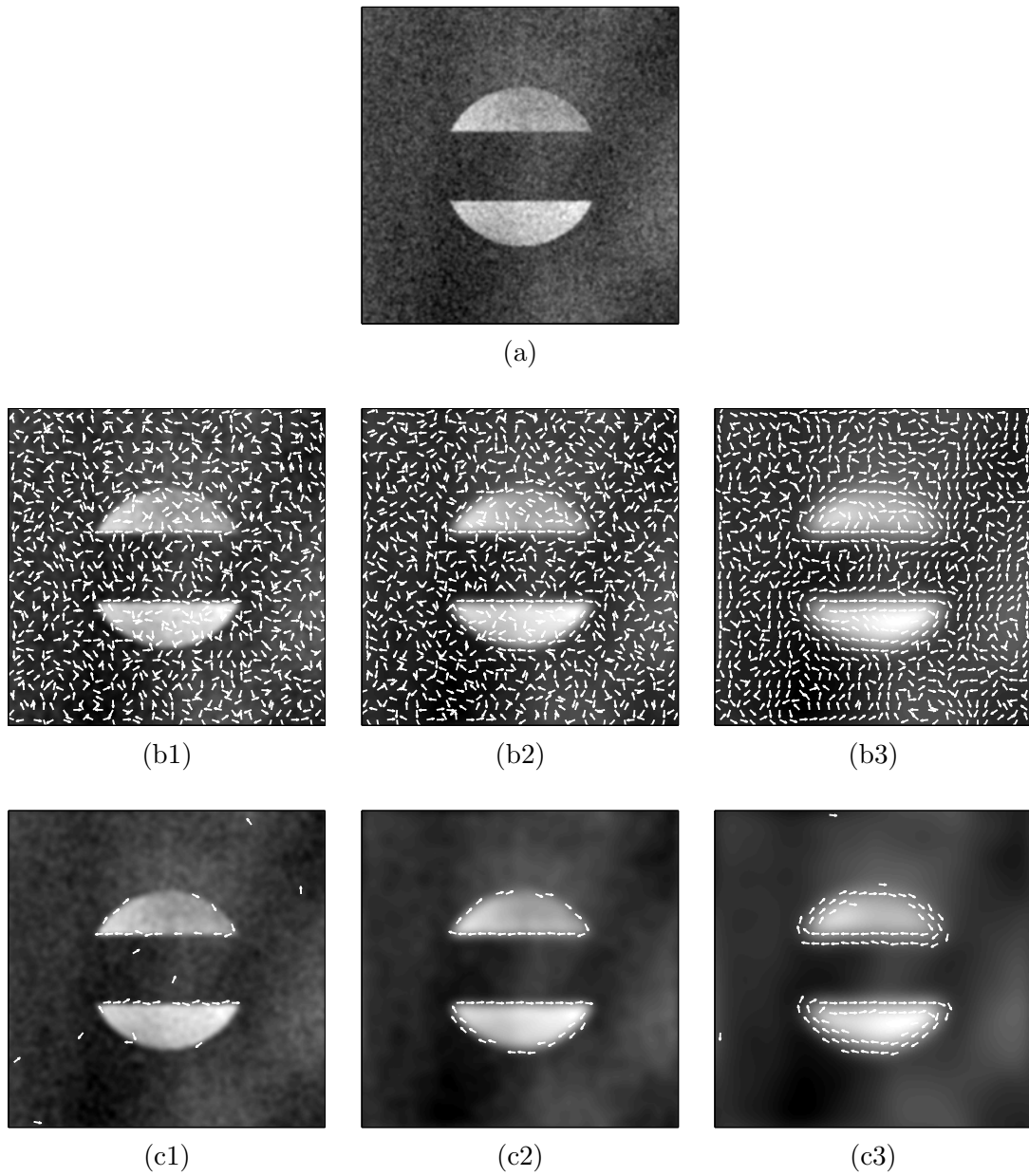


FIGURE 2.2 – Direction de régularité et lissage : (a) l'image originale bruitée, (b) les gradients de l'image lissée aux échelles 2 (b1), 4 (b2) et 8 (b3), (c) les gradients de l'image lissée au dessus d'un seuil aux mêmes échelles.

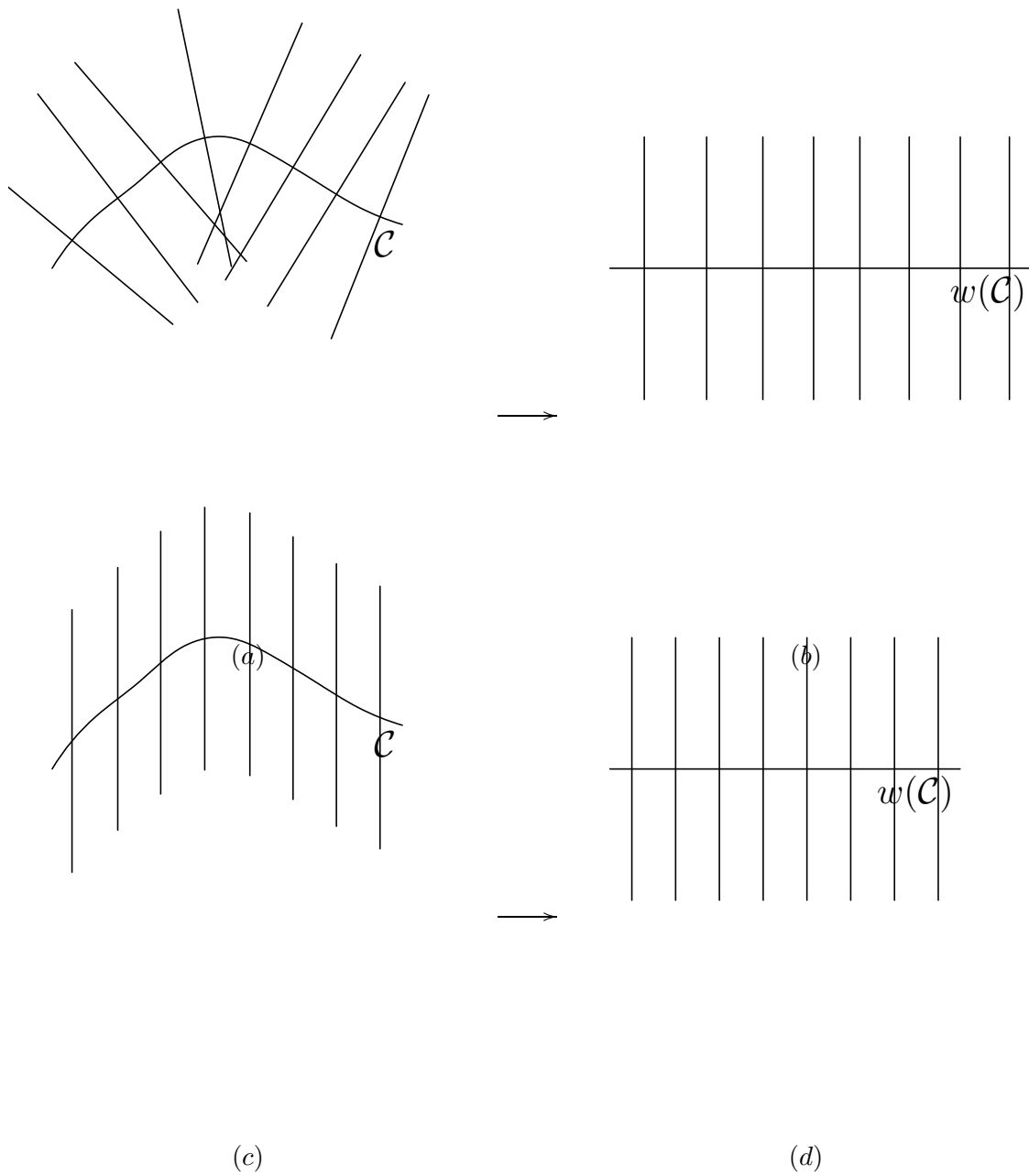


FIGURE 2.3 – Les deux transformations : (a) la courbe  $\mathcal{C}$  et des directions orthogonales à la tangente, (b) la courbe  $w(\mathcal{C})$  redressée par le premier procédé et les images des directions précédentes, (c) la courbe  $\mathcal{C}$  et des directions verticales, (d) la courbe  $w(\mathcal{C})$  redressée par le second procédé avec les directions verticales préservées.

les points du contour. Cette transformation suppose donc que le flot est constant le long de ces mêmes droites. Ceci est difficile à imposer car ces droites peuvent se croiser définissant deux flots pour le même point. De plus cette transformation n'est pas de jacobien 1 et ne conserve donc pas la norme  $L^2$ .

On préfère donc la seconde transformation. Celle-ci consiste le long du contour à transformer les droites verticales en des droites verticales et à les translater verticalement pour aligner le contour. Ceci impose que le flot soit constant dans la direction verticale et que celui-ci ne soit jamais vertical. La courbe  $\mathcal{C}$  peut dans ce cas être paramétrée par  $c$  de sorte que

$$\mathcal{C} = \{(x_1, c(x_1))\} \quad (2.6)$$

et la transformation  $w$  est alors

$$w : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x_1, x_2) & \mapsto & (x_1, x_2 - c(x_1)) \end{array} \quad (2.7)$$

qui est inversible et dont le jacobien vaut 1. Ceci assure donc une conservation de l'énergie.

Cette seconde transformation impose une limitation sur la tangente de la courbe : celle-ci ne doit jamais être verticale. Afin de contourner cette limitation, on doit segmenter l'image de sorte que dans chaque morceau soit la courbe est plutôt horizontale et n'admet pas de tangente verticale et on utilise la transformation précédente, soit la courbe est plutôt verticale et n'admet pas de tangente horizontale et on utilise la transformation précédente en inversant le rôle des deux directions.

On choisit donc de privilégier la seconde transformation qui impose donc que le flot soit constant le long de la direction verticale ou de la direction horizontale comme dans la figure 2.4. Si le flot original ne présente pas cette caractéristique, on l'approche pour s'y ramener.

## 2.2.2 Relation flot-courbe

Il existe une correspondance entre les flots constants le long de la direction verticale et jamais verticaux et les courbes dont la tangente n'est jamais verticale.

En effet, si l'on reprend la courbe  $\mathcal{C}$  introduite précédemment et paramétrée par

$$\mathcal{C} = \{(x_1, c(x_1))\} , \quad (2.8)$$

le flot  $\tau$  associé à cette courbe est donné par

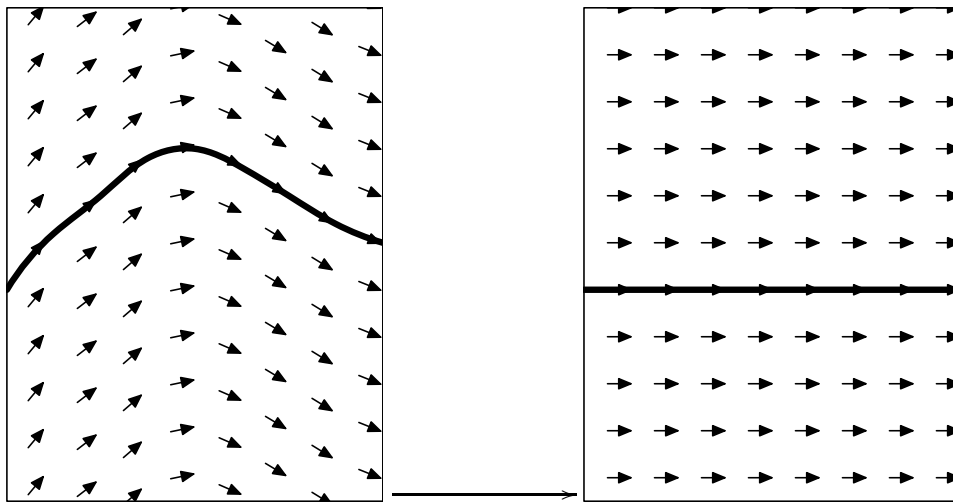
$$\tau(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + |c'(x_1)|^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ c'(x_1) \end{pmatrix} . \quad (2.9)$$

Réciproquement à tout flot  $\tau = \begin{pmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{pmatrix}$  constant le long de la verticale et jamais vertical, on peut associer des courbes horizontales : les courbes obtenues en intégrant le flot. Ces courbes sont données par

$$\mathcal{C} = \{(x_1, c(x_1))\} \quad (2.10)$$

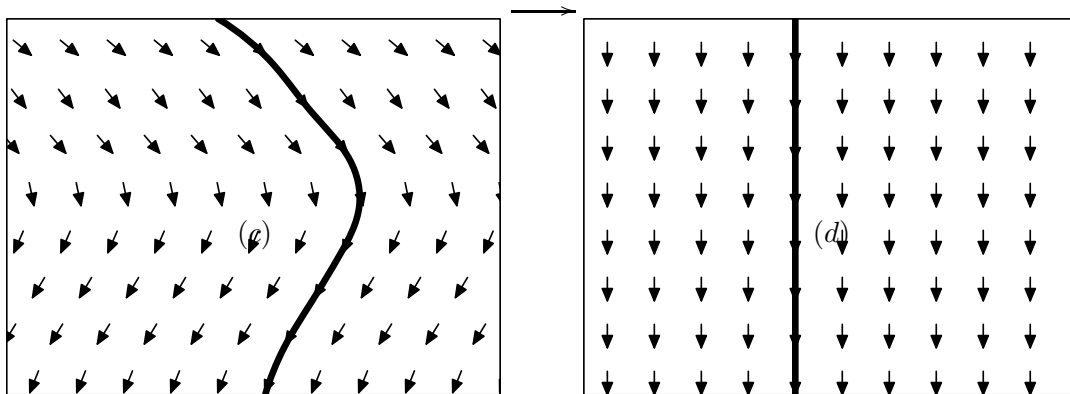
avec

$$c(x_1) = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\tau_2(u)}{\tau_1(u)} du + C \quad (2.11)$$



(a)

(b)



(c)

(d)

FIGURE 2.4 – Déformation horizontale et déformation verticale : (a) une courbe horizontale et son flot, (b) la courbe rectifiée et son flot strictement horizontal, (c) une courbe verticale et son flot, (d) la courbe rectifiée et son flot strictement vertical.

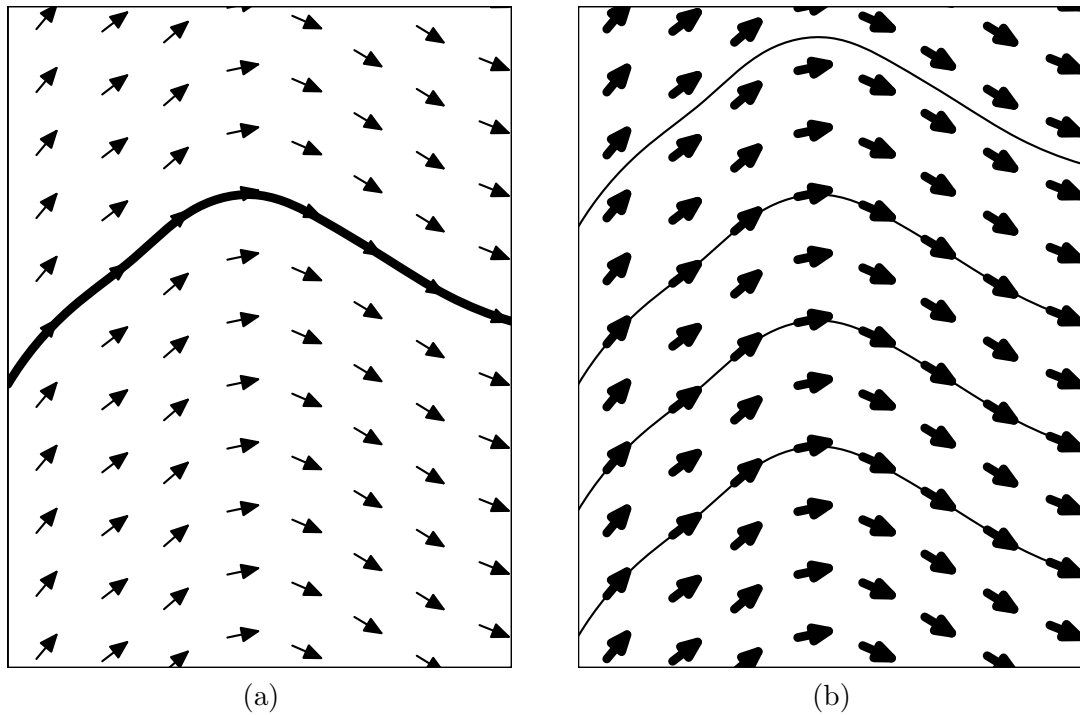


FIGURE 2.5 – Flot et courbes : (a) une courbe et son flot associé, (b) un flot et 4 courbes intégrales associées.

où  $x_0$  est un point de référence arbitraire et  $C$  une constante arbitraire.

Par la suite, on passe souvent d'une courbe à son flot ou du flot à l'une de ses courbes intégrales comme dans la figure 2.5.



### 2.2.3 Opérateur de déformations sur les fonctions

Dans le cas des flots constants selon la direction verticale et jamais verticaux, on définit un opérateur de déformation  $W$  qui agit sur les fonctions à partir de la transformation  $w$  définie en 2.2.1 de sorte que

$$Wf(w(x)) = f(x) \quad (2.12)$$

soit

$$Wf(x) = f(w^{-1}(x)) \quad (2.13)$$

$$Wf(x) = f(x_1, x_2 + c(x_1)) . \quad (2.14)$$

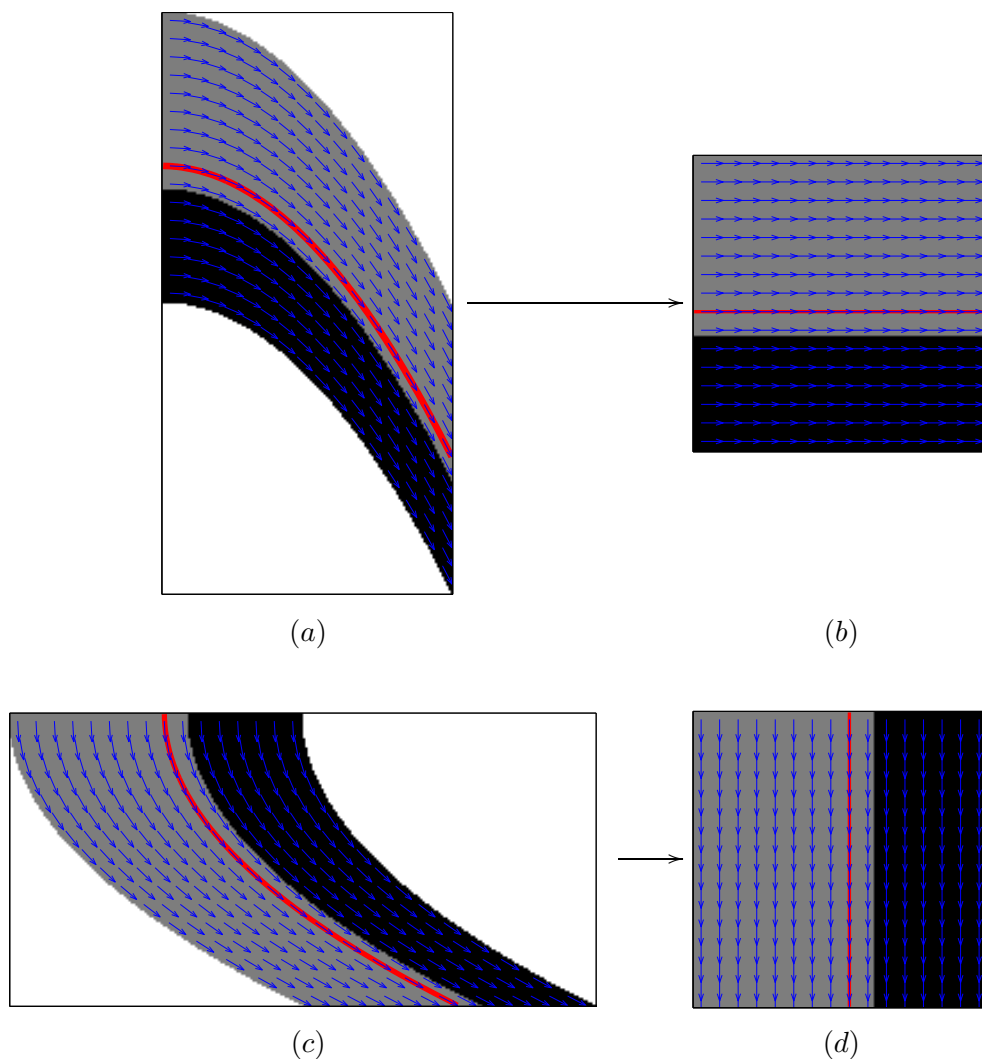


FIGURE 2.6 – Déformation des images : (a) une image ayant un flot horizontale, (b) son image par l'opérateur  $W$ , (c) une image ayant un flot verticale, (d) son image par l'opérateur  $W$ .

Cet opérateur  $W$  transporte une fonction discontinue le long de la courbe  $\mathcal{C}$  en une fonction discontinue le long de l'axe horizontal. Il est donc tel que si le flot  $\tau$  associé à

$\mathcal{C}$  définit une direction de régularité de la fonction  $f$  alors le flot horizontal définit une direction de régularité pour la fonction  $Wf$  comme l'illustre la figure 2.6.

## 2.2.4 Bandelettes

On souhaite maintenant introduire des bases utilisant la régularité géométrique. Pour cela, on se ramène à la fonction  $Wf$  obtenue en 2.2.3 qui est régulière selon la direction horizontale et potentiellement irrégulière selon la direction verticale. On décompose alors celle-ci dans une base séparable  $B$

$$B = \{g_{m_1}^1(x_1) g_{m_2}^2(x_2)\}_{m_1 \in \mathbb{Z}, m_2 \in \mathbb{Z}}. \quad (2.15)$$

où les familles  $\{g_{m_1}^1\}_{m_1 \in \mathbb{Z}}$  et  $\{g_{m_2}^2\}_{m_2 \in \mathbb{Z}}$  sont deux bases monodimensionnelles. Ceci permet de traiter différemment les deux directions.

On calcule dans cette décomposition des produits scalaires

$$\langle Wf, g_{m_1}^1 \otimes g_{m_2}^2 \rangle. \quad (2.16)$$

On se ramène à des produits scalaires avec  $f$  à l'aide de la transposée de l'opérateur  $W$

$$\langle Wf, g_{m_1}^1 \otimes g_{m_2}^2 \rangle = \langle f, W^*(g_{m_1}^1 \otimes g_{m_2}^2) \rangle \quad (2.17)$$

avec

$$W^*(g_{m_1}^1 \otimes g_{m_2}^2)(x_1, x_2) = g_{m_1}^1(x_1) g_{m_2}^2(x_2 - c(x_1)) \quad (2.18)$$

comme on le vérifie avec le calcul suivant :

$$\langle Wf, g_{m_1}^1(x_1) g_{m_2}^2(x_2) \rangle = \int_x Wf(x) g_{m_1}^1(x_1) g_{m_2}^2(x_2) dx \quad (2.19)$$

soit en insérant l'expression de  $Wf$

$$= \int_x f(x_1, x_2 + c(x_1)) g_{m_1}^1(x_1) g_{m_2}^2(x_2) dx \quad (2.20)$$

puis par un changement de variable en  $x_2$

$$= \int_x f(x_1, x_2) g_{m_1}^1(x_1) g_{m_2}^2(x_2 - c(x_1)) dx \quad (2.21)$$

$$\langle Wf, g_{m_1}^1(x_1) g_{m_2}^2(x_2) \rangle = \langle f, g_{m_1}^1(x_1) g_{m_2}^2(x_2 - c(x_1)) \rangle. \quad (2.22)$$

La transformation  $W$  étant unitaire, les produits scalaires

$$\langle f, W^*(g_{m_1}^1 \otimes g_{m_2}^2) \rangle \quad (2.23)$$

correspondent à la décomposition de  $f$  dans une base orthonormée, celle définie par

$$B_c = \{W^*(g_{m_1}^1 \otimes g_{m_2}^2)\}_{m_1 \in \mathbb{Z}, m_2 \in \mathbb{Z}} \quad (2.24)$$

$$B_c = \{g_{m_1}^1(x_1) g_{m_2}^2(x_2 - c(x_1))\}_{m_1 \in \mathbb{Z}, m_2 \in \mathbb{Z}}. \quad (2.25)$$

On appelle bandelette les éléments de cette base. La figure 2.7 représente des bandelettes pour lesquelles les deux bases utilisées sont des bases d'ondelettes à support compact.

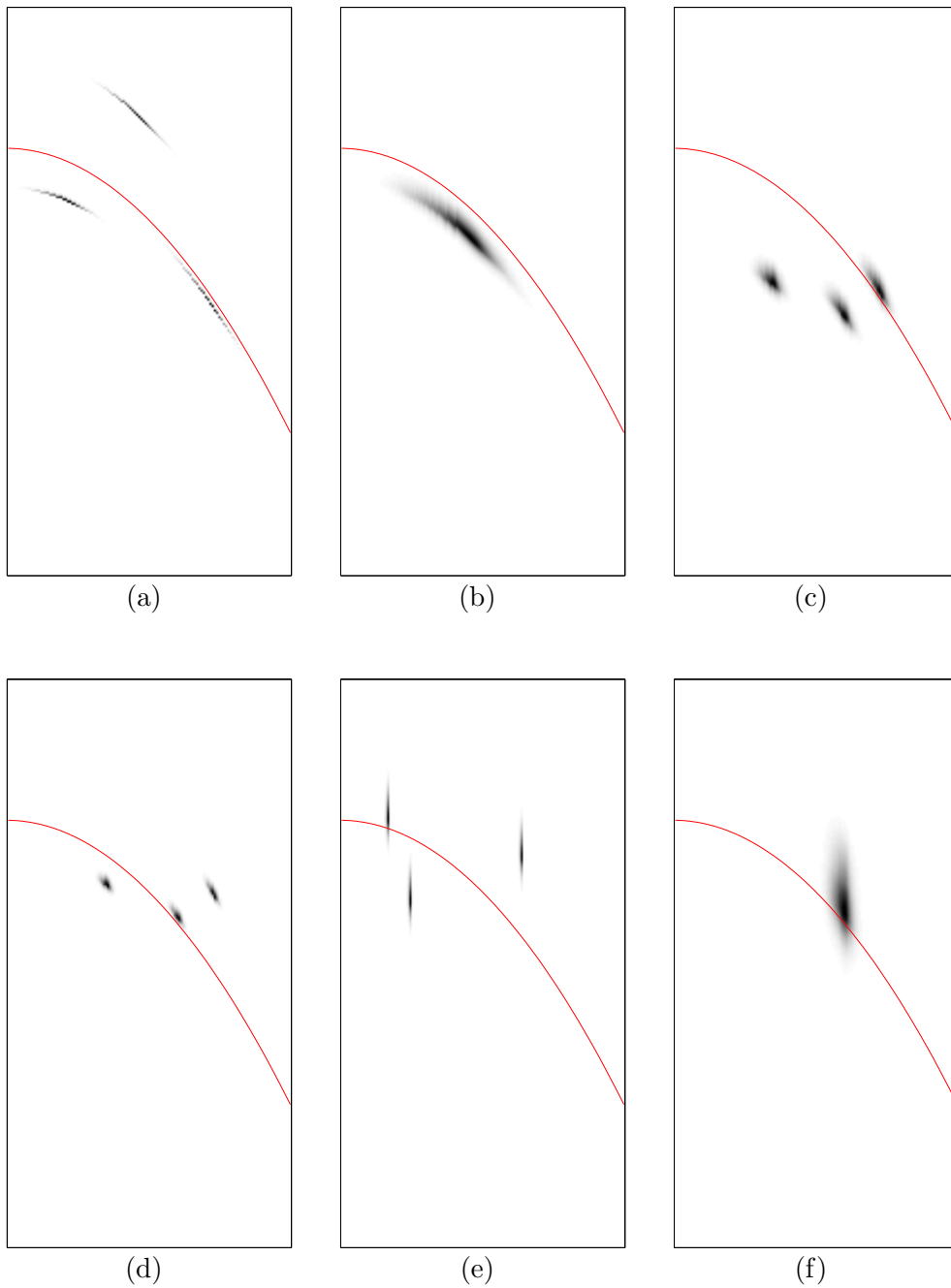


FIGURE 2.7 – Exemple de bandelettes : les bandelettes obtenues à partir d'un produit tensoriel d'ondelettes. Ces bandelettes suivent le contour et peuvent être (a) et (b) plutôt allongées dans la direction du contour, (c) et (d) quasi isotropes, (d) et (e) plutôt allongées dans la direction verticale.

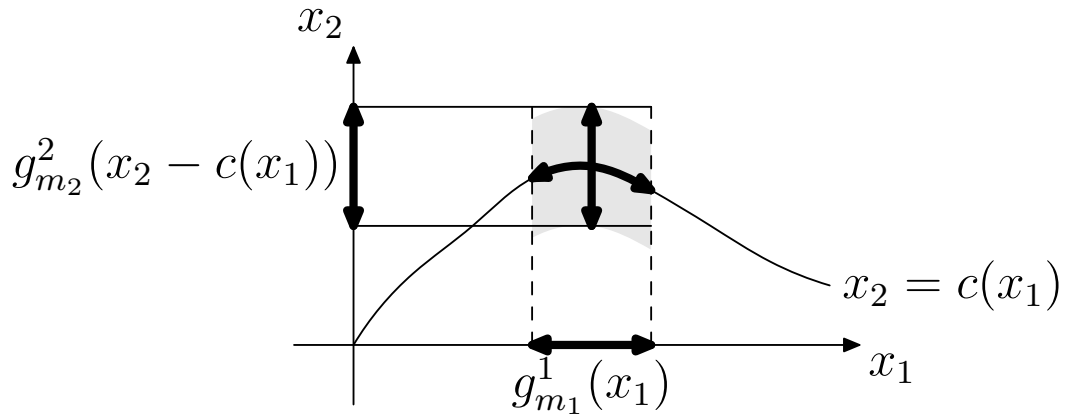


FIGURE 2.8 – Une bandelette au voisinage d’un contour paramétré par  $x_2 = c(x_1)$  : la bandelette  $g_{m_1}^1(x_1) g_{m_2}^2(x_2 - c(x_1))$  a un support (grisé) qui suit le contour, l’analyse selon  $x_1$  suit le contour tandis que celle selon  $x_2$  le traverse.

## 2.2.5 Rôle et choix des deux bases

Le choix des bases  $\{g_{m_1}^1\}$  et  $\{g_{m_2}^2\}$  est crucial pour l’efficacité des bandelettes. Leurs rôles sont très différents bien que finalement on choisisse d’utiliser des ondelettes monodimensionnelles dans les deux cas.

Supposons que  $f$  soit une fonction régulière de part et d’autre d’une courbe  $\mathcal{C}$  paramétrée par  $(x_1, c(x_1))$  comme dans la figure 2.8, les coefficients de bandelettes de  $f$  sont obtenus par

$$\langle f, W^*(g_{m_1}^1 \otimes g_{m_2}^2) \rangle = \langle Wf, g_{m_1}^1 \otimes g_{m_2}^2 \rangle \quad (2.26)$$

$$\langle f, W^*(g_{m_1}^1 \otimes g_{m_2}^2) \rangle = \langle f(x_1, x_2 - c(x_1)), g_{m_1}^1(x_1) g_{m_2}^2(x_2) \rangle. \quad (2.27)$$

La base  $\{g_{m_1}^1\}_{m_1 \in \mathbb{Z}}$  est alignée avec la direction de régularité et doit donc permettre d’exploiter ceci. La base  $\{g_{m_2}^2\}_{m_2 \in \mathbb{Z}}$  est alignée avec une direction dans laquelle la fonction peut présenter des singularités, elle doit donc permettre de représenter efficacement celles-ci.

La base  $\{g_{m_2}^2\}$  est utilisée pour capturer une régularité uniforme. Le choix pour cette base est donc a priori très large : des bases de Fourier aux bases d’ondelettes à support compact [Dau98] en passant par les bases de cosinus [RY90]. Cependant, comme on le voit dès la section suivante, cette analyse se fait souvent sur un intervalle. Il faut donc que les propriétés d’approximation des fonctions régulières se transportent sur l’intervalle. Ce n’est le cas ni pour Fourier ni pour les bases de cosinus tandis que les ondelettes le permettent.

La base  $\{g_{m_1}^1\}$ , pour sa part, doit permettre de reproduire efficacement les singularités. Dans la première version des bandelettes, celle notamment présentée à Vancouver [LPM00], la base choisie est une base d’ondelettes fovéales [Mal01]. Cette base est adaptée aux singularités centrées en un point connu, celui du contour ici. Cependant, cette base nécessite une localisation précise du contour et n’est pas adaptée à des singularités lissées, elle a donc été abandonnée pour une base d’ondelettes monodimensionnelles. Celle-ci permet en effet de reconstruire la singularité même si la position de celle-ci n’est pas précisément connue ou si celle-ci est lissée. Pour obtenir de la régularité le long du contour il suffit alors que la direction de celui-ci et non pas sa position soit bien estimée.

Dorénavant, les bandelettes sont issues d'un produit tensoriel de deux ondelettes monodimensionnelles à support compact. Ces produits tensoriels correspondent aux ondelettes anisotropes de la section 1.3.3.2. Les bases de bandelettes de l'espace tout entier sont de la forme

$$B_c = \{W^*(\psi_{j_1, k_1} \otimes \psi_{j_2, k_2})\}_{(j_1, k_1) \in \mathbb{Z}^2, (j_2, k_2) \in \mathbb{Z}^2} \quad (2.28)$$

$$B_c = \{\psi_{j_1, k_1}(x_1) \psi_{j_2, k_2}(x_2 - c(x_1))\}_{(j_1, k_1) \in \mathbb{Z}^2, (j_2, k_2) \in \mathbb{Z}^2} . \quad (2.29)$$

## 2.3 Bandelettes et domaines

L'hypothèse d'un flot qui n'est jamais horizontal ou bien jamais vertical implique une segmentation de l'espace de départ et donc une adaptation des bandelettes à des domaines. Ceci est réalisé en utilisant des transformées en ondelettes sur l'intervalle pour garantir que les bandelettes restent à l'intérieur du domaine.

### 2.3.1 Adaptation des bandelettes à un domaine

Les bandelettes associées à un domaine ne doivent pas être influencées par l'extérieur du domaine et donc ne doivent pas sortir de celui-ci.

Pour ceci, on pourrait choisir de ne conserver que les bandelettes de l'espace tout entier dont le support est inclus dans le domaine. On préfère cependant une construction légèrement différente permettant un meilleur traitement des bords.

Soit  $\Omega$  un domaine et  $\mathcal{C}$  une courbe horizontale paramétrée par  $c$ , les bandelettes sur ce domaine sont construites de la manière suivante. Pour toutes les fonctions de l'ensemble  $\{\psi_{j_2, k_2}\}_{j_2 \in \mathbb{Z}, k_2 \in \mathbb{Z}}$ , on considère l'ensemble des abscisses  $x_1$  tel que le long de la droite verticale d'abscisse  $x_1$  le support de  $\psi_{j_2, k_2}$  décalé verticalement de  $c(x_1)$  reste à l'intérieur du domaine :

$$\{x_i, (x_i, c(x_i) + \mathcal{S}(\psi_{j_2, k_2})) \subset \Omega\} \quad (2.30)$$

où  $\mathcal{S}(\psi_{j_2, k_2})$  est le support de  $\psi_{j_2, k_2}$ .

Lorsque cet ensemble est non vide, il est constitué d'une union d'intervalles disjoints. La base  $\{\psi_{j_1, k_1}\}$  utilisée est alors constituée de l'union des bases d'ondelettes sur chacun de ces différents intervalles.

Les bandelettes ainsi obtenues sont donc de la forme

$$W^*(\psi_{j_1, k_1} \otimes \psi_{j_2, k_2}) = \psi_{j_1, k_1}(x_1) \psi_{j_2, k_2}(x_2 - c(x_1)) \quad (2.31)$$

où le choix de la base  $\{\psi_{j_1, k_1}\}_{j_1, k_1}$  dépend maintenant de  $j_2$  et de  $k_2$  ce que l'on peut traduire en notant ces bandelettes

$$W^*(\psi_{j_1, k_1, j_2, k_2} \otimes \psi_{j_2, k_2}) = \psi_{j_1, k_1, j_2, k_2}(x_1) \psi_{j_2, k_2}(x_2 - c(x_1)) \quad (2.32)$$

pour souligner cette dépendance.

Dans le chapitre suivant, on montre que cette transformée en ondelettes peut être choisie pour que, sauf aux bords, les ondelettes anisotropes ainsi obtenues soient exactement les ondelettes anisotropes obtenues sur l'espace tout entier.

### 2.3.2 Segmentation

Les domaines dans lesquels sont définies ces bandelettes sont des domaines où le flot est constant le long de la direction horizontale (respectivement verticale) et jamais horizontal (respectivement vertical). Ceci suppose donc une partition du domaine de définition de la fonction en différents domaines.

Ces domaines sont de trois types : des domaines horizontaux associés à des flots horizontaux, des domaines verticaux associés à des flots verticaux et des domaines de fond auxquelles aucun flot n'est associé.

Les domaines orientés doivent être en nombre fini et sont déterminés à l'aide d'une procédure de segmentation du flot estimé. Cette procédure est présentée en détail dans la section 3.2.2 du chapitre suivant et son résultat sur l'image de Lenna est donné dans la figure 2.9.



FIGURE 2.9 – Exemple de segmentation obtenue pour l'image de Lenna : chaque domaine contient une courbe intégrale représentant le flot.

## 2.4 Représentation

L'union des bandelettes dans les domaines disjoints est une famille orthonormée mais pas une base de l'espace entier.

Deux techniques sont notamment possibles pour obtenir une représentation complète : une technique à deux couches, une représentation de type  $u + v$ , ou une technique fondée sur la construction d'un frame en ajoutant à cette famille une famille complémentaire permettant d'engendrer tout l'espace.

Souvent utilisée dans les méthodes basées sur les contours, la première technique consiste à reconstruire une première fonction à partir des coefficients de bandelettes dans les domaines, et à compléter cette première fonction par la représentation dans une base orthonormée du résidu, différence entre cette première reconstruction et l'image originale.

La seconde suppose la construction d'un frame en complétant la famille de fonctions déjà obtenue.

### 2.4.1 Approche deux couches

Les différents domaines  $\Omega_i$  associés à des déformations  $w_i$  sont supposés déjà définis. Sur chacun d'eux, on a des bandelettes  $b_{i,m}$  de la forme

$$b_{i,m}(x_1, x_2) = \psi_{m_1, m_2}(x_1) \psi_{m_2}(x_2 - c_i(x_1)) \quad \text{avec } m = (m_1, m_2) \quad (2.33)$$

où  $c_i$  est la courbe associée à la déformation  $w_i$ . La décomposition en bandelettes de la fonction  $f$  donne les produits scalaires suivants

$$\{\langle f, b_{i,m} \rangle\}_{i,m}. \quad (2.34)$$

Les bandelettes formant une famille orthonormée, la projection  $\tilde{f}$  de  $f$  sur l'espace engendré par les bandelettes s'obtient simplement comme

$$\tilde{f} = \sum_{i,m} \langle f, b_{i,m} \rangle b_{i,m}. \quad (2.35)$$

La fonction  $\tilde{f}$  s'annule en dehors du support des  $b_{i,m}$  et donc à l'extérieur des domaines. Elle présente même des discontinuités aux extrémités des intervalles utilisés dans la transformation en ondelettes. Le résidu n'est donc pas régulier comme le montre la figure 2.10.

Pour obtenir une reconstruction plus régulière on utilise une idée similaire à celle utilisée par Carlsson [Car88]. On recherche une fonction  $f_0$  ayant les bons produits scalaires mais au lieu de chercher celle dont la norme  $L^2$  est minimale, on recherche celle dont la norme du gradient est minimale :

$$f_0 = \operatorname{argmin} \int |\nabla \tilde{f}(x)|^2 dx \quad (2.36)$$

$$f_0 = \operatorname{argmin} \|\nabla \tilde{f}\|^2. \quad (2.37)$$

sous la contrainte

$$\langle \tilde{f}, b_{i,m} \rangle = \langle f, b_{i,m} \rangle, \quad \forall i, \forall m \quad (2.38)$$

Cette reconstruction est implémentée par une technique de relaxation : on choisit  $\epsilon$  petit et on cherche à minimiser l'énergie suivante

$$E(\tilde{f}) = \|\nabla \tilde{f}\|^2 + \frac{1}{\epsilon} \sum_{i,m} |\langle \tilde{f}, b_{i,m} \rangle - \langle f, b_{i,m} \rangle|^2. \quad (2.39)$$

La reconstruction est obtenue par un algorithme de diffusion associé à ce problème. Minimiser l'énergie  $E$  est en effet équivalent à résoudre le problème eulérien associé

$$-\Delta \tilde{f} + \frac{1}{\epsilon} \sum_{i,m} (\langle \tilde{f}, b_{i,m} \rangle - \langle f, b_{i,m} \rangle) b_{i,m} = 0. \quad (2.40)$$

Ce problème est un problème classique d'analyse : il s'agit d'une équation elliptique dont on connaît l'existence et l'unicité de la solution. Sa discrétisation conduit à un système linéaire



FIGURE 2.10 – Reconstructions et résidus avec les deux méthodes : (a) la reconstruction par la projection orthogonale dans l'espace engendré par les bandelettes, (b) le résidu obtenu qui n'est pas régulier, (c) la reconstruction par minimisation du gradient, (d) le résidu obtenu qui est régulier.



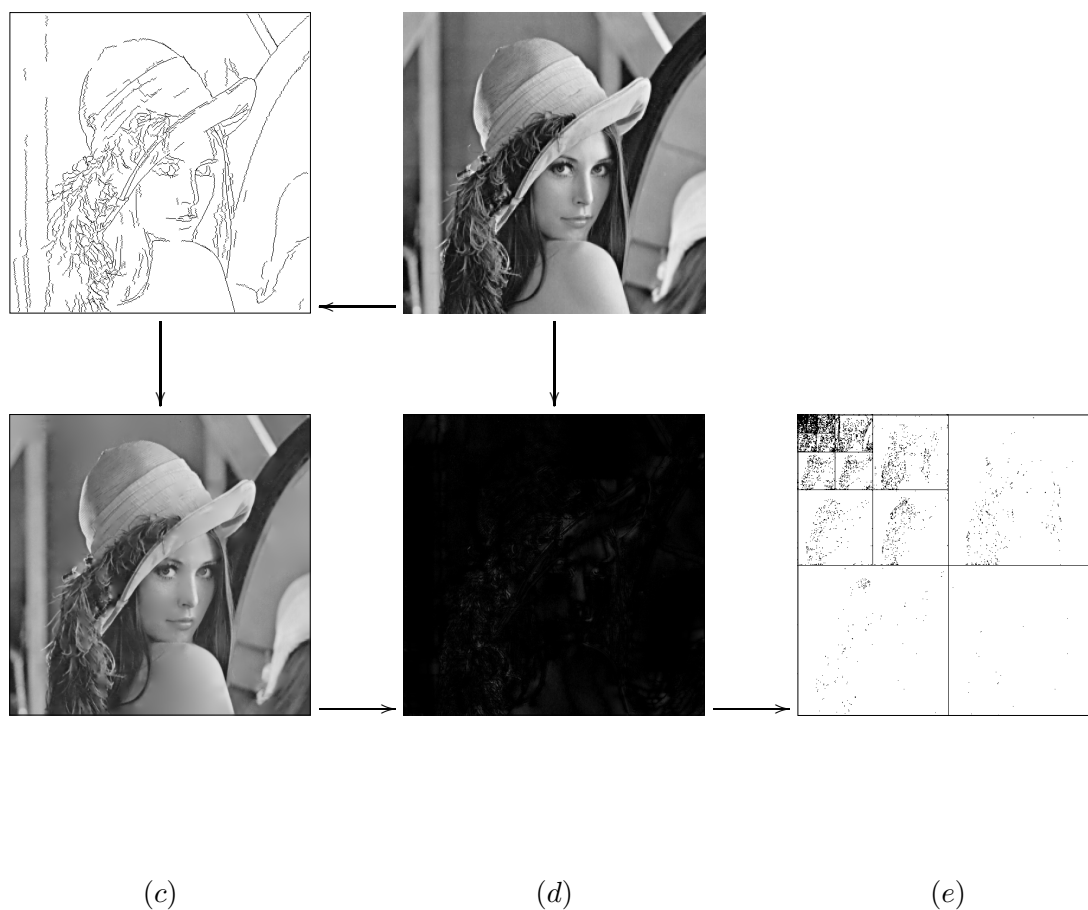


FIGURE 2.11 – Représentation en bandelettes à deux couches : (a) l'image originale, (b) la géométrie extraite de l'image originale, (c) la reconstruction obtenue à l'aide des coefficients de bandelettes associées à la géométrie, (d) le résidu obtenu par différence entre la reconstruction et l'image originale, (e) la représentation en ondelettes de ce résidu.

où la matrice est définie positive et se résout numériquement à l'aide d'un algorithme de gradient conjugué [CGO76, Meu99]. Le résidu ainsi obtenu est ainsi beaucoup plus régulier comme on le vérifie dans la figure 2.10.

Ce résidu est ensuite représenté dans une base d'ondelettes isotropes pour donner la représentation en bandelettes à deux couches de la figure 2.11.

Cette technique est la première à avoir été employée au cours de la thèse [LPM00, LPM01] et a permis d'obtenir des résultats d'approximation et de débruitage. Deux problèmes liés à cette représentation nous ont conduit à rechercher une autre approche. D'une part, l'utilisation de la diffusion pour la reconstruction à partir des coefficients de bandelettes ne permet pas de contrôler l'erreur dans cette reconstruction lorsqu'on modifie les coefficients. D'autre part, du fait de la non orthogonalité des deux représentations, le résidu au voisinage des contours nécessite encore, malgré son apparente régularité, des coefficients d'ondelettes pour être bien représenté.

## 2.4.2 Approche une couche

La construction d'un frame de bandelettes permet de se placer dans le cadre de l'analyse harmonique et d'appliquer toute la théorie de l'approximation non-linéaire qui en découle.

Le chapitre suivant est consacré à sa construction : on construit le frame à partir de bandelettes obtenues comme précédemment par produit tensoriel de deux ondelettes dans les domaines, d'ondelettes isotropes situées à l'extérieur de ces domaines et de fonctions de bords permettant de rendre complète cette représentation.

Cette représentation permet d'obtenir des résultats à la fois pratiques et théoriques présentés dans les chapitres suivants.

---

# Chapitre 3

## Frame de bandelettes : construction et application au débrui- tage

---

<b>3.1</b>	<b>Frame de bandelettes . . . . .</b>	<b>52</b>
3.1.1	Bandelettes de l'espace tout entier . . . . .	52
3.1.2	Ondelettes et espaces multirésolutions. . . . .	52
3.1.2.1	Dimension 1 . . . . .	53
3.1.2.2	Dimension 2 . . . . .	53
3.1.3	Bandelettisation de l'espace tout entier . . . . .	55
3.1.4	Domaines et bandelettisation . . . . .	57
3.1.5	Frame de bandelettes et reconstruction . . . . .	63
3.1.6	Décomposition en opérateurs par domaines. . . . .	65
3.1.7	Transformée en bandelette discrète . . . . .	66
3.1.8	L'opérateur de translation . . . . .	68
<b>3.2</b>	<b>Mesure de la géométrie . . . . .</b>	<b>68</b>
3.2.1	Estimation de la direction de régularité . . . . .	68
3.2.2	Décomposition en domaines . . . . .	72
<b>3.3</b>	<b>Débruitage . . . . .</b>	<b>78</b>
3.3.1	Débruitage par seuillage . . . . .	78
3.3.2	Frame de bandelettes invariant par translation . . . . .	79
3.3.3	Estimation de la géométrie . . . . .	80
3.3.4	Résultats numériques . . . . .	80

La représentation à une couche basée sur les bandelettes prend la forme d'un frame : c'est-à-dire d'une famille génératrice qui possède une propriété de préservation de l'énergie  $L^2$ . On présente ici la construction de ce frame à la fois d'un point de vue continu et d'un point de vue discret. Une méthode permettant d'estimer la géométrie des images nécessaire à cette représentation est ensuite présentée. Cette représentation est alors utilisée dans le cadre d'un problème de débruitage.

## 3.1 Frame de bandelettes

La construction du frame de bandelettes est basée sur la possibilité d'obtenir les ondelettes anisotropes à partir des ondelettes isotropes par changement de base. Celui-ci, à la base du procédé de bandelettisation, permet la construction d'une famille orthonormée de bandelettes associée à un domaine et celle d'un frame associé à l'ensemble des domaines.

### 3.1.1 Bandelettes de l'espace tout entier

En reprenant les notations de la section 2.2, si  $\mathcal{C}$  est une courbe horizontale paramétrée par  $c$ ,  $w$  la transformation et  $W$  l'opérateur associés, la base de bandelettes  $B$  de l'espace tout entier est définie par le transport par  $W^*$ , l'opérateur transposé de l'opérateur  $W$ , d'une base d'ondelettes anisotropes :

$$B = \{W^*(\psi_{j_1, k_1} \otimes \psi_{j_2, k_2})\}_{(j_1, k_1) \in \mathbb{Z}^2, (j_2, k_2) \in \mathbb{Z}^2} \quad (3.1)$$

$$= \{\psi_{j_1, k_1}(x_1) \psi_{j_2, k_2}(x_2 - c(x_1))\}_{(j_1, k_1) \in \mathbb{Z}^2, (j_2, k_2) \in \mathbb{Z}^2} \quad (3.2)$$

où les  $\psi_{j, k}$  désignent les éléments d'une base d'ondelettes à support compact. On notera cette base de bandelettes

$$B = \{b_{j_1, j_2, k_1, k_2}\}_{(j_1, j_2) \in \mathbb{Z}^2, (k_1, k_2) \in \mathbb{Z}^2} \quad (3.3)$$

$$B = \{b_{j_1, j_2, k}\}_{(j_1, j_2) \in \mathbb{Z}^2, k \in \mathbb{Z}^2} \quad (3.4)$$

ou bien encore

$$B = \{b_m\}_{m \in \mathbb{Z}^4} . \quad (3.5)$$

Il est important de rappeler que

$$\langle f, W^*(\psi_{j_1, k_1} \otimes \psi_{j_2, k_2}) \rangle = \langle Wf, \psi_{j_1, k_1} \otimes \psi_{j_2, k_2} \rangle \quad (3.6)$$

c'est-à-dire que l'on peut calculer les coefficients de bandelettes comme des coefficients d'ondelettes anisotropes de la fonction déformée  $Wf$ . Ceci est en effet à la base du procédé de bandelettisation qui permet un calcul efficace de ces produits scalaires à partir d'une transformée en ondelettes isotropes de la fonction  $Wf$ .

### 3.1.2 Ondelettes et espaces multirésolutions

On revient dans cette section sur la construction des espaces multirésolutions à partir des ondelettes et en particulier sur la différence de construction permettant d'obtenir soit les ondelettes isotropes soit les ondelettes anisotropes. Ces différences sont à la base du procédé de bandelettisation.

### 3.1.2.1 Dimension 1

Comme on l'a rappelé en introduction, les bases d'ondelettes sont construites à partir d'une unique fonction  $\psi$  dilatée par des facteurs d'échelles dyadiques  $2^j$  et traduite par des facteurs  $2^j$ . La fonction  $\psi$  peut-être choisie de sorte que la famille

$$\left\{ \frac{1}{2^{j/2}} \psi\left(\frac{x - 2^j k}{2^j}\right) = \psi_{j,k}(x) \right\}_{j \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}} \quad (3.7)$$

forme une base orthonormée de  $L^2(\mathbb{R})$ .

Ces ondelettes  $\psi$  sont construites à partir d'une fonction d'échelle  $\phi$  satisfaisant

$$\{\phi(x - k)\}_{k \in \mathbb{Z}} \text{ est une famille orthonormée,} \quad (3.8)$$

$$\phi(x/2) \in V_0^1 = \text{Vect} \{\phi(x - k)\}_{k \in \mathbb{Z}} . \quad (3.9)$$

et telle que les espaces  $V_j^1$  définis par

$$V_j^1 = \text{Vect} \left\{ \frac{1}{2^{j/2}} \phi\left(\frac{x - k2^j}{2^j}\right) = \phi_{j,k} \right\}_{k \in \mathbb{Z}} \quad (3.10)$$

satisfont

$$\bigcap_j V_j^1 = \{0\} \quad (3.11)$$

$$\bigcup_j V_j^1 = L^2(\mathbb{R}) . \quad (3.12)$$

La suite décroissante des espaces  $V_j^1$  forme une approximation multirésolution. Pour chaque  $j$ , on définit l'espace de détail  $W_j^1$  comme le complément orthogonal de  $V_j^1$  dans  $V_{j-1}^1$ . On a donc

$$V_{j-1}^1 = V_j^1 \oplus W_j^1 \quad (3.13)$$

et donc

$$L^2(\mathbb{R}) = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} W_j^1 . \quad (3.14)$$

Les ondelettes  $\psi$  sont alors construites de sorte que les ondelettes  $\psi_{j,k}$  à une échelle  $2^j$  donnée forment une base orthonormée de  $W_j^1$  :

$$W_j^1 = \left\{ \frac{1}{2^{j/2}} \psi\left(\frac{x - 2^j k}{2^j}\right) = \psi_{j,k}(x) \right\}_{k \in \mathbb{Z}} . \quad (3.15)$$

### 3.1.2.2 Dimension 2

Les ondelettes peuvent être étendues en dimension 2 par un procédé de tensorisation : on définit les espaces  $V_j^2$  comme le produit tensoriel des espaces  $V_j^1$  :

$$V_j^2 = V_j^1 \otimes V_j^1 \quad (3.16)$$

$$= \text{Vect} \{\phi_{j,k_1} \otimes \phi_{j,k_2}\}_{k_1 \in \mathbb{Z}, k_2 \in \mathbb{Z}} \quad (3.17)$$

$$V_j^2 = \text{Vect} \{\phi_{j,k_1}(x_1) \phi_{j,k_2}(x_2)\}_{k_1 \in \mathbb{Z}, k_2 \in \mathbb{Z}} . \quad (3.18)$$

Ces espaces  $V_j^2$  forment une suite décroissante d'espaces formant une approximation multi-résolution. Comme en dimension 1, on définit l'espace de détail  $W_j^2$  comme le complément orthogonal de  $V_j^2$  dans  $V_{j-1}^2$

$$V_{j-1}^2 = V_j^2 \oplus W_j^2 . \quad (3.19)$$

Les ondelettes sont alors obtenues comme des bases des espaces de détail. La construction classique est basée sur la décomposition suivante

$$V_{j-1}^2 = V_{j-1}^1 \otimes V_{j-1}^1 \quad (3.20)$$

$$= (V_j^1 \oplus W_j^1) \otimes (V_j^1 \oplus W_j^1) \quad (3.21)$$

$$V_{j-1}^2 = (V_j^1 \otimes V_j^1) \oplus (V_j^1 \otimes W_j^1) \oplus (W_j^1 \otimes V_j^1) \oplus (W_j^1 \otimes W_j^1) \quad (3.22)$$

et donc par identification

$$W_j^2 = (V_j^1 \otimes W_j^1) \oplus (W_j^1 \otimes V_j^1) \oplus (W_j^1 \otimes W_j^1) . \quad (3.23)$$

On en déduit une base de  $W_j^2$  comme union des trois bases naturelles de chacun de ces sous-espaces :

$$W_j^2 = \text{Vect} \{ \phi_{j,k_1} \otimes \psi_{j,k_2} \}_{k_1 \in \mathbb{Z}, k_2 \in \mathbb{Z}} \oplus \text{Vect} \{ \psi_{j,k_1} \otimes \phi_{j,k_2} \}_{k_1 \in \mathbb{Z}, k_2 \in \mathbb{Z}} \\ \oplus \text{Vect} \{ \psi_{j,k_1} \otimes \psi_{j,k_2} \}_{k_1 \in \mathbb{Z}, k_2 \in \mathbb{Z}} \quad (3.24)$$

$$W_j^2 = \text{Vect} \{ \psi_{j,k}^1 \}_{k \in \mathbb{Z}^2} \oplus \text{Vect} \{ \psi_{j,k}^2 \}_{k \in \mathbb{Z}^2} \oplus \text{Vect} \{ \psi_{j,k}^3 \}_{k \in \mathbb{Z}^2} . \quad (3.25)$$

On obtient ainsi les trois types d'ondelettes isotropes par échelle

$$\psi_{j,k}^o(x) = \frac{1}{2^j} \psi^k \left( \frac{x - 2^j k}{2^j} \right) \quad o \in 1, 2, 3 \quad (3.26)$$

avec

$$\psi^1(x) = \phi(x_1) \psi(x_2) \quad (3.27)$$

$$\psi^2(x) = \psi(x_1) \phi(x_2) \quad (3.28)$$

$$\psi^3(x) = \psi(x_1) \psi(x_2) . \quad (3.29)$$

La famille d'ondelettes anisotropes est obtenue en utilisant une base différente pour  $W_j^2$  :

$$W_j^2 = (V_j^1 \otimes W_j^1) \oplus (W_j^1 \otimes V_j^1) \oplus (W_j^1 \otimes W_j^1) \quad (3.30)$$

$$= \left( \left( \bigoplus_{j_1 > j} W_{j_1}^1 \right) \otimes W_j^1 \right) \oplus \left( W_j^1 \otimes \left( \bigoplus_{j_1 > j} W_{j_1}^1 \right) \right) \oplus (W_j^1 \otimes W_j^1) \quad (3.31)$$

$$= \left( \bigoplus_{j_1 > j} (W_{j_1}^1 \otimes W_j^1) \right) \oplus \left( \bigoplus_{j_2 > j} (W_j^1 \otimes W_{j_2}^1) \right) \oplus (W_j^1 \otimes W_j^1) . \quad (3.32)$$

Cette décomposition utilise la relation monodimensionnelle suivante :

$$V_j^1 = \bigoplus_{j_1 > j} W_{j_1}^1 . \quad (3.33)$$

On obtient alors une base de  $W_j^2$  sous la forme

$$W_j^2 = \left( \bigoplus_{j_1 > j} \text{Vect} \{ \psi_{j_1, k_1} \otimes \psi_{j, k_2} \}_{k_1 \in \mathbb{Z}, k_2 \in \mathbb{Z}} \right) \oplus \left( \bigoplus_{j_2 > j} \text{Vect} \{ \psi_{j, k_1} \otimes \psi_{j_2, k_2} \}_{k_1 \in \mathbb{Z}, k_2 \in \mathbb{Z}} \right) \oplus \text{Vect} \{ \psi_{j, k_1} \otimes \psi_{j, k_2} \}_{k_1 \in \mathbb{Z}, k_2 \in \mathbb{Z}} . \quad (3.34)$$

L'union de toutes ces bases des  $W_j^2$  forme une base orthonormée de  $L^2(\mathbb{R}^2)$  :

$$L^2(\mathbb{R}^2) = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} W_j^2 \quad (3.35)$$

$$= \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} \left[ \left( \bigoplus_{j_1 > j} \text{Vect} \{ \psi_{j_1, k_1} \otimes \psi_{j, k_2} \}_{k_1 \in \mathbb{Z}, k_2 \in \mathbb{Z}} \right) \oplus \left( \bigoplus_{j_2 > j} \text{Vect} \{ \psi_{j, k_1} \otimes \psi_{j_2, k_2} \}_{k_1 \in \mathbb{Z}, k_2 \in \mathbb{Z}} \right) \oplus \text{Vect} \{ \psi_{j, k_1} \otimes \psi_{j, k_2} \}_{k_1 \in \mathbb{Z}, k_2 \in \mathbb{Z}} \right] \quad (3.36)$$

$$L^2(\mathbb{R}^2) = \text{Vect} \{ \psi_{j_1, k_1} \otimes \psi_{j_2, k_2} \}_{j_1 \in \mathbb{Z}, j_2 \in \mathbb{Z}, k_1 \in \mathbb{Z}, k_2 \in \mathbb{Z}} . \quad (3.37)$$

La construction de ces ondelettes isotropes et anisotropes via des espaces  $W_j^2$  identiques indique que l'on peut passer d'une base à l'autre. C'est cette relation que l'on utilise dans la section suivante.

### 3.1.3 Bandelettisation de l'espace tout entier

La technique de bandelettisation permet d'obtenir la base d'ondelettes anisotropes

$$A = \{ \psi_{j_1, k_1} \otimes \psi_{j_2, k_2} \}_{(j_1, k_1) \in \mathbb{Z}^2, (j_2, k_2) \in \mathbb{Z}^2} . \quad (3.38)$$

par des changements de base correspondant à des transformées en ondelettes discrètes monodimensionnelles de la base d'ondelettes isotropes

$$I = \{ \phi_{j, k_1} \otimes \psi_{j, k_2} \}_{j \in \mathbb{Z}, (k_1, k_2) \in \mathbb{Z}^2} \cup \{ \psi_{j, k_1} \otimes \phi_{j, k_2} \}_{j \in \mathbb{Z}, (k_1, k_2) \in \mathbb{Z}^2} \cup \{ \psi_{j, k_1} \otimes \psi_{j, k_2} \}_{j \in \mathbb{Z}, (k_1, k_2) \in \mathbb{Z}^2} . \quad (3.39)$$

L'opérateur  $W^*$  permet de transposer ces résultats aux bases de bandelettes et au calcul des produits scalaires avec la fonction  $f$ .

Le premier type d'ondelettes de la base d'ondelettes isotropes

$$I^1 = \{ \phi_{j, k_1} \otimes \psi_{j, k_2} \}_{j \in \mathbb{Z}, (k_1, k_2) \in \mathbb{Z}^2} \quad (3.40)$$

ne correspond pas à des ondelettes anisotropes. Cependant regardons la collection  $I_{j, k_2}^1$  des fonctions de cette famille à  $j$  fixé et  $k_2$  fixé,

$$I_{j, k_2}^1 = \{ \phi_{j, k_1} \otimes \psi_{j, k_2} \}_{k_1 \in \mathbb{Z}} , \quad (3.41)$$

il s'agit des produits tensoriels de toutes les fonctions d'échelle  $\phi_{j,k_1}$  à l'échelle  $j$  avec l'ondelette  $\psi_{j,k_2}$ .

L'espace engendré par les fonctions d'échelles monodimensionnelles  $\{\phi_{j,k_1}\}_{k_1 \in \mathbb{Z}}$  est l'espace  $V_j^1$  de l'analyse multirésolution en ondelettes. Cet espace admet également une base d'ondelettes associée de la forme  $\{\psi_{j_1,k_1}\}_{j_1 > j, k_1 \in \mathbb{Z}}$ . La transformée en ondelettes discrètes permet de passer par un algorithme rapide [Dau92] d'une décomposition dans la base des fonctions d'échelles à une décompositions dans la base d'ondelettes.

Ces résultats se transportent pour les espaces  $V_j^1 \otimes \text{Vect}\{\psi_{j,k_2}\}$ . La transformée en ondelettes monodimensionnelle selon la direction  $x_1$  permet de passer de la famille orthonormée d'ondelettes isotropes

$$I_{j,k_2}^1 = \{\phi_{j,k_1} \otimes \psi_{j,k_2}\}_{k_1 \in \mathbb{Z}} \quad (3.42)$$

à la famille orthonormée d'ondelettes anisotropes

$$A_{j,k_2}^1 = \{\psi_{j_1,k_1} \otimes \psi_{j,k_2}\}_{j_1 > j, k_1 \in \mathbb{Z}} \quad (3.43)$$

qui engendrent le même espace. Le calcul des produits scalaires avec les ondelettes anisotropes de  $A_{j,k_2}^1$  s'obtient alors à partir des produits scalaires avec les ondelettes isotropes de  $I_{j,k_2}^1$  par un algorithme rapide de transformée en ondelettes discrètes monodimensionnelles puisqu'on a la relation

$$\psi_{j_1,k_1} \otimes \psi_{j,k_2} = \sum_k \langle \psi_{j_1,k_1}, \phi_{j,k} \rangle \phi_{j,k} \otimes \psi_{j,k_2} . \quad (3.44)$$

L'union de toutes ces familles orthonormées  $A_{j,k_2}^1$  forme la famille  $A^1$

$$A^1 = \cup_{j,k_2} A_{j,k_2}^1 \quad (3.45)$$

$$= \cup_{j,k_2} \{\psi_{j_1,k_1} \otimes \psi_{j,k_2}\}_{j_1 > j, k_1 \in \mathbb{Z}} \quad (3.46)$$

$$A^1 = \{\psi_{j_1,k_1} \otimes \psi_{j_2,k_2}\}_{j_1 \in \mathbb{Z}, j_2 \in \mathbb{Z}, j_1 > j_2, k_1 \in \mathbb{Z}, k_2 \in \mathbb{Z}} \quad (3.47)$$

qui engendre le même espace que la famille  $I^1$ .

La même opération de changement de base par une transformée en ondelettes selon l'autre direction permet de passer du second type d'ondelettes isotropes de  $I$

$$I^2 = \{\psi_{j,k_1} \otimes \phi_{j,k_2}\}_{j \in \mathbb{Z}, (k_1, k_2) \in \mathbb{Z}^2} \quad (3.48)$$

aux ondelettes anisotropes

$$A^2 = \{\psi_{j_1,k_1} \otimes \psi_{j_2,k_2}\}_{j_1 \in \mathbb{Z}, j_2 \in \mathbb{Z}, j_1 < j_2, k_1 \in \mathbb{Z}, k_2 \in \mathbb{Z}} . \quad (3.49)$$

Le dernier type d'ondelettes de la base d'ondelettes isotropes

$$I^3 = \{\psi_{j,k_1} \otimes \psi_{j,k_2}\}_{j \in \mathbb{Z}, (k_1, k_2) \in \mathbb{Z}^2} \quad (3.50)$$

n'a pas à être modifié puisqu'il correspond déjà à des ondelettes anisotropes

$$A^3 = \{\psi_{j_1,k_1} \otimes \psi_{j_2,k_2}\}_{(j_1, k_1) \in \mathbb{Z}^2, (j_2, k_2) \in \mathbb{Z}^2, j_1 = j_2} \quad (3.51)$$

$$A^3 = \{\psi_{j_1,k_1} \otimes \psi_{j_2,k_2}\}_{(j_1, j_2) \in \mathbb{Z}^2, j_1 = j_2, (k_1, k_2) \in \mathbb{Z}^2} . \quad (3.52)$$



Finalement, la base  $A$  des ondelettes anisotropes est bien l'union des différentes collections d'ondelettes anisotropes obtenues précédemment

$$A = A^1 \cup A^2 \cup A^3 \quad (3.53)$$

et cette base engendre le même espace que les ondelettes isotropes.

Cette procédure est appelée bandelettisation et définit les bandelettes à l'aide de l'image par  $W^*$  d'ondelettes isotropes. Par exemple dans le cas  $j_1 > j_2$ ,

$$b_{j_1, j_2, k} = W^*(\psi_{j_1, k_1} \otimes \psi_{j_2, k_2}) \quad (3.54)$$

$$= W^*\left(\sum_k \langle \psi_{j_1, k_1}, \phi_{j_2, k} \rangle \phi_{j_2, k} \otimes \psi_{j_2, k_2}\right) \quad (3.55)$$

$$b_{j_1, j_2, k} = \sum_k \langle \psi_{j_1, k_1}, \phi_{j_2, k} \rangle W^*(\phi_{j_2, k} \otimes \psi_{j_2, k_2}) . \quad (3.56)$$

Ceci permet le calcul des coefficients de bandelettes

$$\langle f, b_{j_1, j_2, k} \rangle = \langle f, W^*(\psi_{j_1, k_1} \otimes \psi_{j_2, k_2}) \rangle \quad (3.57)$$

par des transformations en ondelettes discrètes des coefficients d'ondelettes isotropes de  $Wf$

$$\langle f, b_{j_1, j_2, k} \rangle = \langle f, \sum_k \langle \psi_{j_1, k_1}, \phi_{j_2, k} \rangle W^*(\phi_{j_2, k} \otimes \psi_{j_2, k_2}) \rangle \quad (3.58)$$

$$= \sum_k \langle \psi_{j_1, k_1}, \phi_{j_2, k} \rangle \langle f, W^*(\phi_{j_2, k} \otimes \psi_{j_2, k_2}) \rangle \quad (3.59)$$

$$\langle f, b_{j_1, j_2, k} \rangle = \sum_k \langle \psi_{j_1, k_1}, \phi_{j_2, k} \rangle \langle Wf, \phi_{j_2, k} \otimes \psi_{j_2, k_2} \rangle . \quad (3.60)$$

Une modification de cette technique de construction des bandelettes par bandelettisation permet de construire des bandelettes adaptées à des domaines. Pour construire des bandelettes qui ne traversent pas les bords de ceux-ci, on remplace la transformée en ondelettes discrètes par une transformée en ondelettes discrètes sur l'intervalle.

### 3.1.4 Domaines et bandelettisation

Soit  $\Omega$  un domaine,  $c(x_1)$  la paramétrisation de la courbe associée à la déformation  $w$  et  $f$  une fonction, on note  $\Omega_w$  l'image de  $\Omega$  par  $w$ .

Les bandelettes sur chaque domaine sont encore obtenues par la transformation  $W^*$  à partir d'une famille orthonormée d'ondelettes séparables. Cette famille d'ondelettes, sur laquelle sont basées les bandelettes, est constituée des ondelettes isotropes rencontrant le bord du domaine  $\Omega_w$  et des ondelettes anisotropes obtenues par bandelettisation des ondelettes isotropes à l'intérieur du domaine  $\Omega_w$ .

On travaille maintenant sur  $Wf$  et  $\Omega_w$  pour construire ces ondelettes. Les ondelettes isotropes de la transformée en ondelettes isotropes associées au domaine  $\Omega_w$  sont celles dont le support rencontre le domaine déformé  $\Omega_w$ . Ces ondelettes suffisent en effet à reconstruire  $Wf$  sur le domaine  $\Omega_w$  et donc caractérisent  $f$  sur  $\Omega$ .

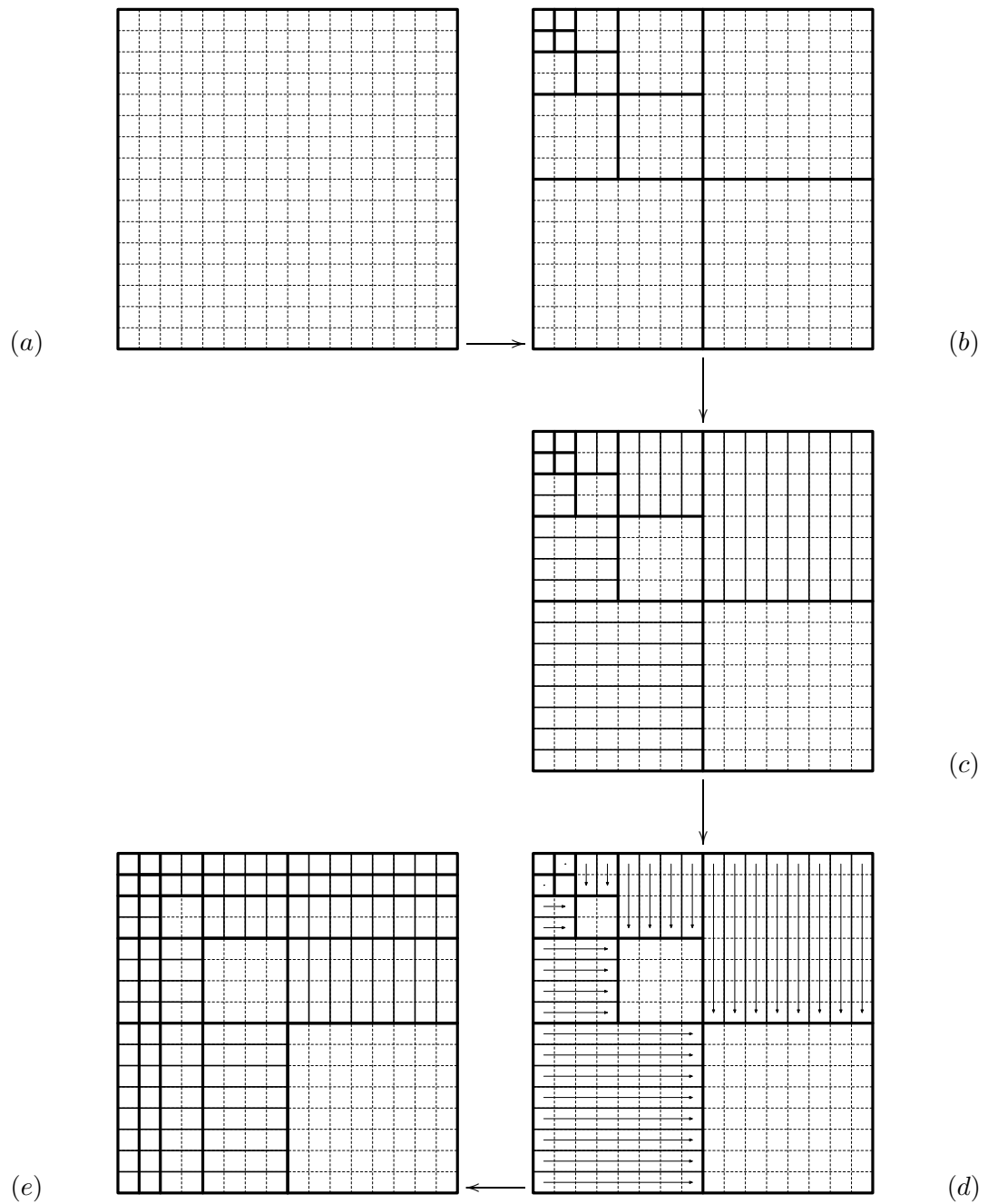


FIGURE 3.1 – Des ondelettes isotropes aux ondelettes anisotropes : (a) image originale, (b) décomposition en ondelettes isotropes, (c) découpage des sous-bandes en colonnes pour les ondelettes de la formes  $\psi\phi$  et en lignes pour les ondelettes de la forme  $\phi\psi$ , (d) transformation en ondelettes selon ces colonnes et ces lignes, (e) décomposition en ondelettes anisotropes.

La famille  $I_{\Omega_w}$  d'ondelettes isotropes associée au domaine déformé  $\Omega_w$  est donc définie par

$$\begin{aligned} I_{\Omega_w} = & \cup \{ \phi_{j,k_1} \otimes \psi_{j,k_2} \}_{j \in \mathbb{Z}, (k_1, k_2) \in \mathbb{Z}^2, (\mathcal{S}(\phi_{j,k_1} \otimes \psi_{j,k_2}) \cap \Omega_w) \neq \emptyset} \\ & \cup \{ \psi_{j,k_1} \otimes \phi_{j,k_2} \}_{j \in \mathbb{Z}, (k_1, k_2) \in \mathbb{Z}^2, (\mathcal{S}(\psi_{j,k_1} \otimes \phi_{j,k_2}) \cap \Omega_w) \neq \emptyset} \\ & \cup \{ \psi_{j,k_1} \otimes \psi_{j,k_2} \}_{j \in \mathbb{Z}, (k_1, k_2) \in \mathbb{Z}^2, \mathcal{S}((\psi_{j,k_1} \otimes \psi_{j,k_2}) \cap \Omega_w) \neq \emptyset} . \end{aligned} \quad (3.61)$$

Les bandelettes que l'on souhaite construire sur le domaine  $\Omega$  correspondent à des ondelettes anisotropes dans le domaine  $\Omega_w$ . On va donc appliquer une technique de bandelettisation des ondelettes isotropes de la famille  $I_{\Omega_w}$ . Cependant, comme on ne souhaite pas que ces bandelettes sortent de  $\Omega$ , on ne travaille que sur les ondelettes isotropes de  $I_{\Omega_w}$  qui sont complètement à l'intérieur de  $\Omega_w$ .

On décompose  $I_{\Omega_w}$  en des ondelettes isotropes intérieures  $I_{\Omega_w, \text{Int}}$  et des ondelettes isotropes de bord  $I_{\partial\Omega_w}$  :

$$I_{\Omega_w} = I_{\Omega_w, \text{Int}} \cup I_{\partial\Omega_w} \quad (3.62)$$

avec

$$\begin{aligned} I_{\Omega_w, \text{Int}} = & \{ \phi_{j,k_1} \otimes \psi_{j,k_2} \}_{j \in \mathbb{Z}, (k_1, k_2) \in \mathbb{Z}^2, \mathcal{S}(\phi_{j,k_1} \otimes \psi_{j,k_2}) \subset \Omega_w} \\ & \cup \{ \psi_{j,k_1} \otimes \phi_{j,k_2} \}_{j \in \mathbb{Z}, (k_1, k_2) \in \mathbb{Z}^2, \mathcal{S}(\psi_{j,k_1} \otimes \phi_{j,k_2}) \subset \Omega_w} \\ & \cup \{ \psi_{j,k_1} \otimes \psi_{j,k_2} \}_{j \in \mathbb{Z}, (k_1, k_2) \in \mathbb{Z}^2, \mathcal{S}(\psi_{j,k_1} \otimes \psi_{j,k_2}) \subset \Omega_w} \end{aligned} \quad (3.63)$$

et

$$\begin{aligned} I_{\partial\Omega_w} = & \{ \phi_{j,k_1} \otimes \psi_{j,k_2} \}_{j \in \mathbb{Z}, (k_1, k_2) \in \mathbb{Z}^2, (\mathcal{S}(\phi_{j,k_1} \otimes \psi_{j,k_2}) \cap \partial\Omega_w) \neq \emptyset} \\ & \cup \{ \psi_{j,k_1} \otimes \phi_{j,k_2} \}_{j \in \mathbb{Z}, (k_1, k_2) \in \mathbb{Z}^2, (\mathcal{S}(\psi_{j,k_1} \otimes \phi_{j,k_2}) \cap \partial\Omega_w) \neq \emptyset} \\ & \cup \{ \psi_{j,k_1} \otimes \psi_{j,k_2} \}_{j \in \mathbb{Z}, (k_1, k_2) \in \mathbb{Z}^2, \mathcal{S}((\psi_{j,k_1} \otimes \psi_{j,k_2}) \cap \partial\Omega_w) \neq \emptyset} . \end{aligned} \quad (3.64)$$

Les ondelettes isotropes de bord,  $I_{\partial\Omega_w}$ , ne sont pas modifiées tandis que celles situées à l'intérieur,  $I_{\Omega_w, \text{Int}}$ , le sont par une technique de bandelettisation.

Le premier ensemble d'ondelettes isotropes de  $I_{\Omega_w, \text{Int}}$  est

$$I_{\Omega_w, \text{Int}}^1 = \{ \phi_{j,k_1} \otimes \psi_{j,k_2} \}_{j \in \mathbb{Z}, (k_1, k_2) \in \mathbb{Z}^2, \mathcal{S}(\phi_{j,k_1} \otimes \psi_{j,k_2}) \subset \Omega_w} . \quad (3.65)$$

On utilise alors la même technique que précédemment en découpant cet ensemble à  $j$  fixé et  $k_2$  fixé :

$$I_{\Omega_w, \text{Int}, j, k_2}^1 = \{ \phi_{j,k_1} \otimes \psi_{j,k_2} \}_{k_1 \in \mathbb{Z}, \mathcal{S}(\phi_{j,k_1} \otimes \psi_{j,k_2}) \subset \Omega_w} . \quad (3.66)$$

Dans le cas de l'espace tout entier, l'ensemble des indices  $k_1$  correspondant à des ondelettes isotropes contenues dans cet ensemble  $\{k_1 \in \mathbb{Z}, \mathcal{S}(\phi_{j,k_1} \otimes \psi_{j,k_2}) \subset \Omega_w\}$  était  $\mathbb{Z}$  tout entier. Il est ici constitué de segments disjoints de tailles variables inclus dans  $\mathbb{Z}$ . La transformée en ondelettes discrètes utilisée pour la bandelettisation de l'espace entier devient une transformée en ondelettes discrètes sur chacun de ces segments.

Cette transformée en ondelettes sur des segments doit présenter les mêmes propriétés d'approximation que les ondelettes sur  $\mathbb{R}$  tout en étant adaptée au problème des bords des intervalles. Elle doit également permettre d'obtenir des ondelettes qui soient presque toutes

des ondelettes *normales* afin d'obtenir des bandelettes cohérentes avec celle construites sur l'espace entier. Pour ceci, on utilise la transformée en ondelettes discrètes introduite simultanément par Cohen et al. [CDV93] et Andersson et al. [AHJP94] et décrite dans l'annexe 3A. Les ondelettes anisotropes obtenues sont pour la plupart celle obtenues sans la restriction au domaine. Seul un nombre limité de fonctions à chaque extrémité de segment et à chaque échelle n'est plus un produit tensoriel de deux ondelettes de départ mais un produit tensoriel d'une ondelette et d'une ondelette de bord.

On obtient donc une famille orthonormée  $A_{\Omega_w, \text{Int}, j, k_2}^1$  d'ondelettes anisotropes engendrant le même espace que  $I_{\Omega_w, \text{Int}, j, k_2}^2$  de la forme

$$A_{\Omega_w, \text{Int}, j, k_2}^1 = \{\psi_{j_1, k_1} \otimes \psi_{j, k_2}\}_{j_1 > j, k_1 \in K(j_1, j, k_2)} \cup \{\bar{\psi}_{j_1, k_1} \otimes \psi_{j, k_2}\}_{j_1 > j, k_1 \in K'(j_1, j, k_2)} \quad (3.67)$$

où les  $\bar{\psi}_{j_1, k_1}$  sont les ondelettes de bord décrites dans l'annexe et le cardinal  $K'(j_1, j, k_2)$  est au plus de l'ordre du nombre de segments. On a alors la relation

$$\psi_{j_1, k_1} \otimes \psi_{j, k_2} = \sum_k \langle \psi_{j_1, k_1}, \phi_{j, k} \rangle \phi_{j, k} \otimes \psi_{j, k_2} \quad (3.68)$$

ainsi que

$$\bar{\psi}_{j_1, k_1} \otimes \psi_{j, k_2} = \sum_k \langle \bar{\psi}_{j_1, k_1}, \phi_{j, k} \rangle \phi_{j, k} \otimes \psi_{j, k_2} . \quad (3.69)$$

Ces ondelettes anisotropes sont donc reliées aux ondelettes isotropes par un algorithme rapide de calcul.

On répète cette procédure pour chaque  $j$  et  $k_2$  et on obtient une famille orthonormée  $A_{\Omega_w, \text{Int}}^1$  d'ondelettes anisotropes engendrant le même espace que  $I_{\Omega_w, \text{Int}}^1$  de la forme

$$A_{\Omega_w, \text{Int}}^1 = \{\psi_{j_1, k_1} \otimes \psi_{j_2, k_2}\}_{j_1 > j_2, k_2 \in \mathbb{Z}, k_1 \in K(j_1, j, k_2)} \cup \{\bar{\psi}_{j_1, k_1} \otimes \psi_{j_2, k_2}\}_{j_1 > j_2, k_2 \in \mathbb{Z}, k_1 \in K'(j_1, j, k_2)} . \quad (3.70)$$

La même décomposition est faite dans l'autre direction et donne une famille orthonormée  $A_{\Omega_w, \text{Int}}^2$  d'ondelettes anisotropes engendrant le même espace que  $I_{\Omega_w, \text{Int}}^2$  de la forme

$$A_{\Omega_w, \text{Int}}^2 = \{\psi_{j_1, k_1} \otimes \psi_{j_2, k_2}\}_{j_1 < j_2, k_1 \in \mathbb{Z}, k_2 \in K(j_1, j, k_1)} \cup \{\psi_{j_1, k_1} \otimes \bar{\psi}_{j_2, k_2}\}_{j_1 < j_2, k_1 \in \mathbb{Z}, k_2 \in K'(j_1, j, k_1)} . \quad (3.71)$$

Enfin, comme dans le cas de l'espace tout entier, on ne modifie pas le dernier ensemble d'ondelettes isotropes de  $I_{\Omega_w, \text{Int}}$  puisque ce sont déjà des ondelettes anisotropes

$$A_{\Omega_w, \text{Int}}^3 = \{\psi_{j_1, k_1} \otimes \psi_{j_2, k_2}\}_{(j_1, k_1) \in \mathbb{Z}^2, (j_2, k_2) \in \mathbb{Z}^2, j_1 = j_2, \mathcal{S}(\psi_{j_1, k_1} \otimes \psi_{j_2, k_2}) \subset \Omega_w} \quad (3.72)$$

$$A_{\Omega_w, \text{Int}}^3 = \{\psi_{j_1, k_1} \otimes \psi_{j_2, k_2}\}_{j_1 = j_2, (k_1, k_2) \in K(j_1)} . \quad (3.73)$$

Finalement la famille orthonormée  $A_{\Omega_w, \text{Int}}$  d'ondelettes anisotropes qui engendrent le

même espace que la famille  $I_{\Omega_w, \text{Int}}$  est donnée par

$$A_{\Omega_w, \text{Int}} = A_{\Omega_w, \text{Int}}^1 \cup A_{\Omega_w, \text{Int}}^2 \cup A_{\Omega_w, \text{Int}}^3 \quad (3.74)$$

$$\begin{aligned} &= \{\psi_{j_1, k_1} \otimes \psi_{j_2, k_2}\}_{j_1 > j_2, k_2 \in \mathbb{Z}, k_1 \in K(j_1, j, k_2)} \\ &\quad \cup \{\bar{\psi}_{j_1, k_1} \otimes \psi_{j_2, k_2}\}_{j_1 > j_2, k_2 \in \mathbb{Z}, k_1 \in K'(j_1, j, k_2)} \\ &\quad \cup \{\psi_{j_1, k_1} \otimes \psi_{j_2, k_2}\}_{j_1 < j_2, k_1 \in \mathbb{Z}, k_2 \in K(j_1, j, k_1)} \end{aligned} \quad (3.75)$$

$$\begin{aligned} &\quad \cup \{\psi_{j_1, k_1} \otimes \bar{\psi}_{j_2, k_2}\}_{j_1 < j_2, k_1 \in \mathbb{Z}, k_2 \in K'(j_1, j, k_1)} \\ &\quad \cup \{\psi_{j_1, k_1} \otimes \psi_{j_2, k_2}\}_{j_1 = j_2, (k_1, k_2) \in K(j_1)} \\ &= \{\psi_{j_1, k_1} \otimes \psi_{j_2, k_2}\}_{j_1 > j_2, k_2 \in \mathbb{Z}, k_1 \in K(j_1, j, k_2)} \\ &\quad \cup \{\psi_{j_1, k_1} \otimes \psi_{j_2, k_2}\}_{j_1 < j_2, k_1 \in \mathbb{Z}, k_2 \in K(j_1, j, k_1)} \\ &\quad \cup \{\psi_{j_1, k_1} \otimes \psi_{j_2, k_2}\}_{j_1 = j_2, (k_1, k_2) \in K(j_1)} \end{aligned} \quad (3.76)$$

$$\begin{aligned} A_{\Omega_w, \text{Int}} &= \{\psi_{j_1, k_1} \otimes \psi_{j_2, k_2}\}_{(j_1, j_2) \in \mathbb{Z}, (k_1, k_2) \in K(j_1, j_2)} \\ &\quad \cup \{\bar{\psi}_{j_1, k_1} \otimes \psi_{j_2, k_2}\}_{j_1 > j_2, k_2 \in \mathbb{Z}, k_1 \in K'(j_1, j, k_2)} \\ &\quad \cup \{\psi_{j_1, k_1} \otimes \bar{\psi}_{j_2, k_2}\}_{j_1 < j_2, k_1 \in \mathbb{Z}, k_2 \in K'(j_1, j, k_1)} \end{aligned} \quad (3.77)$$

où le premier ensemble est formé de produits tensoriels de deux ondelettes normales qu'on continue d'appeler ondelettes anisotropes et les deux derniers de produits tensoriels d'une ondelette de bord et d'une ondelette normale qu'on appelle ondelettes anisotropes de bord.

Pour représenter une fonction sur le domaine  $\Omega_w$ , on a donc utilisé trois types de fonctions : des ondelettes isotropes de bord, des ondelettes anisotropes de bord et des ondelettes anisotropes.

La famille orthonormée  $B_{\Omega_w}$  de bandelettes associée au domaine et à la déformation  $w$  est l'image par  $W^*$ , la transposée de  $W$ , de ces fonctions et est donc constituée de trois types d'éléments :

- des ondelettes déformées correspondant aux ondelettes isotropes de bord :

$$W^*(\phi_{j, k_1} \otimes \psi_{j, k_2})(x_1, x_2) = \phi_{j, k_1}(x_1) \psi_{j, k_2}(x_2 - c(x_1)) \quad (3.78)$$

ou

$$W^*(\psi_{j, k_1} \otimes \phi_{j, k_2})(x_1, x_2) = \psi_{j, k_1}(x_1) \phi_{j, k_2}(x_2 - c(x_1)) \quad (3.79)$$

ou

$$W^*(\psi_{j, k_1} \otimes \psi_{j, k_2})(x_1, x_2) = \psi_{j, k_1}(x_1) \psi_{j, k_2}(x_2 - c(x_1)) \quad (3.80)$$

- des bandelettes de bord correspondant aux ondelettes anisotropes de bord :

$$W^*(\bar{\psi}_{j_1, k_1} \otimes \psi_{j_2, k_2})(x_1, x_2) = \bar{\psi}_{j_1, k_1}(x_1) \psi_{j_2, k_2}(x_2 - c(x_1)) \quad \text{avec } j_1 > j_2 \quad (3.81)$$

ou

$$W^*(\psi_{j_1, k_1} \otimes \bar{\psi}_{j_2, k_2})(x_1, x_2) = \psi_{j_1, k_1}(x_1) \bar{\psi}_{j_2, k_2}(x_2 - c(x_1)) \quad \text{avec } j_2 > j_1 \quad (3.82)$$

$$(3.83)$$

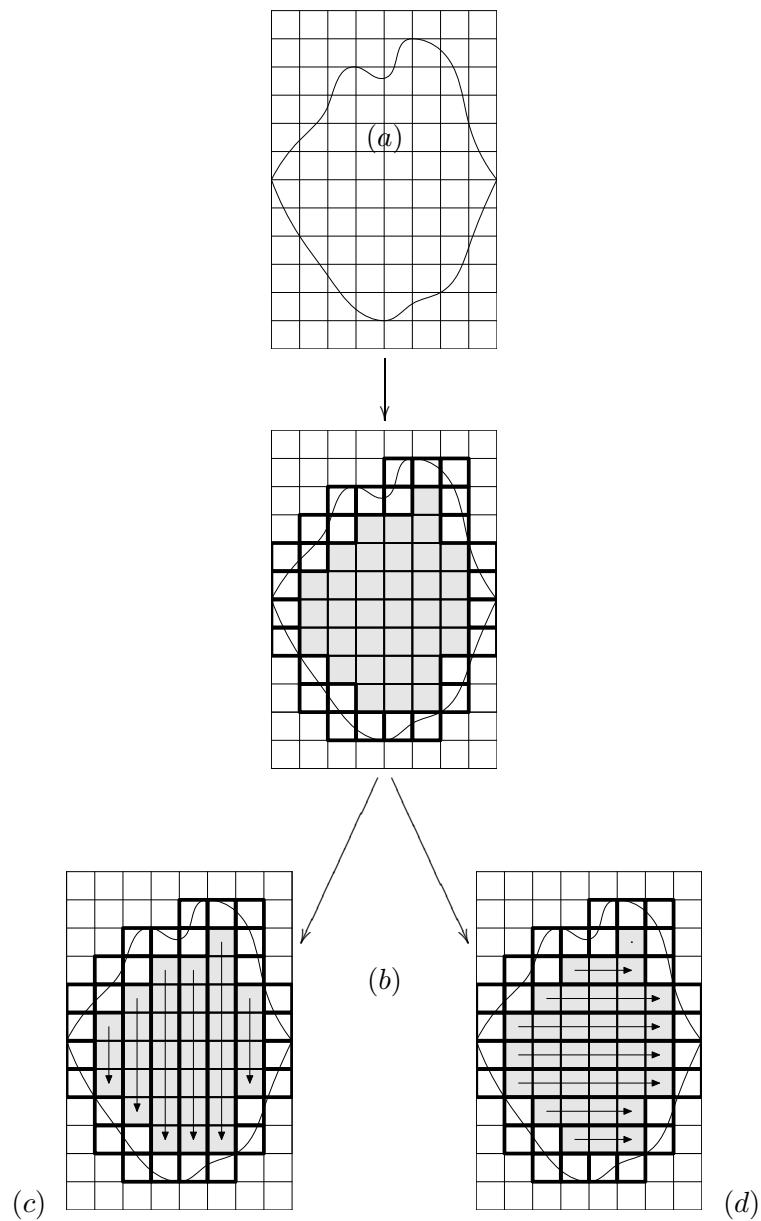


FIGURE 3.2 – Des ondelettes isotropes aux ondelettes anisotropes sur un domaine : (a) le domaine et la grille d'ondelettes isotropes à une certaines échelles, (b) les ondelettes isotropes intérieures en gris, les ondelettes isotropes de bord en gras et les ondelettes isotropes extérieurs dans le cas des ondelettes de Haar (support de taille minimal), (c) les ondelettes isotropes intérieures de type  $\psi\phi$  sont transformées selon les colonnes pour obtenir des ondelettes anisotropes, (d) les ondelettes isotropes intérieures de type  $\psi\phi$  sont transformées selon les lignes pour obtenir des ondelettes anisotropes.

– des bandelettes intérieures correspondant aux ondelettes anisotropes :

$$W^*(\psi_{j_1, k_1} \otimes \psi_{j_2, k_2})(x_1, x_2) = \psi_{j_1, k_1}(x_1) \psi_{j_2, k_2}(x_2 - c(x_1)) . \quad (3.84)$$

Cette famille orthonormée de bandelettes permet la reconstruction de la restriction de  $f$  à  $\Omega$  et les coefficients de la décomposition s'obtiennent à partir des coefficients en ondelettes isotropes de  $Wf$ .

Pour simplifier les notations par la suite, on note  $W^*\psi_{j,k}^o$  avec  $j \in \mathbb{Z}$ ,  $k \in \mathbb{Z}^2$  et  $o \in 1, 2, 3$  les ondelettes déformées et  $b_{j_1, j_2, k}$  avec  $j_1 \in \mathbb{Z}$ ,  $j_2 \in \mathbb{Z}$  et  $k \in \mathbb{Z}^2$  les bandelettes qu'elles soient normales ou de bord. On étend parfois le terme de bandelettes à l'ensemble de ces fonctions et on les note dans ce cas  $b_m$ .

### 3.1.5 Frame de bandelettes et reconstruction

Soit un ensemble fini de domaines  $\Omega_i$  avec  $i \in I$  associés à des déformations  $w_i$ , sur chacun de ces domaines  $\Omega_i$  on peut définir la famille orthonormée de bandelettes associée  $B_{\Omega_i, w_i}$ . La décomposition d'une fonction dans chacune de ces familles orthonormées peut être calculée et on est assuré ainsi de pouvoir la reconstruire sur chacun de ces domaines. Le complémentaire de ceux-ci  $\bar{\Omega} = \overline{\cup \Omega_i}$  reste la seule zone sur laquelle la reconstruction n'est pas assurée. Il suffit alors de définir une famille orthonormée permettant de reconstruire les fonctions sur  $\bar{\Omega}$  pour avoir une représentation complète. On choisit pour cela la famille orthonormée  $I_{\bar{\Omega}}$  des ondelettes isotropes rencontrant le domaine  $\bar{\Omega}$ .

L'union de ces différentes familles forme un frame de  $L^2$  [Mey90, DS52]. En effet pour chacun des domaine  $\Omega_i$ , si l'on note  $b_{i,m}$  les éléments de  $B_{\Omega_i, w_i}$ , on a la propriété suivante

$$\|f_{\Omega_i}\|^2 \leq \sum_m |\langle f, b_{i,m} \rangle|^2 \leq \|f\|^2 \quad (3.85)$$

où  $f_{\Omega_i}$  est la restriction de  $f$  à  $\Omega_i$  puisque  $B_{\Omega_i, w_i}$  est une famille orthonormée assurant la reconstruction d'une fonction sur  $\Omega_i$ . De même, pour  $\bar{\Omega}$ , si l'on note  $\psi_m$  les ondelettes isotropes de la famille  $I_{\bar{\Omega}}$ , on a la propriété

$$\|f_{\bar{\Omega}}\|^2 \leq \sum_m |\langle f, \psi_m \rangle|^2 \leq \|f\|^2. \quad (3.86)$$

On somme alors les relations précédentes et on obtient

$$\sum_{i \in I} \|f_{\Omega_i}\|^2 + \|f_{\bar{\Omega}}\|^2 \leq \sum_{i \in I} \sum_m |\langle f, b_{i,m} \rangle|^2 + \sum_m |\langle f, \psi_m \rangle|^2 \leq \sum_{i \in I} \|f\|^2 + \|f\|^2 \quad (3.87)$$

soit

$$\|f\|^2 \leq \sum_{i \in I} \sum_m |\langle f, b_{i,m} \rangle|^2 + \sum_m |\langle f, \psi_m \rangle|^2 \leq (\#(I) + 1) \|f\|^2 \quad (3.88)$$

où  $\#(I)$  dénote le cardinal de l'ensemble  $I$ .

Ceci est bien la caractérisation d'un frame. On notera que l'estimation de la borne supérieure par  $(\#(I) + 1)$  est une estimation grossière. Elle correspond à une borne grossière du nombre maximum d'ondelettes appartenant à des domaines différents dont les supports ont une intersection commune. En limitant l'échelle maximale et en imposant des conditions sur la géométrie (nombres de zones pouvant se rencontrer en un point et

conditions d'écartement), on peut diminuer fortement cette borne pour obtenir une borne indépendante du nombre de domaine.

Deux opérateurs sont naturellement associés à tout frame : un opérateur  $U$  de  $L^2$  dans  $l^2$  qui à une fonction associe ses coefficients dans le frame

$$Uf = \cup_i \{ \langle f, b_{i,m} \rangle \}_m \cup \{ \langle f, \psi_m \rangle \}_m \quad (3.89)$$

et l'opérateur transposé  $U^*$  qui à des coefficients dans le frame associe une fonction :

$$U^*(\cup_i \{ a_{i,m} \}_m \cup \{ w_m \}_m) = \sum_i \sum_m a_{i,m} b_{i,m} + \sum_m w_m \psi_m . \quad (3.90)$$

La théorie des frames nous donne alors une méthode pour reconstruire une fonction à partir de ses produits scalaires dans le frame : il s'agit de la méthode itérative de l'algorithme de frame.

On souhaite résoudre l'équation

$$Uf = \cup_i \{ a_{i,m} \}_m \cup \{ w_m \}_m . \quad (3.91)$$

Celle-ci n'a pas nécessairement de solutions, on la résout donc au sens des moindres carrés

$$U^*Uf = U^*(\cup_i \{ a_{i,m} \}_m \cup \{ w_m \}_m) \quad (3.92)$$

ou en posant  $L = U^*U$

$$Lf = U^*(\cup_i \{ a_{i,m} \}_m \cup \{ w_m \}_m) . \quad (3.93)$$

La solution minimisera  $|Uf - (\cup_i \{ a_{i,m} \}_m \cup \{ w_m \}_m)|^2$ . La résolution de ce système s'effectue par un algorithme de gradient conjugué dont la convergence est démontrée dans ce cadre par Gröchenig [Grö93] et qui correspond au gradient conjugué classique découvert dans les années 50 [HS52] et popularisé en analyse numérique par Concus et al [CGO76].

**Théorème 3.1.** *Si  $g$  est dans  $Im(U^*)$ , l'algorithme suivant converge vers  $f = L^{-1}g$ .*

*Posons*

$$f_0 = 0, \quad r_0 = p_0 = g. \quad (3.94)$$

*Pour tout  $i \geq 0$ , on définit par récurrence*

$$\rho_i = \langle r_i, r_i \rangle \quad (3.95)$$

$$\beta = \begin{cases} 0 & \text{si } i = 0 \\ \frac{\rho_i}{\rho_{i-1}} & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.96)$$

$$p_{i+1} = r_i + \beta p_i \quad (3.97)$$

$$q_{i+1} = Lp_{i+1} \quad (3.98)$$

$$\alpha = \frac{\rho_i}{\langle p_{i+1}, q_{i+1} \rangle} \quad (3.99)$$

$$f_{i+1} = f_i + \alpha p_{i+1} \quad (3.100)$$

$$r_{i+1} = r_i - \alpha q_{i+1} \quad (3.101)$$

*Si  $A$  et  $B$  sont les bornes du frame, on pose  $\sigma = \frac{\sqrt{B}-\sqrt{A}}{\sqrt{B}+\sqrt{A}}$  et alors*

$$\|L(f - f_n)\| \leq \frac{2\sigma^n}{1 + \sigma^{2n}} \|Lf\| \quad (3.102)$$

Cet algorithme nécessite l'application de l'opérateur  $L = U^*U$  à des fonctions, on va donc étudier ces opérateurs et montrer comment on peut les décomposer.



### 3.1.6 Décomposition en opérateurs par domaines

Les opérateurs définis dans la section précédente peuvent être décomposés en des opérateurs associés à chacun des domaines  $\Omega_i$  et au complémentaire  $\bar{\Omega}$ . A chacun des domaines  $\Omega_i$  sont associés les opérateurs  $U_{\Omega_i}$  et  $U_{\Omega_i}^*$  définis par

$$U_{\Omega_i} f = \{\langle f, b_{i,m} \rangle\}_m \quad (3.103)$$

et

$$U_{\Omega_i}^* (\{a_{i,m}\}_m) = \sum_i \sum_m a_{i,m} b_{i,m} \quad (3.104)$$

tandis qu'au complémentaire  $\bar{\Omega}$  sont associés les opérateurs  $U_{\bar{\Omega}}$  et  $U_{\bar{\Omega}}^*$  définis par

$$U_{\bar{\Omega}} f = \{\langle f, \psi_m \rangle\}_m \quad (3.105)$$

et

$$U_{\bar{\Omega}}^* (\{w_m\}_m) = \sum_m w_m \psi_m . \quad (3.106)$$

Les opérateurs  $U$  et  $U^*$  s'obtiennent alors par

$$U f = \cup_i U_{\Omega_i} f \cup U_{\bar{\Omega}} f \quad (3.107)$$

$$U^* (\cup_i \{a_{i,m}\}_m \cup \{w_m\}_m) = \sum_i U_{\Omega_i}^* (\{a_{i,m}\}_m) + U_{\bar{\Omega}}^* (\{w_m\}_m) . \quad (3.108)$$

De même l'opérateur  $L = U^* U$  s'obtient comme somme d'opérateur sur chaque domaine  $\Omega_i$ , les  $L_{\Omega_i} = U_{\Omega_i}^* U_{\Omega_i}$ , et d'un opérateur pour le complémentaire  $\bar{\Omega}$ ,  $L_{\bar{\Omega}} = U_{\bar{\Omega}}^* U_{\bar{\Omega}}$  :

$$L f = \sum_i U_{\Omega_i}^* U_{\Omega_i} f + U_{\bar{\Omega}}^* U_{\bar{\Omega}} f \quad (3.109)$$

$$L f = \sum_i L_{\Omega_i} f + L_{\bar{\Omega}} f . \quad (3.110)$$

Pour décrire les opérateurs  $U$ ,  $U^*$  et  $L$  il suffit de décrire chacun des opérateurs  $U_{\Omega_i}$ ,  $U_{\Omega_i}^*$  et  $L_{\Omega_i}$  ainsi que les opérateurs  $U_{\bar{\Omega}}$ ,  $U_{\bar{\Omega}}^*$  et  $L_{\bar{\Omega}}$ .

Les opérateurs sur les domaines sont exactement les opérateurs d'analyse et de synthèse dans la famille orthonormée de bandelettes associées au domaine. On reprend le procédé de bandelettisation pour les calculer.

Pour calculer  $U_{\Omega_i} f$ , on procède comme suit :

- on détermine  $W_i f$  l'image de la fonction  $f$  par la déformation  $w_i^{-1}$  :

$$W_i f(x) = f(w_i^{-1}(x)) \quad (3.111)$$

- puis on calcule la transformée en ondelettes isotropes de  $W_i f$  et on ne conserve que les coefficients correspondants à des ondelettes isotropes dont le support rencontre  $\Omega_{w_i}$

$$\langle W_i f, \psi_{j,k}^I \rangle = \langle f, W \psi_{j,k}^I \rangle \quad (3.112)$$

- et enfin on applique le procédé de bandelettisation pour les ondelettes isotropes complètement à l'intérieur de  $\Omega_{w_i}$  pour obtenir les coefficients de bandelettes

$$\langle W_i f, \psi_{j_1,k_1} \otimes \psi_{j_2,k_2} \rangle = \langle f, b_{j_1,j_2,k} \rangle \quad (3.113)$$

et on conserve les coefficients correspondant à des ondelettes dont le support rencontre  $\partial W_i$  pour obtenir les coefficients d'ondelettes déformées.

Le calcul de la transposée  $U_{\Omega_i}^*$  se fait à l'aide des inverses des mêmes outils :

- on commence par appliquer une bandelettisation inverse sur les coefficients de bandelettes pour obtenir les coefficients d'ondelettes isotropes dont ils proviennent,
- puis on calcule la transformée en ondelettes inverse des coefficients d'ondelettes  $W_i \tilde{f}$  en mettant à zéro les coefficients manquants,
- et enfin le résultat  $\tilde{f}$  est l'image de la fonction obtenue à l'étape précédente par la déformation  $w_i$  :

$$\tilde{f}(x) = W \tilde{f}(w_i(x)) . \quad (3.114)$$

Enfin les opérateurs  $U_{\bar{\Omega}}$  et  $U_{\bar{\Omega}}^*$  sont des transformées en ondelettes isotropes pour lesquelles on ne retient que les coefficients correspondant à des ondelettes rencontrant  $\bar{\Omega}$  dans l'analyse et on met à zéro les coefficients manquants dans la synthèse.

### 3.1.7 Transformée en bandelette discrète

On présente maintenant l'implémentation de cette transformée en ondelettes. Pour cela on s'intéresse à chacun des opérateurs associés aux domaines et on montre comment les implémenter.

Commençons par décrire le cadre discret. La fonction  $f$  est discrétisée sur une grille  $N \times N$ . Abusivement, on continue à noter  $f$  cette image discrète. On connaît également des domaines  $\Omega_i$  qui sont soit verticaux soit horizontaux ainsi que la déformation  $w_i$  de l'espace entier associée. La paramétrisation de la courbe  $c_i$  associée à cette déformation est défini avec une précision réelle et correspond à des déplacements subpixeliques le long des lignes ou des colonnes.

Pour chaque domaine, la première opération de la transformée est la déformation de l'image d'origine par la déformation  $w_i^{-1}$ . Supposons que cette déformation soit verticale, on doit obtenir une image  $W_i f$  est telle que

$$W_i f(k_1, k_2) = f(k_1, k_2 + c_i(k_1)) \quad (3.115)$$

où  $c_i(k_1)$  n'est pas nécessairement entier et  $k_2 + c_i(k_1)$  n'appartient pas nécessairement à  $[0, N - 1]$ . L'opérateur de translation nécessite donc une extrapolation à l'extérieur de l'image et une interpolation des valeurs entre les points. L'extrapolation est définie par

une extension symétrique au bord. L'interpolation utilisée est une interpolation par spline décrite par Thévenaz et al [TBU00, BTU01] : elle n'est pas trop oscillante, s'implémente de manière efficace et est quasi réversible. Cet opérateur de translation est décrit plus précisément dans la section suivante.

Cette image  $W_i f$  est au plus de taille  $N \times (4N)$  si l'on impose une borne sur la dérivée de  $c_i$ . Sa transformée en ondelettes se calcule à l'aide d'un algorithme de transformée rapide. Au cours de cette transformée, on classe les coefficients comme étant intérieurs, de bord ou extérieurs selon la position relative du support de l'ondelette correspondante et du domaine déformé  $\Omega_{w_i}$ . Cette information est stockée pour permettre sa réutilisation.

Les coefficients extérieurs sont éliminés et les coefficients de bord sont conservés tels quels. Les coefficients intérieurs sont alors modifiés par la technique de bandelettisation pour obtenir les coefficients de bandelettes. Le long de chaque segment horizontal pour les coefficients correspondant à des ondelettes de type  $\phi \otimes \psi$  et le long de chaque segment vertical pour ceux correspondant à des ondelettes de type  $\psi \otimes \phi$ , on calcule donc une transformée en ondelettes discrètes monodimensionnelles. Pour des raisons de simplicité, cette transformée sur l'intervalle n'est pas la transformée sur l'intervalle de la construction théorique mais une transformée sur l'intervalle avec symétrisation au bord qui suffit d'un point de vue numérique.

Il reste encore à obtenir les coefficients correspondant au fond. Ceux-ci correspondent aux coefficients d'ondelettes dont le support n'est pas l'intérieur de l'un des domaines  $\Omega_i$  et s'obtiennent donc par un algorithme rapide de transformée en ondelettes isotropes.

La complexité de cette analyse pour une zone est de l'ordre de  $O(N^2 \log(N^2))$ , la complexité totale est donc de l'ordre de  $O(\#(I) N^2 \log(N^2))$  où  $N^2$  est le nombre de pixels de l'image.

L'opérateur  $U^*$  s'implémente de manière similaire : on remplace chaque étape par son inverse et on les applique dans l'ordre inverse. Une première étape est cependant nécessaire : la détermination pour chaque domaine des différents type de coefficients pour chaque domaine. Celle-ci est effectuée soit en simulant les deux premières étapes de la transformée précédente soit en réutilisant cette information si elle a été déjà stockée. L'étape suivante est la transformée en ondelettes inverse sur chaque intervalle correspondant à l'inverse de la bandelettisation. Cette transformée est implémentée par un algorithme rapide. Ensuite vient l'étape de la transformée inverse en ondelettes bidimensionnelles sur chaque domaine qui s'implémente également avec un algorithme rapide et donne une reconstruction sur l'espace déformé. Finalement pour chaque domaine, on effectue la déformation inverse en utilisant le même opérateur que dans la transformation directe. Les images obtenues pour chacun de ces domaines sont alors ajoutées à celle obtenue par la transformée en ondelettes inverse des coefficients d'ondelettes isotropes du fond.

### 3.1.8 L'opérateur de translation

La translation qui apparaît dans la transformation pose des difficultés dans le cadre discret. En effet, la translation se fait par un facteur réel alors que l'image est définie sur une grille discrète. Il faut donc définir une translation permettant de s'affranchir de cette difficulté.

L'opérateur de translation choisi est un opérateur de translation monodimensionnel avec une part d'interpolation et une part d'extrapolation. L'extrapolation est obtenue par symétrisation et l'interpolation est obtenue par une méthode de spline.

L'interpolation est la partie la plus importante de cet opérateur : idéalement celle-ci devrait être inversible, stable et ne pas créer d'oscillations. Thevenaz et al. [TBU00, BTU01] recherchent le meilleur compromis entre ces différentes contraintes et exhibent une famille d'interpolateurs bien adaptés. Ces interpolateurs s'implémentent de manière efficace et sont stables.

Pour être plus précis, on possède une suite d'échantillons  $f_k$  correspondant à la valeur en  $k$  et on souhaite obtenir une fonction  $f$  telle que

$$f(k) = f_k \quad \forall k . \quad (3.116)$$

Pour ceci, on se donne une fonction de synthèse  $\varphi$  et on recherche  $f$  sous la forme

$$f(x) = \sum_k c_k \varphi(x - k) \quad (3.117)$$

où les  $c_k$  sont déterminés à partir des  $f_k$  mais non nécessairement égaux à ceux-ci comme dans le cas de l'interpolation classique.

Le choix de la fonction  $\varphi$  est crucial : il conditionne le coût de la détermination des coefficients  $c_k$  ainsi que la possibilité d'obtenir une transformation quasi inversible.

Thevenaz et al. [TBU00, BTU01] ont montré que les méthodes basées sur les splines (B-splines et o-Moms) permettent les meilleurs compromis entre inversibilité, stabilité et absence d'oscillations. Dans l'implémentation, le choix s'est porté sur les B-spline d'ordre 3 :

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{2}{3} - \frac{1}{2}|x|^2(2 - |x|) & \text{si } 0 \leq |x| < 1 \\ \frac{1}{6}(2 - |x|)^3 & \text{si } 1 \leq |x| < 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} . \quad (3.118)$$

L'obtention des coefficients  $c_k$  à partir des valeurs  $f_k$  se fait alors à l'aide de la procédure récursive présentée dans l'article [TBU00].

## 3.2 Mesure de la géométrie

La transformation en bandelettes qui vient d'être décrite suppose la connaissance des domaines  $\Omega_i$  et des déformations  $w_i$  associées. On étudie ici comment obtenir ces caractéristiques géométriques à l'aide d'un algorithme *ad-hoc*. Celui-ci permet cependant un contrôle suffisant sur la détection pour obtenir les résultats du théorème d'approximation.

### 3.2.1 Estimation de la direction de régularité

Toutes l'approche des bandelettes est basée sur l'idée de rectification d'une direction de régularité. La première étape est donc d'estimer celle-ci dans les images.

Comme on l'a noté dans le chapitre précédent, dans le cas d'une fonction régulière la direction  $\tau$  de régularité maximale de la fonction  $f$  est donnée par la direction orthogonale au gradient

$$\tau(x) = \frac{\nabla f(x)^\perp}{|\nabla f(x)|}. \quad (3.119)$$

Dans la pratique, les fonctions ne sont pas régulières et le gradient peut donc ne pas être défini. De plus, la présence d'un bruit additif ou d'un bruit du à la pixelisation dans le cas discret rend la mesure du gradient instable.

Une estimation de la direction de régularité maximale peut cependant être effectuée par ce principe si on commence par lisser légèrement l'image. En effet, si le noyau de lissage  $g$  utilisé est régulier alors la fonction  $g \star f$  est régulière et on peut calculer le gradient de cette fonction. Le flot  $\tau$  sera donc défini comme l'orthogonal de gradient

$$\tau(x) = \frac{\nabla(g \star f)(x)^\perp}{|\nabla(g \star f)(x)|}. \quad (3.120)$$

Le choix du noyau de lissage et en particulier de la taille de son support est particulièrement important : un noyau large permet d'éliminer efficacement le bruit tandis qu'un noyau fin est nécessaire pour avoir une bonne précision.

Soit  $g$  un noyau de lissage, c'est à dire une fonction positive de moyenne 1

$$g(x) \geq 0 \quad \text{et} \quad \int |g(x)| dx = 1 \quad (3.121)$$

$$\|g\|_1 = 1 \quad (3.122)$$

on définit le noyau  $g_\eta$  à partir de  $g$  par dilatation

$$g_\eta = \frac{1}{\eta^2} g(x/\eta) \quad \text{et} \quad \|g_\eta\|_1 = 1. \quad (3.123)$$

On étudie maintenant l'influence du paramètre  $\eta$  sur l'estimation de la direction de régularité.

En reprenant les fonctions du modèle de la section 1.1.2.2, la fonction observée est

$$f_s = h_s \star f + b \quad (3.124)$$

qui devient si l'on impose que le bruit  $b$  soit un bruit blanc  $W$

$$f_s = h_s \star f + W \quad (3.125)$$

où  $h_s$  est une fonction de lissage d'échelle  $s$ ,  $f$  une fonction régulière par morceaux et  $W$  est un bruit blanc gaussien de variance  $\sigma^2$ . On a

$$g_\eta \star f_s = g_\eta \star (h_s \star f + W) \quad (3.126)$$

$$g_\eta \star f_s = g_\eta \star (h_s \star f) + g_\eta \star W \quad (3.127)$$

et donc

$$\nabla(g_\eta \star f_s) = \nabla(g_\eta \star (h_s \star f)) + \nabla(g_\eta \star W). \quad (3.128)$$

On montre alors que la norme de la composante due au bruit  $|\nabla(g_\eta \star W)(x)|$  se contrôle en fonction de  $\eta$  par

$$E(|\nabla(g_\eta \star W)(x)|^2) = K \frac{1}{\eta^4} \sigma^2 \quad (3.129)$$

En effet,

$$\nabla(g_\eta \star W) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1}(g_\eta \star W) \\ \frac{\partial}{\partial x_2}(g_\eta \star W) \end{pmatrix} \quad (3.130)$$

$$\nabla(g_\eta \star W) = \begin{pmatrix} (\frac{\partial}{\partial x_1} g_\eta) \star W \\ (\frac{\partial}{\partial x_2} g_\eta) \star W \end{pmatrix} \quad (3.131)$$

or

$$\frac{\partial}{\partial x_i} g_\eta(x) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{1}{\eta^2} g(x/\eta) \right) \quad (3.132)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} g_\eta(x) = \frac{1}{\eta^3} \frac{\partial}{\partial x_i} g(x/\eta) \quad (3.133)$$

donc

$$\int \left| \frac{\partial}{\partial x_i} g_\eta(x) \right|^2 dx = \int \frac{1}{\eta^6} \left| \frac{\partial}{\partial x_i} g(x/\eta) \right|^2 dx \quad (3.134)$$

$$= \frac{1}{\eta^4} \int \frac{1}{\eta^2} \left| \frac{\partial}{\partial x_i} g(x/\eta) \right|^2 dx \quad (3.135)$$

$$\int \left| \frac{\partial}{\partial x_i} g_\eta(x) \right|^2 dx = \frac{1}{\eta^4} K_i^2 . \quad (3.136)$$

On en déduit alors que

$$E\left(\left(\frac{\partial}{\partial x_i} g_\eta\right) \star W\right)^2 = E\left(\left|\left(\frac{\partial}{\partial x_i} g_\eta\right)^\star, W\right|^2\right) \quad (3.137)$$

et puisque  $W$  est un bruit blanc

$$E\left(\left(\left(\frac{\partial}{\partial x_i} g_\eta\right) \star W\right)(x)\right)^2 = \frac{1}{\eta^4} K_i^2 \sigma^2 . \quad (3.138)$$

Il en résulte que plus  $\eta$  est grand plus la composante due au bruit est petite et que

$$E(|\nabla(g_\eta \star W)(x)|^2) = E\left(\left(\left(\frac{\partial}{\partial x_1} g_\eta\right) \star W\right)(x)\right)^2 + E\left(\left(\left(\frac{\partial}{\partial x_2} g_\eta\right) \star W\right)(x)\right)^2 \quad (3.139)$$

$$E(|\nabla(g_\eta \star W)(x)|^2) = \frac{1}{\eta^4} (K_1^2 + K_2^2) \sigma^2 . \quad (3.140)$$

On s'intéresse dorénavant à la partie ne correspondant pas au bruit

$$h_s \star f . \quad (3.141)$$

Lorsque  $h_s \star f$  est régulière, on sait que

$$\nabla(g_\eta \star (h_s \star f))(x) \xrightarrow{\eta \rightarrow 0} \nabla(h_s \star f)(x) \quad (3.142)$$

puisque  $g_\eta$  est une approximation de l'unité.

On précise ces comportements lorsque les noyaux de lissages  $h$  et  $g$  sont à support compact par exemple dans  $[-1, 1]^2$  et qu'ils sont strictement positifs sur  $[-1/2, 1/2]^2$ .

La régularité de  $f$  en dehors des singularités permet d'obtenir des majoration de  $|\nabla(h_s \star f)(x)|$  dès que le support de  $h_s$  centré en  $x$  ne rencontre pas les singularités :

$$|\nabla(h_s \star f)(x)| \leq |\nabla f|_{\infty, \bar{\mathcal{C}}} \quad (3.143)$$

où  $|\nabla f|_{\infty, \bar{\mathcal{C}}}$  désigne le maximum de la norme du gradient de  $f$  en dehors des singularités de  $f$ . De même, dès que le support de  $g_\eta \star h_s$  centré en  $x$  ne rencontre pas les singularités de  $f$ , on peut majorer  $|\nabla(g_\eta \star (h_s \star f))(x)|$  :

$$|\nabla(g_\eta \star (h_s \star f))(x)| \leq |\nabla f|_{\infty, \bar{\mathcal{C}}} . \quad (3.144)$$

On s'intéresse maintenant au cas où  $f$  est discontinue avec un saut de hauteur supérieur à  $\lambda$  le long d'une courbe  $\mathcal{C}$  régulière. On montre que le gradient au voisinage de ce point devient grand

$$|\nabla(g_\eta \star (h_s \star f))|^2 \geq K \frac{\lambda^2}{(\eta + s)^2} \quad (3.145)$$

et que sa direction tend vers la direction de la normale à la courbe  $\mathcal{C}$ .

La démonstration précise de cette propriété est repoussée à l'annexe 3B mais on peut en donner une idée à l'aide des distributions. Le gradient au sens des distributions de  $f_0$  comporte une partie bornée à l'extérieur de la singularité et une partie non bornée le long de la discontinuité. Pour être plus précis, le long de la discontinuité le gradient est un dirac dans la direction de la normale. C'est donc cette partie qui domine dans le gradient lissé et celui-ci tend donc à être orienté dans le sens de la normale à la courbe.

- On distingue donc trois composantes dans la norme au carré du gradient lissé de  $f_s$
- une partie provenant du bruit qui se comporte en  $\frac{\sigma^2}{\eta^4}$ ,
  - une partie provenant de la partie régulière de  $f$  qui reste bornée par  $\|\nabla(f_0)\|_{\infty, \bar{c}}^2$ ,
  - et une partie provenant de la partie singulière de  $f$  qui se comporte en  $\frac{\lambda^2}{(\eta+s)^2}$ .

La composante la plus intéressante est la dernière et on essaye donc de choisir  $\eta$  pour que ce terme domine : ceci suppose que  $\eta$  ne soit ni trop petit puisqu'alors c'est le terme de bruit qui domine ni trop grand puisque dans ce cas c'est le terme correspondant à la partie régulière qui domine. On propose dans la section suivante un algorithme de détection de la géométrie basé sur ce principe lorsque le niveau de bruit est connu.

### 3.2.2 Décomposition en domaines

La décomposition en domaines permet une approximation du flot sur les zones où celui est significatif en un flot constant selon la direction verticale ou horizontale. L'algorithme présenté ici pour obtenir une telle décomposition est basé sur une estimation du flot et son intégration au voisinage du contour. La courbe intégrale résultante est alors segmentée en fonction de sa direction. Un grass-fire, une technique de croissance de région à partir de courbes introduite par Blum [Blu73], permet alors d'obtenir des domaines horizontaux à partir des segments de courbes horizontaux et des domaines verticaux à partir des segments de courbes verticaux.

Cette décomposition de domaine se fait donc en deux phases :

- une estimation du flot, son intégration au voisinage de contours et son découpage en flots plutôt horizontaux et en flots plutôt verticaux,
- un grass-fire à partir de représentants de ces flots.

On étudie ces deux phases séparément.

Le principe de l'estimation du flot a été présenté dans la section précédente : celui-ci est mesuré par des gradients de version lissée de la fonction. On utilise plusieurs lissage, on mesure le gradient à une échelle jugée significative et on détermine les maxima locaux à ces échelles. La direction du flot en chacun de ces maxima ainsi que des critères de continuité sont utilisés pour les chaîner. Le résultat n'est pas la chaîne de maxima mais la courbe intégrale du flot défini en chacun d'eux. Le découpage en parties horizontales et verticales se fait alors à l'aide d'un algorithme de programmation dynamique permettant de minimiser les dérivées des paramétrisations. Le flot sur chacune de ces parties est alors représenté par la courbe médiane entre les maxima utilisés. Ces opérations sont maintenant détaillées et illustrées par la figure 3.3.

L'échelle  $\eta$  de lissage de l'image est choisie localement parmi une gamme d'échelles dyadiques  $2^j$ . Afin d'adapter l'échelle de lissage au comportement local de la fonction, on calcule les gradients aux différentes échelles de lissage et on définit l'échelle de lissage locale au point  $x$  comme la première échelle telle que

$$|\nabla(g_\eta \star f)(x)| \geq \lambda \frac{\sigma}{\eta^2} \quad (3.146)$$

où  $\lambda$  est une constante choisie de l'ordre de 2. A cette échelle, on est assuré que le bruit ne domine pas. Les maxima locaux du gradient sont définis comme des maxima dans la direction orthogonale au gradient à l'échelle de lissage trouvée précédemment sur une zone rectangulaire  $\mathcal{Z}_d$  de largeur  $K\eta$  proportionnelle à l'échelle de lissage

$$\mathcal{Z}_d = \{x \in m[-1/2, 1/2] \tau + [-K\eta, K\eta] \tau^\perp\} \quad (3.147)$$



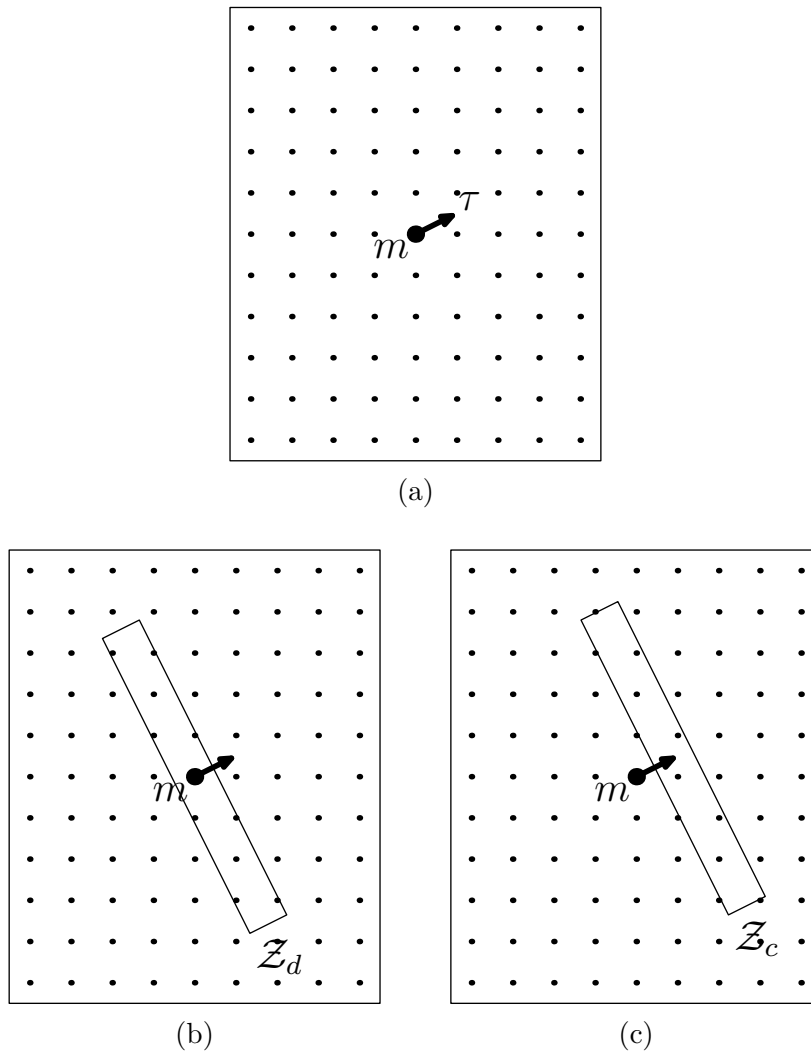


FIGURE 3.3 – Détection et chainage : (a) un maxima  $m$  et son flot  $\tau$  associé, (b) le rectangle  $\mathcal{Z}_d$  sur lequel on vérifie la cohérence du flot, (c) le rectangle  $\mathcal{Z}_c$  sur lequel on recherche le maxima suivant.

où  $K$  est choisi de l'ordre de 2 fois le support du noyau  $g$  définissant le lissage.

On élimine alors les *mauvais* maxima, ceux où le flot ne satisfait pas la condition suivante de régularité sur ce voisinage de taille  $K\eta$  dans la direction du gradient

$$|\langle \nabla(g_\eta \star f)(x), \frac{(\nabla(g_\eta \star f)(x_0))^\perp}{|\nabla(g_\eta \star f)(x_0)|} \rangle| \leq \lambda \frac{\sigma}{\eta^2} + \epsilon |\nabla(g_\eta \star f)(x_0)| \quad (3.148)$$

où  $\epsilon$  est choisi de l'ordre de  $1/10$ . Cette condition permet d'éliminer les coins où le flot n'est pas cohérent. En effet, dans ce cas, le gradient dans le voisinage peut varier fortement et n'est donc plus aligné avec le gradient de départ. On considère que cette variation du gradient est trop grande lorsque la projection sur la direction orthogonale au gradient devient trop grande devant le bruit et la norme du gradient du maximum.

Les maxima restants sont alors chaînés en suivant la direction du flot. On utilise pour cela la procédure de chaînage suivante en partant du maxima d'énergie maximum. On associe au maximum courant  $m$  une zone  $\mathcal{Z}_c$  de recherche définie comme un rectangle orienté par la direction du flot  $\tau$  de hauteur 1 et de largeur proportionnelle à l'échelle de détection et décalé de  $1/2$  dans la direction du flot :

$$\mathcal{Z}_c = \{x \in m + 1/2 \tau + [0, 1] \tau + [-K\eta, K\eta] \tau^\perp\}. \quad (3.149)$$

S'il existe plus d'un maximum dans cette zone, le chaînage s'arrête. Dans le cas où il existe un unique maximum, on vérifie par deux test que celui-ci est compatible avec le maximum courant. Le premier test vérifie que l'échelle associée à ce maximum varie d'au plus un facteur 2 par rapport au maximum courant. Le second vérifie que le maximum courant est dans la zone de recherche associée au nouveau maximum dans l'autre direction. Si le maximum n'est pas compatible, le chaînage s'arrête.

Les chaînes ainsi obtenues sont des chaînes de maxima que l'on segmente en fonction de la direction du flot. En effet, on souhaite avoir des zones où le flot est plutôt horizontal, c'est-à-dire des zones où le flot n'est jamais strictement vertical et des zones où le flot est plutôt vertical.

Soit  $\{m_1, \dots, m_n\}$  une telle chaîne de maxima et  $\{\theta_1, \dots, \theta_n\}$  les angles avec l'horizontale correspondant. On définit un angle limite inférieur à  $\pi/2$ , par exemple  $\pi/6$ , et on dit qu'un maximum est strictement horizontal (respectivement vertical) si l'angle entre le flot et l'horizontale (respectivement la verticale) est inférieur à l'angle limite.

$$\text{si } |\theta_i \bmod \pi| \leq \pi/6 \quad \text{le maxima } m_i \text{ est strictement horizontal} \quad (3.150)$$

$$\text{si } |(\theta_i - \pi/2) \bmod \pi| \leq \pi/6 \quad \text{le maxima } m_i \text{ est strictement vertical.} \quad (3.151)$$

On segmente alors les chaînes de maxima à partir de ces germes horizontaux ou verticaux. Les maxima entre deux germes horizontaux sont dits horizontaux et les maxima entre deux germes verticaux sont dits verticaux. De manière similaire, les maxima situés aux extrémités d'une chaîne ont la direction du premier ou du dernier germe. Finalement il ne reste que le cas des maxima situés entre des germes horizontaux et verticaux.

Pour ceux-ci, le découpage se fait en prolongeant les deux choix de directions aux bords de manière à minimiser la somme des carrés des écarts entre l'angle du flot et la direction choisie. Si la segmentation se fait entre les maxima  $m_2$  et  $m_{n-1}$  où  $m_1$  est strictement horizontal et  $m_n$  strictement vertical, on cherche le point de coupure  $j$  qui minimise

$$\sum_{i \leq j} |\theta_i \bmod \pi|^2 + \sum_{j < i} |(\theta_i - \pi/2) \bmod \pi|^2 \quad (3.152)$$

où les  $\theta_i$  représentent les angles des flots avec l'horizontale.

Le flot correspondant à chaque morceau horizontal ou vertical est alors intégré et on choisit pour le représenter la courbe intégrale passant par le médian des maxima utilisés. Celui-ci est tel que les maxima soient répartis en nombre identique de par et d'autre de la courbe.

On obtient ainsi un ensemble de courbes verticales ou horizontales que l'on note  $\mathcal{C}_i$  et qui sont à la base de l'obtention des domaines. La figure 3.4 présente le résultat de cet algorithme pour l'image de Lenna.



FIGURE 3.4 – Flot détecté par la méthode présentée : les courbes sont les courbes intégrales choisies.

Les domaines  $\Omega_i$  sont obtenus à partir d'un grass-fire horizontal/vertical issu de ces contours : le domaine  $\Omega_i$  associé à la courbe  $\mathcal{C}_i$  horizontale est le domaine connexe contenant la courbe  $\mathcal{C}_i$  et tous les points situés à une distance de  $\mathcal{C}_i$  d'une part inférieure à la distance maximale  $d_0$  selon la direction verticale et d'autre part inférieure aux distances selon la direction verticale des courbes horizontales et selon la direction horizontale des courbes verticales. Les domaines associés à des courbes verticales sont définis de manière identique en échangeant le rôle des deux orientations.

Ces domaines s'obtiennent par l'algorithme de croissance des domaines suivant :

1. On initialise les domaines  $\Omega_i$  avec les courbes  $\mathcal{C}_i$  obtenues précédemment, ces domaines correspondent à l'ensemble des points à une distance verticale/horizontale  $d$

de 0 des courbes initiales.

2. Pour chaque domaine  $\Omega_i$  si le long de la courbe la largeur dans la direction verticale/horizontale du domaine est égale à  $d$  on teste si l'on peut étendre cette largeur de 1 en vérifiant que le point suivant n'est pas dans un autre domaine.
3. Tant que  $d < d_0$ , on incrémente  $d$  et on revient à l'étape 2.

Cet algorithme de croissance de domaines est appelé grass-fire horizontal/vertical et est illustré dans la figure 3.5.

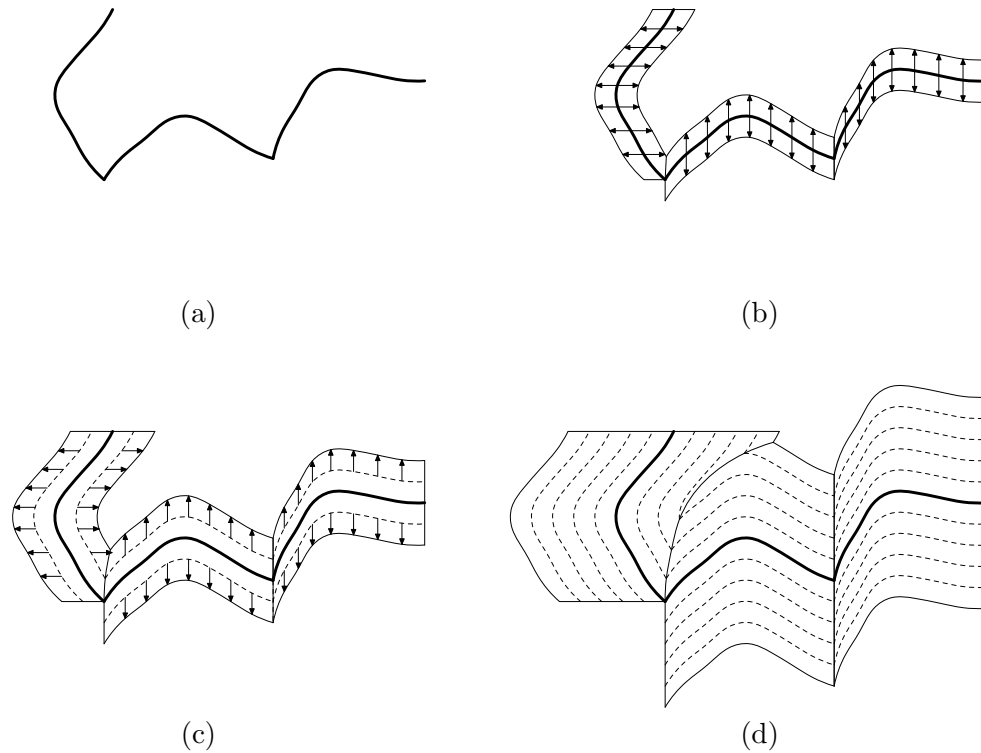


FIGURE 3.5 – Grass-fire horizontal/vertical : (a) les 3 courbes définissant la géométrie de départ, (b) la première étape du grass-fire avec la croissance des domaines horizontaux d'un pixels vers le haut et le bas et la croissance des domaines verticaux d'un pixels vers la gauche et la droite, (c) la seconde étape du grass-fire avec l'extension des domaines obtenues à la première étape, (d) le résultat du grass-fire après 5 étapes.

Cet algorithme de définition des domaines à partir des courbes ne nécessite aucune information autre que la position de celles-ci. Si on connaît le gradient réel, on peut cependant modifier la condition d'arrêt de l'extension en incorporant un critère de compatibilité entre le flot induit par la courbe et le gradient en ce point afin de garantir la cohérence du flot dans le domaine.

On obtient donc par ces procédés des domaines  $\Omega_i$  associés à des courbes  $\mathcal{C}_i$  paramétrées horizontalement ou verticalement qui sont adaptés à la fonction initiale  $f$ . La figure 3.6 présente les domaines obtenus par grass-fire horizontal/vertical à partir des flots de la figure 3.4.

Dans la pratique, le nombre de domaines obtenus est souvent grand. Pour éviter la redondance due à ceci, on peut alors chercher à ne conserver qu'un certain nombre de



FIGURE 3.6 – Domaines obtenus à partir des flots de la figure 3.4 : les domaines sont représentés ainsi que les courbes intégrales des flots associés.

ces domaines. On élimine par exemple les domaines pour lesquelles la représentation en ondelettes isotropes est plus efficace en terme de nombre de coefficients au dessus d'un seuil ou encore plus simplement ceux dont la longueur est petite comme dans la figure 3.7.

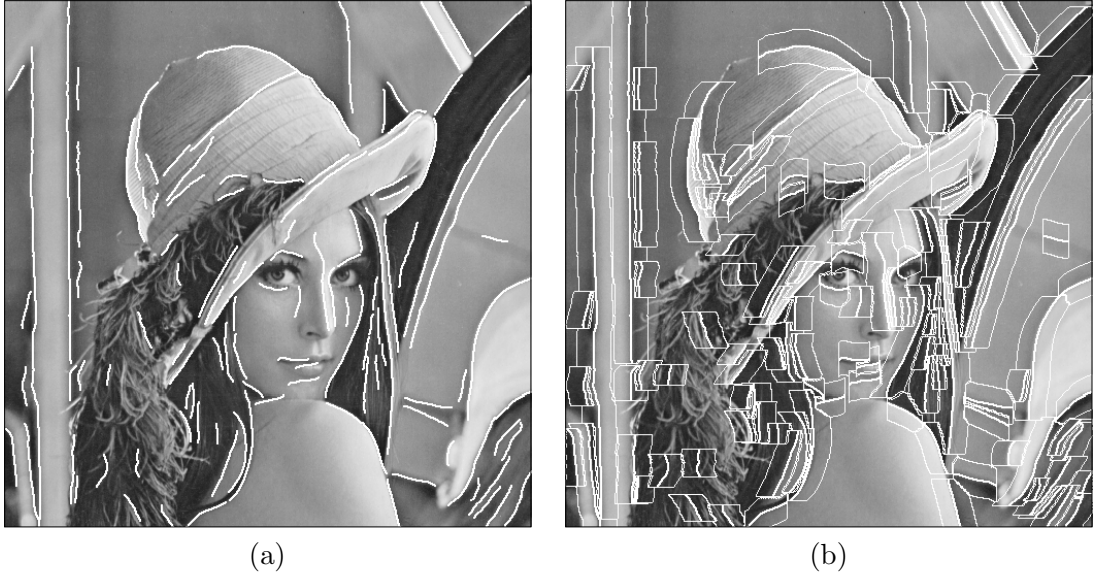


FIGURE 3.7 – Sélection des domaines : (a) les courbes intégrales du flot de la figure 3.4 de longueur supérieure à 20 pixels, (b) les domaines obtenus par grass-fire à partir de ces courbes sélectionnées.

## 3.3 Débruitage

Le frame de bandelettes ainsi construit est redondant, il ne permet donc pas d'obtenir des résultats d'approximation non-linéaire, une modification de celui-ci comme celle proposée dans le dernier chapitre, est nécessaire. Ses capacités d'approximation peuvent cependant être illustrées par une application au débruitage. On utilise pour cela un algorithme de seuillage comme il en a été utilisé pour les les ondelettes [CD95] ou les curvelets [SCD]. On débute cette partie par un rappel sur le débruitage par seuillage.

### 3.3.1 Débruitage par seuillage

Les estimateurs par seuillage introduit par Donoho et Johnstone [DJ94] forment une famille d'estimateur simple et performant pour le débruitage d'un bruit blanc. Ils sont définis à partir d'une base orthonormée  $\{g_m\}_{m \in \mathbb{Z}}$  par un opérateur diagonal dans cette base. On détermine la décomposition dans la base des données bruitées  $\tilde{f} = f + W$ , où  $W$  est un bruit blanc de variance  $\sigma^2$

$$\tilde{f} = \sum_m \langle \tilde{f}, g_m \rangle g_m \quad (3.153)$$

$$\sum_m (\langle f, g_m \rangle + \langle W, g_m \rangle) g_m \quad (3.154)$$

$$\tilde{f} = \sum_m \langle f, g_m \rangle g_m + \sum_m \langle W, g_m \rangle g_m \quad (3.155)$$

et on estime  $f$  par  $\hat{f}$  obtenu en modifiant les coefficients par des opérateurs de seuillage  $\rho(T)$

$$\hat{f} = \sum_m \rho_T(\langle \tilde{f}, g_m \rangle), g_m . \quad (3.156)$$

L'opérateur de seuillage peut-être dur

$$\rho_T(x) = \begin{cases} x & \text{si } |x| > T_j \\ 0 & \text{si } |x| \leq T_j \end{cases} \quad (3.157)$$

ou doux

$$\rho_T(x) = \begin{cases} x - T & \text{si } x \geq T \\ x + T & \text{si } x \leq -T \\ 0 & \text{si } |x| \leq T \end{cases} . \quad (3.158)$$

Le seuil  $T$  doit être choisi proportionnel à l'écart type du bruit pour obtenir des résultats. Dans la pratique, on choisit souvent  $T = 3\sigma$ .

Donoho et Johnstone [DJ94] montrent que les performances de cet estimateur sont proches de celles d'un opérateur diagonal idéal par sélection ou atténuation et que les performances de ces opérateurs dépendent principalement de la vitesse de décroissance des coefficients dans la base et donc des performances d'approximation non-linéaire de cette base.

Coifman et Donoho [CD95] montrent l'intérêt d'introduire une invariance par translation dans la procédure pour améliorer les résultats. Ils obtiennent cette invariance en utilisant une famille de bases translatées formant un frame. La redondance due à l'utilisation de plusieurs bases n'est pas gênante si chacune de ces bases représente efficacement le signal. Cette procédure se généralise alors à l'usage des frames comme l'on fait par exemple Starck et al. avec les curvelets [SCD]. On va maintenant construire un frame de bandelettes invariant par translation.

### 3.3.2 Frame de bandelettes invariant par translation

Le frame de bandelettes précédemment construit est adapté à la géométrie mais n'est pas invariant par translation puisqu'il est basé sur des décompositions dans des bases d'ondelettes anisotropes. On modifie légèrement cette construction pour introduire une invariance par translation sur chaque domaine.

Pour chaque domaine  $\Omega_i$ , la famille orthonormée de bandelettes est obtenues par le procédé de bandelettisation. On décompose  $W_i f$  en ondelettes isotropes et on modifie les coefficients correspondants aux ondelettes isotropes intérieures pour obtenir des coefficients correspondants à des ondelettes anisotropes. On conserve ici le même principe ici mais on remplace la décomposition en ondelettes isotropes, dans laquelle un sous-échantillonnage est effectué à chaque échelle, par une décomposition dyadique en ondelettes isotrope dans laquelle ce sous-échantillonnage n'est pas effectué. Cette décomposition correspond donc à la décomposition dans l'union des translations des bases d'ondelettes isotropes et est donc bien invariante par translation. Le passage des ondelettes isotropes aux ondelettes anisotropes s'effectuent encore par des transformées en ondelettes monodimensionnelles discrètes à trous : à l'échelle  $2^j$ , les coefficients sur lesquels la transformée est effectuée sont ceux espacés de  $2^j$ .

En effectuant cette transformation sur chaque domaine, on obtient un frame de bandelettes invariant par translation adapté à la géométrie de ceux-ci. Il reste encore à estimer cette géométrie.

### 3.3.3 Estimation de la géométrie

On a jusque ici supposé la géométrie connue, son estimation est pourtant une nécessité pour obtenir des résultats à partir de la construction précédente. Bien que ce problème soit important, la question de l'estimation de la géométrie n'est pas le sujet central de cette thèse, on ne propose ici qu'une méthode ad-hoc dont on se contente de vérifier le caractère raisonnable.

L'estimation de la géométrie doit être robuste au bruit pour être utilisable. La méthode de la section 3.2 est basée sur le calcul de produits scalaires et on a vérifié que ceci induisait une certaine forme de robustesse au bruit. L'étude précise de cette robustesse et des performances de l'estimation n'a pas été réalisée car de nouvelles techniques de détection sont à l'étude comme on le mentionne dans le dernier chapitre.

Le procédé proposé ne permet pas en particulier de détecter de direction lorsque les contours sont peu marqués ou inexistantes comme dans le cas des textures directionnelles. Les résultats obtenus avec cette méthode sont cependant encourageants et une meilleure détection de la géométrie ne pourrait que les améliorer.

### 3.3.4 Résultats numériques

Les figures concluant ce chapitre présente les résultats de l'application d'un algorithme de débruitage par seuillage dur dans un frame de bandelettes invariant par translation. Ces résultats sont comparés avec un algorithme similaire dans un frame d'ondelettes isotropes invariant par translation. Ceci permet en effet de visualiser l'effet de l'introduction de la géométrie.

Les expériences ont été réalisées pour deux images classiques, Lenna et Peppers, et deux niveaux de bruits,  $\sigma = 25$  et  $\sigma = 40$ . Pour chacune de ces expériences, on présente l'image originale, l'image bruitée et les deux estimations, celle obtenue à l'aide des bandelettes et celle obtenue à l'aide des ondelettes. On effectue alors un agrandissement sur une région intéressante pour souligner les différences entre les deux méthodes.

De manière générale, le débruitage en bandelettes permet d'obtenir un gain en PSNR par rapport au débruitage en ondelettes. Bien que ce gain soit faible, les images obtenues avec les bandelettes semblent visuellement plus *belles* que les images obtenues avec les ondelettes. La différence entre les deux reconstructions est localisée aux voisinages des contours et ceux-ci, bien que correspondant à une faible surface et donc modifiant peu le PSNR, ont une grande importance dans la perception des images. La diminution des effets oscillants aux voisinages des contours obtenue grâce à l'introduction de la géométrie augmente bien la qualité visuelle des estimations.

Ces résultats pratiques peuvent être justifiés par les performances théoriques d'approximation non-linéaire du frame de bandelettes que l'on étudie dans le chapitre suivant.





FIGURE 3.8 – Débruitage de Lenna avec  $\sigma = 25$  : (a) image originale, (b) image bruitée ( $PSNR = 20.2$  db), (c) image débruitée avec les bandelettes ( $PSNR = 30.2$  db), (d) image débruitée avec les ondelettes ( $PSNR = 29.7$  db)

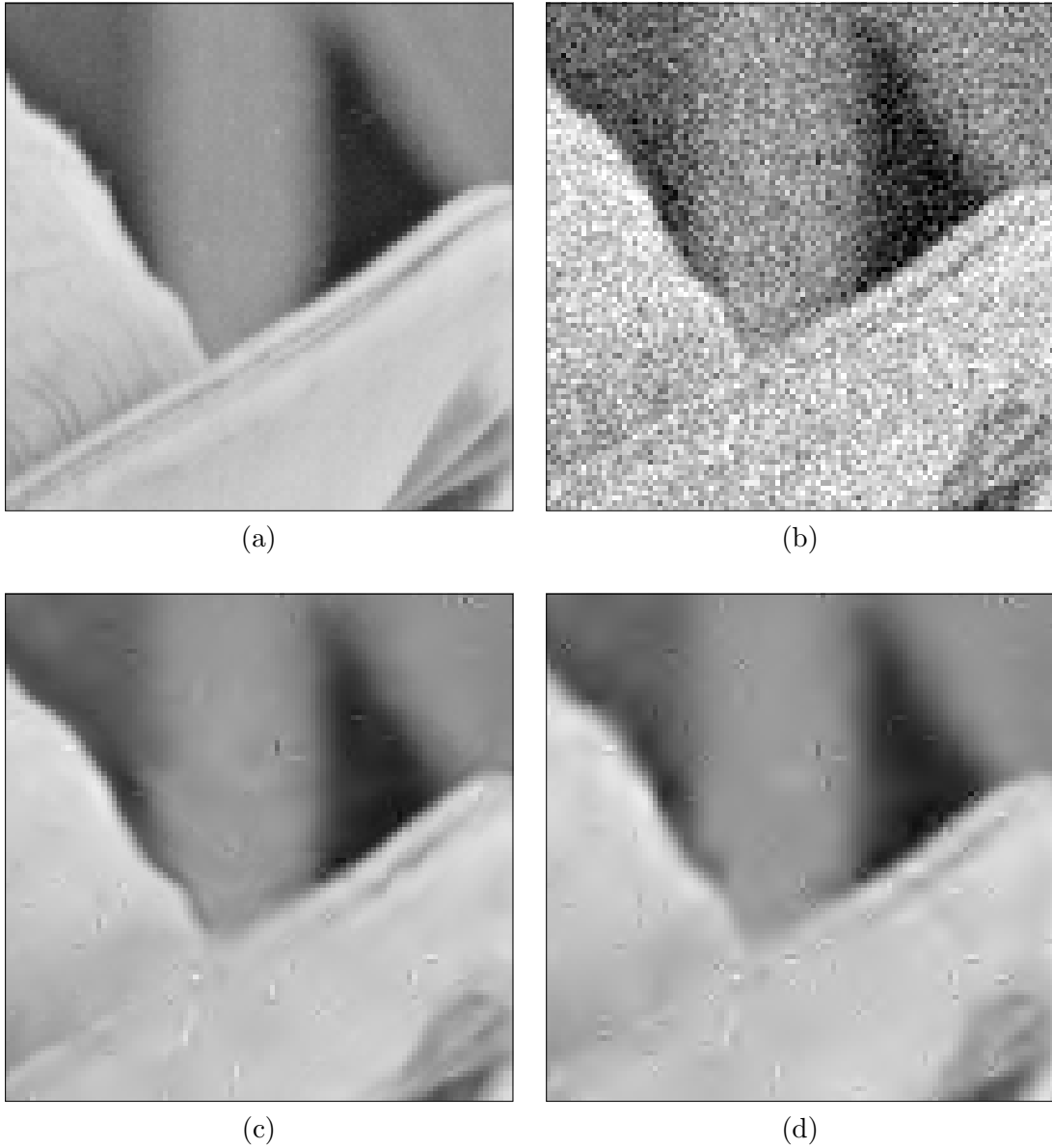


FIGURE 3.9 – Débruitage de Lenna avec  $\sigma = 25$  (agrandissement) : (a) agrandissement de l'image originale, (b) agrandissement de l'image bruitée ( $PSNR = 20.2$  db), (c) agrandissement de l'image débruitée avec les bandelettes ( $PSNR = 30.2$  db), (d) agrandissement de l'image débruitée avec les ondelettes ( $PSNR = 29.7$  db)



FIGURE 3.10 – Débruitage de Lenna avec  $\sigma = 40$  : (a) image originale, (b) image bruitée ( $PSNR = 16.1$  db), (c) image débruitée avec les bandelettes ( $PSNR = 27.0$  db), (d) image débruitée avec les ondelettes ( $PSNR = 26.2$  db)

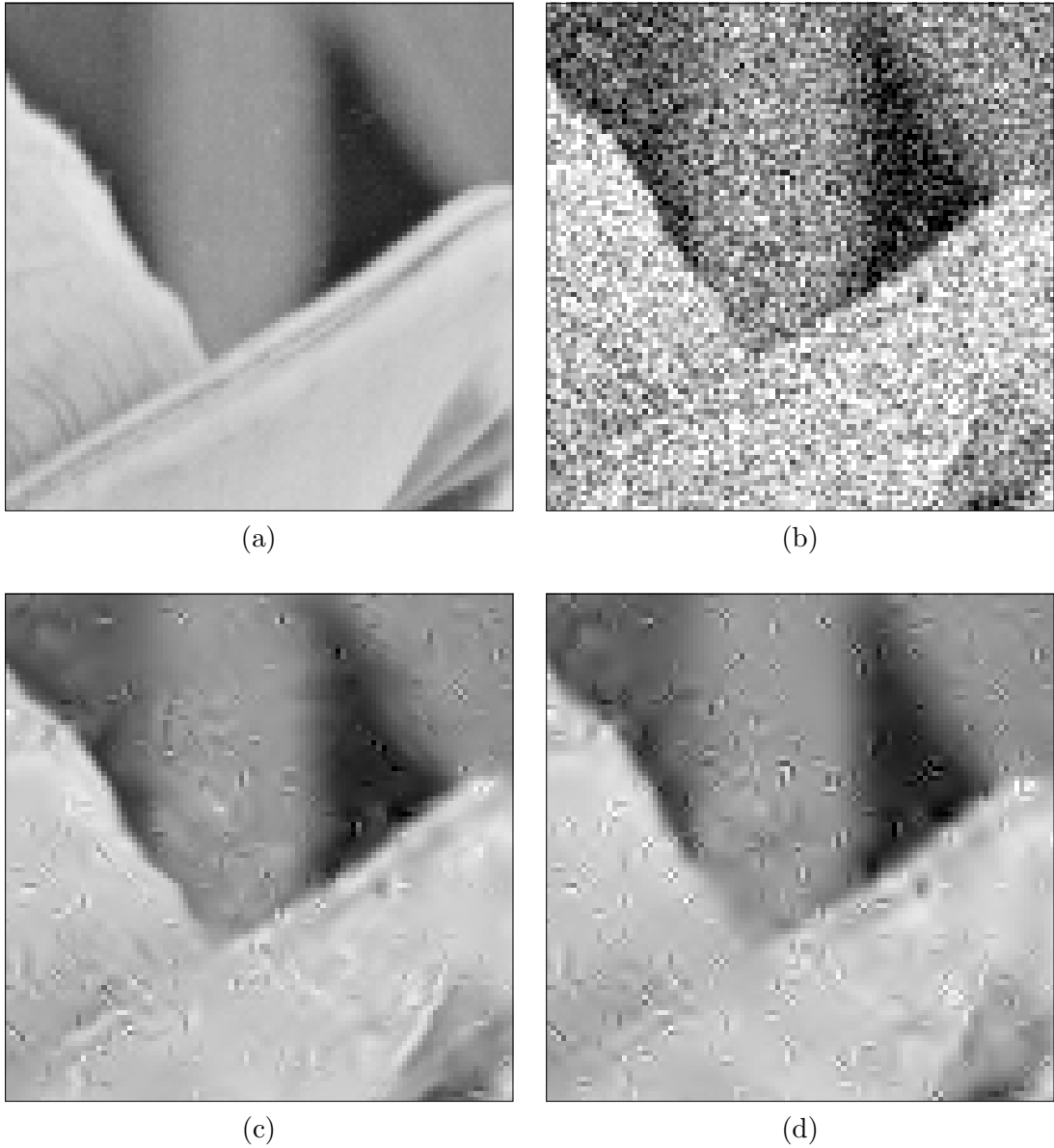


FIGURE 3.11 – Débruitage de Lenna avec  $\sigma = 40$  (agrandissement) : (a) agrandissement de l'image originale, (b) agrandissement de l'image bruitée ( $PSNR = 16.1$  db), (c) agrandissement de l'image débruitée avec les bandelettes ( $PSNR = 27.0$  db), (d) agrandissement de l'image débruitée avec les ondelettes ( $PSNR = 26.2$  db)

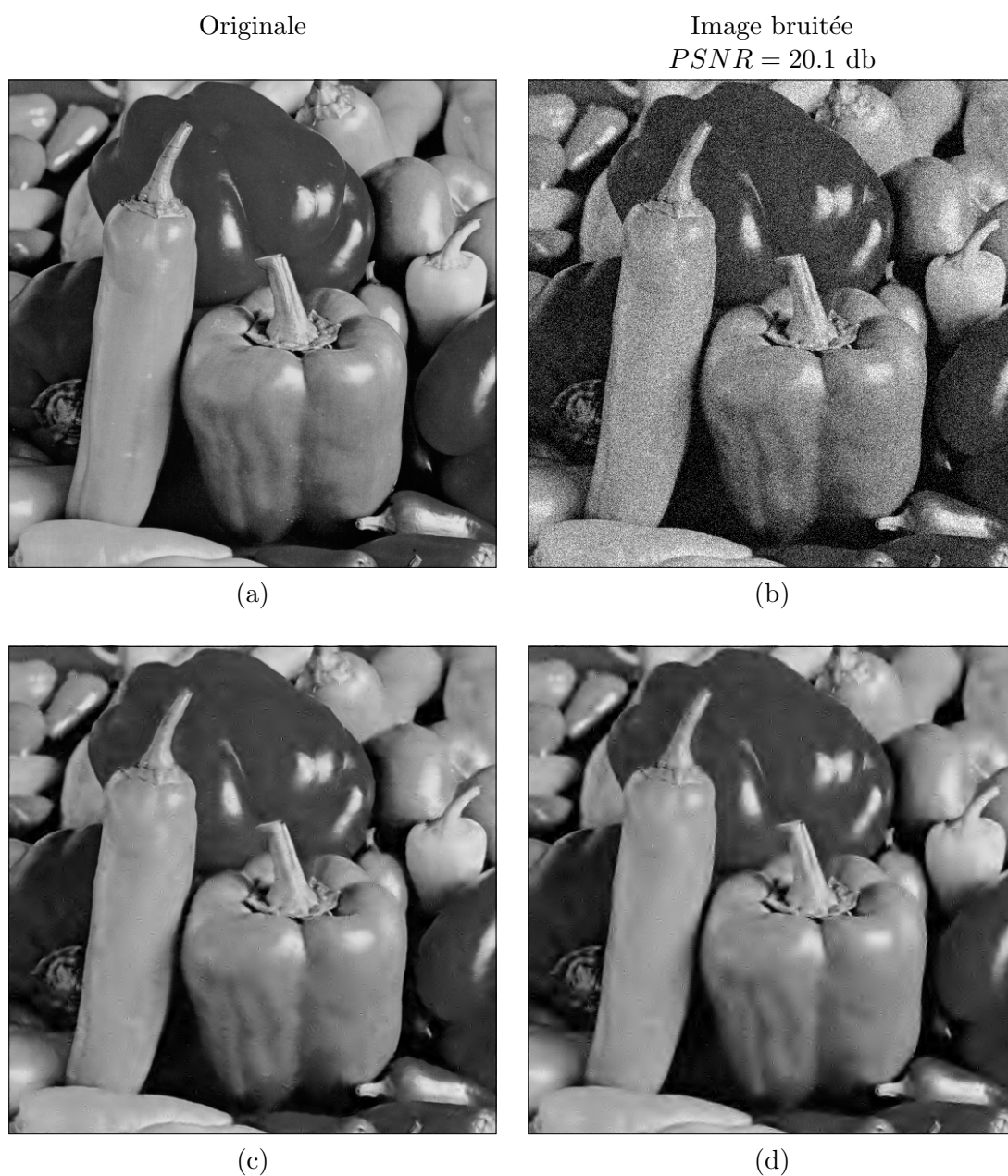


FIGURE 3.12 – Débruitage de Peppers avec  $\sigma = 25$  : (a) image originale, (b) image bruitée ( $PSNR = 20.1$  db), (c) image débruitée avec les bandelettes ( $PSNR = 30.3$  db), (d) image débruitée avec les ondelettes ( $PSNR = 29.8$  db)

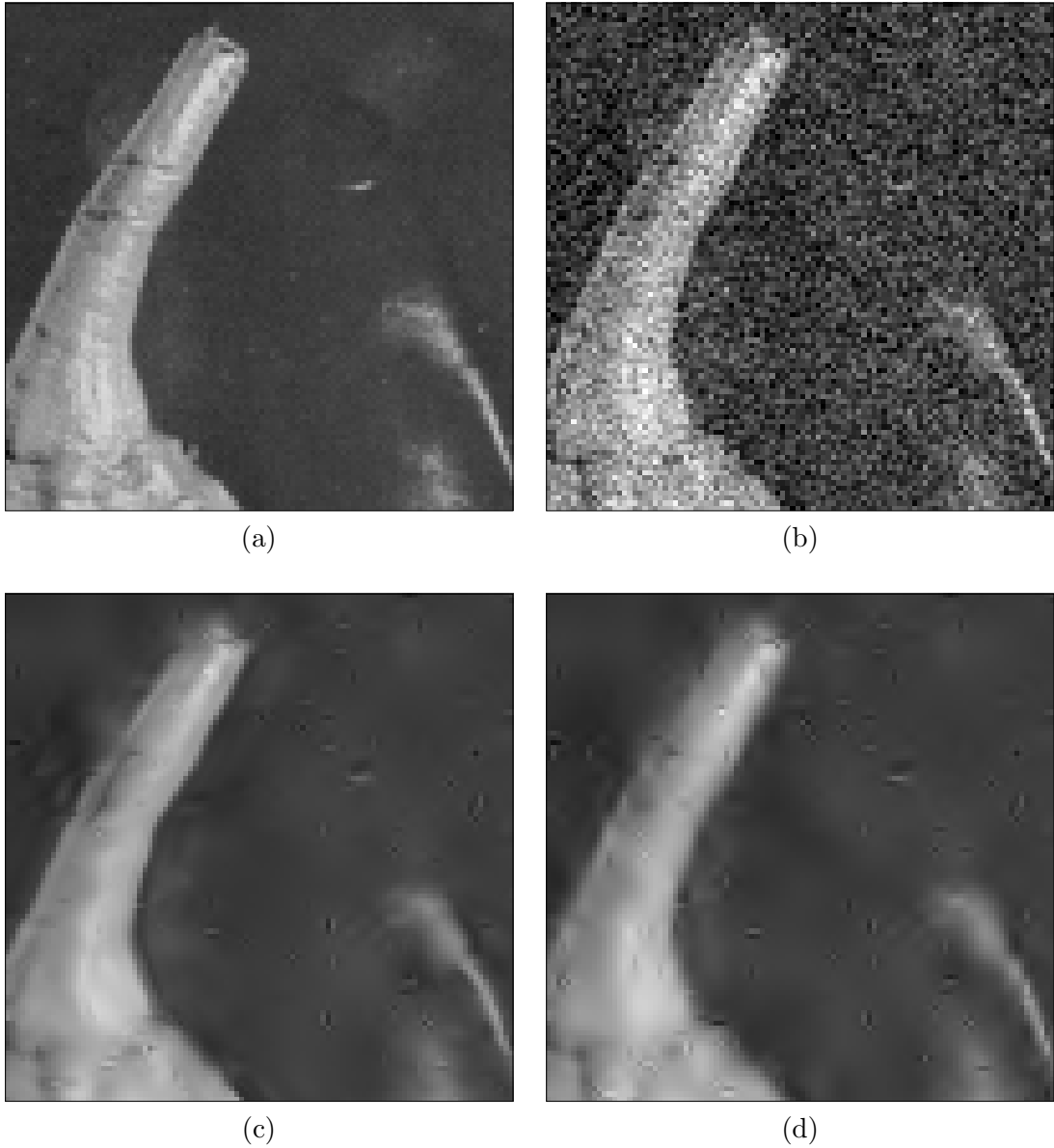
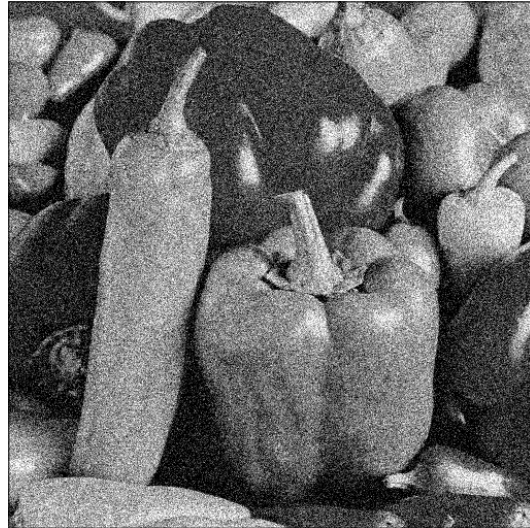


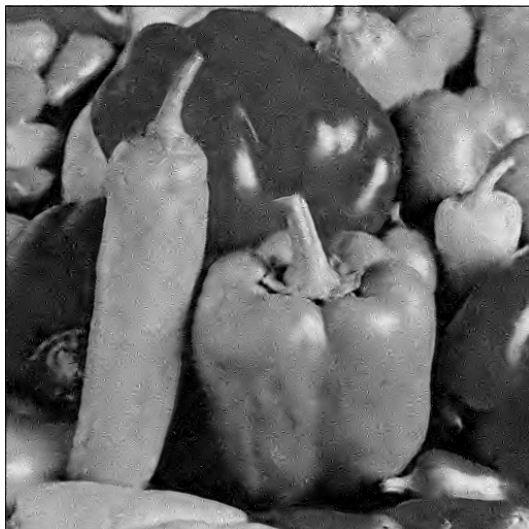
FIGURE 3.13 – Débruitage de Peppers avec  $\sigma = 25$  (agrandissement) : (a) agrandissement de l'image originale, (b) agrandissement de l'image bruitée ( $PSNR = 20.1$  db), (c) agrandissement de l'image débruitée avec les bandelettes ( $PSNR = 30.3$  db), (d) agrandissement de l'image débruitée avec les ondelettes ( $PSNR = 29.8$  db)



(a)



(b)



(c)



(d)

FIGURE 3.14 – Débruitage de Peppers avec  $\sigma = 40$  : (a) image originale, (b) image bruitée ( $PSNR = 16.1$  db), (c) image débruitée avec les bandelettes ( $PSNR = 27.0$  db), (d) image débruitée avec les ondelettes ( $PSNR = 26.3$  db)

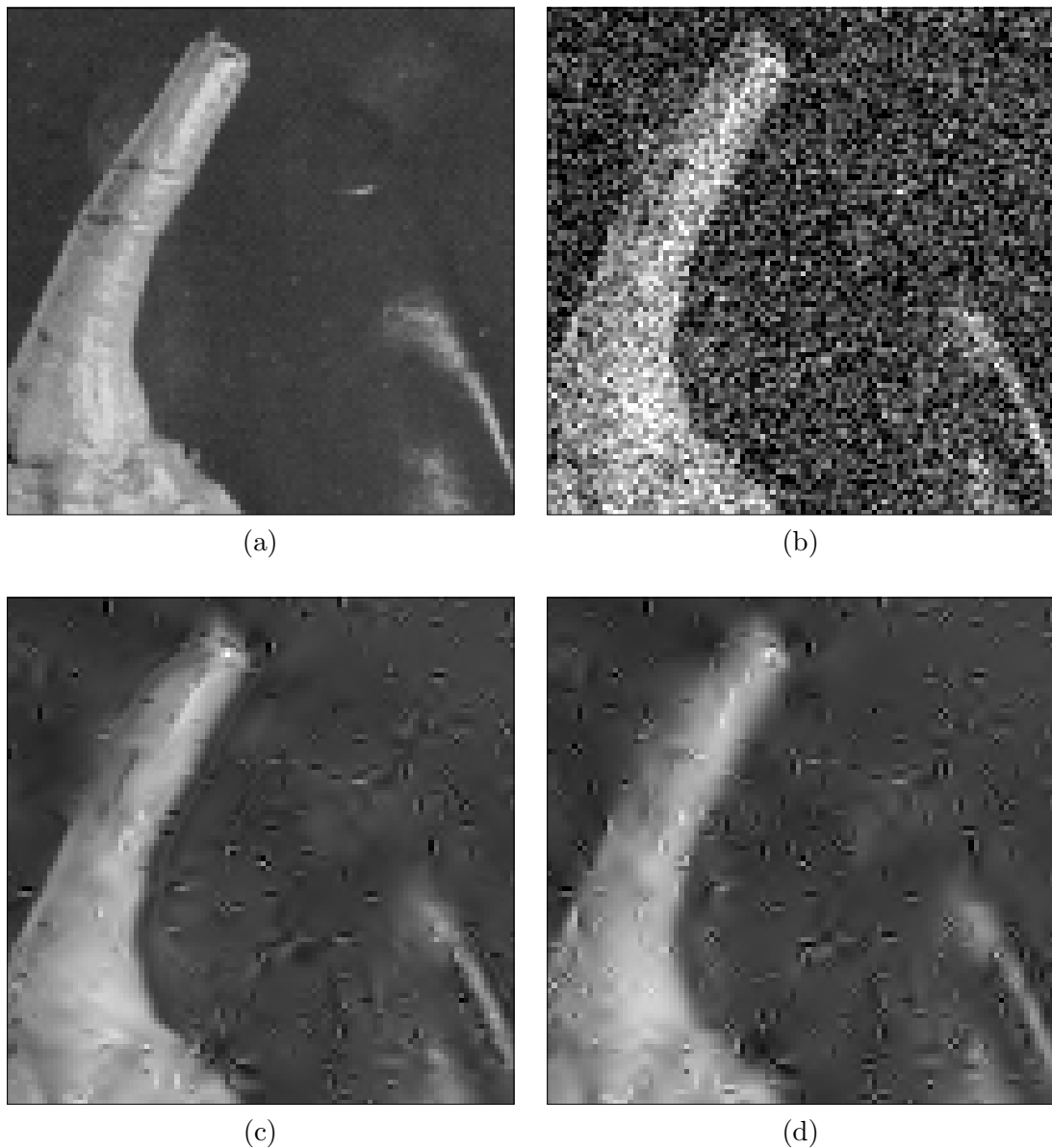


FIGURE 3.15 – Débruitage de Peppers avec  $\sigma = 40$  (agrandissement) : (a) agrandissement de l'image originale, (b) agrandissement de l'image bruitée ( $PSNR = 16.1$  db), (c) agrandissement de l'image débruitée avec les bandelettes ( $PSNR = 27.0$  db), (d) agrandissement de l'image débruitée avec les ondelettes ( $PSNR = 26.3$  db)



---

# Annexe 3A

## Ondelettes sur l'intervalle

---

3A.1 Ondelettes sur l'intervalle . . . . .	90
3A.2 Régularité des ondelettes de bords . . . . .	93
3A.3 Transformée en ondelettes discrètes sur l'intervalle . . . . .	96
3A.4 Ondelettes de bord et schéma discret . . . . .	97
3A.5 Régularité des ondelettes de bords modifiées . . . . .	98

Nous présentons ici la construction d'une transformée en ondelettes sur un intervalle quelconque  $[A, B]$  introduite simultanément par Andersson et al. [AHJP94] et Cohen et al. [CDV93]. Une étude de la régularité des ondelettes de bords est également proposée. Elle permet après une étude des propriétés de la transformation discrète associée de contrôler le support et la régularité des bandelettes de bords.

A partir de cette annexe, on note  $K$  les constantes apparaissant dans les différentes estimations. Par souci de simplicité, on se permet de faire varier la constante  $K$  d'une ligne à l'autre tant que cette variation n'est pas essentielle.

## 3A.1 Ondelettes sur l'intervalle

La construction reprise ici est celle de Andersson et al. [AHJP94] avec quelques changements de notations et quelques précisions supplémentaires.

On part d'une famille d'ondelettes à support compacts  $\psi_{j,k}$  et ses fonctions d'échelle associées  $\phi_{j,k}$  définies par Daubechies [Dau98].

Soit un intervalle  $[A, B]$ , pour chaque échelle  $2^j$ , on définit

$$S_j = \{k, \mathcal{S}(\phi_{j,k}) \cap [A, B] \neq \emptyset\} \quad (3A.1)$$

$$S_{j,I} = \{k, \mathcal{S}(\phi_{j,k-1}) \text{ et } \mathcal{S}(\phi_{j,k+1}) \subset [A, B]\} . \quad (3A.2)$$

Si le support de  $\phi$  est  $[0, 2N - 1]$ , ces ensembles se réduisent à

$$S_j = \{k, 2^{-j}A - (2N - 1) < k < 2^{-j}B\} \quad (3A.3)$$

$$S_{j,I} = \{k, 2^{-j}A + 1 \leq k \leq 2^{-j}B - (2N - 1) - 1\} . \quad (3A.4)$$

On définit les compléments à gauche et à droite des  $S_{j,I}$  dans  $S_j$  par

$$S_{j,L} = \{k, 2^{-j}A - (2N - 1) < k < 2^{-j}A + 1\} \quad (3A.5)$$

$$S_{j,R} = \{k, 2^{-j}B - (2N - 1) - 1 < k < 2^{-j}B\} . \quad (3A.6)$$

On suppose que ces compléments sont disjoints. Ceci revient à imposer une échelle maximale.

Dans la construction des espaces multirésolutions, on impose que chacun de ces espaces contienne les polynômes jusque à un degré  $N - 1$  donné. Pour ceci, la première idée est d'utiliser l'espace engendré par les restrictions à  $[A, B]$  des fonctions  $\phi_{j,k}$  avec  $k \in S_j$ , malheureusement l'orthogonalisation de cette famille est trop mal conditionnée pour être utilisable en pratique. L'idée de Andersson et al. [AHJP94] et de Cohen et al. [CDV93] est de ne conserver que les fonctions d'échelle  $\phi_{j,k}$  dont le support est à l'intérieur de  $[A, B]$  et d'ajouter des fonctions permettant la reconstruction des polynômes jusqu'au degré  $N - 1$ .

Pour obtenir cela, on introduit la restriction à  $[A, B]$  des projections des polynômes  $(x - A)^p$  et  $(x - B)^p$  sur les fonctions d'échelle localisées aux bords gauche et droit et qui ne sont pas dans l'ensemble des fonctions d'échelle intérieures :

$$(x - A)_{j,L}^p = \begin{cases} \sum_{k \in S_{j,L}} \langle 2^{-j/2} (2^j(x - A))^p, \phi_{j,k} \rangle \phi_{j,k}(x) & \text{si } x \in [A, B] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (3A.7)$$

$$(x - A)_{j,L}^p = \begin{cases} \sum_{k \in S_{j,L}} \langle (x - A)_j^p, \phi_{j,k} \rangle \phi_{j,k}(x) & \text{si } x \in [A, B] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (3A.8)$$

et

$$(x - B)_{j,R}^p = \begin{cases} \sum_{k \in S_{j,R}} \langle 2^{-j/2} (2^j (x - B))^p, \phi_{j,k} \rangle \phi_{j,k}(x) & \text{si } x \in [A, B] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (3A.9)$$

$$(x - B)_{j,R}^p = \begin{cases} \sum_{k \in S_{j,R}} \langle (x - B)_j^p, \phi_{j,k} \rangle \phi_{j,k}(x) & \text{si } x \in [A, B] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} . \quad (3A.10)$$

L'espace multirésolution  $V_j[A, B]$  à l'échelle  $2^j$  est alors défini par

$$V_j[A, B] = \text{Vect} \left\{ \{(x - A)_{j,L}^k\}_{k \in [0, N-1]}, \{\phi_{j,k}\}_{k \in S_{j,I}}, \{(x - B)_{j,R}^k\}_{k \in [0, N-1]} \right\} . \quad (3A.11)$$

Ces trois ensembles sont orthogonaux par construction. Pour trouver une base orthonormée de cet espace, il suffit d'en trouver une pour les ensembles de bords. Celle-ci est obtenue par un procédé de type Gramm-Schmidt basé sur la décomposition de Cholevski. On obtient ainsi une base orthogonale de  $V_j[A, B]$  :

$$V_j[A, B] = \text{Vect} \left\{ \varphi_{j,k}^L \right\}_{k \in (2^{-j}A - N, 2^{-j}A + 1)} \oplus \text{Vect} \left\{ \phi_{j,k} \right\}_{k \in S_{j,I}} \oplus \text{Vect} \left\{ \varphi_{j,k}^R \right\}_{k \in (2^{-j}B - (2N-1) - 1, 2^{-j}B - (N-1))} \quad (3A.12)$$

$$V_j[A, B] = \text{Vect} \left\{ \varphi_{j,k} \right\}_{k \in (2^{-j}A - N, 2^{-j}B - (N-1))} . \quad (3A.13)$$

Ces espaces  $V_j[A, B]$  forment une suite décroissante :

$$\cdots \supset V_{j-1}[A, B] \supset V_j[A, B] \supset V_{j+1}[A, B] \supset \cdots \quad (3A.14)$$

En effet, si  $k \in S_{j,I}$ ,

$$\phi_{j,k} = \sum_{k' \in S_{j-1,I}} \langle \phi_{j,k}, \phi_{j-1,k'} \rangle \phi_{j-1,k'} \quad (3A.15)$$

et

$$(x - A)_{j,L}^p = \sum_{k \in S_{j,L}} \langle 2^{-j/2} (2^j (x - A))^p, \phi_{j,k} \rangle \phi_{j,k}[A, B] \quad (3A.16)$$

$$= \sum_{k \in S_{j,L}} \langle 2^{-j/2} (2^j (x - A))^p, \phi_{j,k} \rangle \sum_{k' \in S_{j-1}} \langle \phi_{j,k}, \phi_{j-1,k'} \rangle \phi_{j-1,k'}[A, B] \quad (3A.17)$$

$$= \sum_{k' \in S_{j-1}} \sum_{k \in S_{j,L}} \langle 2^{-j/2} (2^j (x - A))^p, \phi_{j,k} \rangle \langle \phi_{j,k}, \phi_{j-1,k'} \rangle \phi_{j-1,k'}[A, B] \quad (3A.18)$$

$$= \sum_{k' \in S_{j-1,L}} \sum_{k \in S_{j,L}} \langle 2^{-j/2} (2^j (x - A))^p, \phi_{j,k} \rangle \langle \phi_{j,k}, \phi_{j-1,k'} \rangle \phi_{j-1,k'}[A, B] \\ + \sum_{k' \in S_{j-1,I}} \sum_{k \in S_{j,L}} \langle 2^{-j/2} (2^j (x - A))^p, \phi_{j,k} \rangle \langle \phi_{j,k}, \phi_{j-1,k'} \rangle \phi_{j-1,k'}[A, B] \quad (3A.19)$$

$$(x - A)_{j,L}^p = 2^{1/2+p} (x - A)_{j-1,L}^p \\ + \sum_{k' \in S_{j-1,I}} \sum_{k \in S_{j,L}} \langle 2^{-j/2} (2^j (x - A))^p, \phi_{j,k} \rangle \langle \phi_{j,k}, \phi_{j-1,k'} \rangle \phi_{j-1,k'} . \quad (3A.20)$$

On montre de même

$$(x - B)_{j,L}^p = 2^{1/2+p}(x - B)_{j-1,L}^p + \sum_{k' \in S_{j-1,I}} \sum_{k \in S_{j,L}} \langle 2^{-j/2}(2^j(x - B))^p, \phi_{j,k} \rangle \langle \phi_{j,k}, \phi_{j-1,k'} \rangle \phi_{j-1,k'} . \quad (3A.21)$$

Les espaces de détails  $W_j[A, B]$  sont définis comme les compléments orthogonaux de  $V_j[A, B]$  dans  $V_{j-1}[A, B]$  comme dans la construction des ondelettes classiques.

La dimension de ces espaces peut être déterminée :

$$\dim V_j[A, B] = |\{k, 2^{-j}A \leq k \leq 2^{-j}B\}| \quad (3A.22)$$

$$\dim V_j[A, B] \simeq 2^{-j}|B - A| \quad (3A.23)$$

$$\dim W_j[A, B] = \dim V_{j-1}[A, B] - \dim V_j[A, B] \quad (3A.24)$$

$$= |\{k, 2^{-j-1}A \leq k \leq 2^{-j-1}B\}| - |\{k, 2^{-j}A \leq k \leq 2^{-j}B\}| \quad (3A.25)$$

$$\dim W_j[A, B] \simeq 2^{-j}|B - A| . \quad (3A.26)$$

Les ondelettes associées à ses espaces de détails doivent maintenant être définies. Toutes les ondelettes  $\psi_{j,l}$  obtenues uniquement à partir des fonctions d'échelle  $\phi_{j-1,k}$  avec  $k \in S_{j-1,I}$  sont dans l'espace  $W_j[A, B]$ . Ceci est le cas si  $l$  satisfait

$$l \in \{k, 2^{-j}A + N - 1 + 1/2 \leq k \leq 2^{-j}B - N - 1/2\} \quad (3A.27)$$

$$l \in T_{j,I} . \quad (3A.28)$$

Les équations (3A.20) et (3A.21) montrent que  $(x - A)_{j-1,L}^k$  et  $(x - B)_{j-1,R}^k$  sont des combinaisons de fonctions de  $V_j[A, B]$  et de fonctions dans  $\{\phi_{j-1,k}\}_{k \in S_{j-1,I}}$ , il suffit donc de montrer que ces dernières peuvent être engendrées par l'ensemble des ondelettes.

Les ondelettes déjà introduites permettent d'obtenir les  $\phi_{j-1,k}$  pour

$$\{k, 2^{-(j-1)}A + 2 + 2(N - 1) \leq k \leq 2^{-(j-1)}B - 2(2N - 1) - 2 + 1\} \quad (3A.29)$$

mais ne suffisent pas pour les  $\phi_{j-1,k}$  restants

$$2^{-(j-1)}A + 1 \leq k < 2^{-(j-1)}A + 2 + 2(N - 1) \quad (3A.30)$$

et

$$2^{-(j-1)}B - 2(2N - 1) - 1 < k \leq 2^{-(j-1)}B - (2N - 1) - 2 . \quad (3A.31)$$

On suppose dans la suite que ces ensembles sont disjoints.

Pour le bord de gauche, on introduit l'ensemble de fonctions

$$\begin{aligned} \psi_{j,L}^l &= \phi_{j-1, 2^{-(j-1)}A + 2 + 2(N-1) - 2l - 1} - P_{V_j[A, B]} \psi_{j-1, 2^{-(j-1)}A + 2 + 2(N-1) - 2k - 1} \\ &\quad \forall l, 2^{-(j-1)}A + 1 \leq 2^{-(j-1)}A + 2 + 2(N - 1) - 2l - 1 < 2^{-(j-1)}A + 2 + 2(N - 1) \\ &\quad \forall l, 2^{-j}A + 1/2 \leq 2^{-j}A + 1 + (N - 1) - l - 1/2 < 2^{-j}A + 1 + (N - 1) . \end{aligned} \quad (3A.32)$$

Ceci donne  $N - 1 + t_L$  fonctions, où  $t_L$  est donné par la position de  $A$ , qui sont toutes à support dans

$$\begin{aligned} &[A, A + 2^{(j-1)}(2 + 2(N - 1) - 3 + (2N - 1)) + 2^j(2N - 1)] \\ &= [A, A + 2^j(2(2N - 1))] . \end{aligned} \quad (3A.33)$$

De sorte que, dès que  $k > 2^{-j}A + 5N - 3$ , ces fonctions sont orthogonales aux  $\psi_{j,k}$ . La même procédure pour le bord droit donne un ensemble de  $N - 1 + t_R$  fonctions  $\psi^l_{j,R}$  avec des propriétés de support et donc d'orthogonalité similaires. De plus ces fonctions permettent d'engendrer les fonctions voulues.

Finalement, par un argument de dimension, on en déduit que les ensembles

$$\{\psi^L_{j,l}\} \cup \{\psi_{j,k}\}_{k \in T_{j,I}} \cup \{\psi^R_{j,l}\} \quad (3A.34)$$

forment une base de  $W_j[A, B]$  qui est orthogonalisée pour obtenir une base orthogonale

$$\{\bar{\psi}_{j,k}\} . \quad (3A.35)$$

Dans cette base,  $\bar{\psi}_{j,k} = \psi_{j,k}$  si  $k \in T_{j,I}$  ou bien alors  $\mathcal{S}(\bar{\psi}_{j,k}) \subset [A, A + (6N - 3)2^j]$  ou  $\mathcal{S}(\bar{\psi}_{j,k}) \subset [B - (6N - 2)2^j, B]$ . La propriété la plus importante est que la plupart des ondelettes sont celles qui apparaissent dans la multirésolution de  $\mathbb{R}, V_j\mathbb{R}$ .

À ce schéma de multirésolution est associé un algorithme rapide de transformation comme dans le cas des ondelettes discrètes.

## 3A.2 Régularité des ondelettes de bords

La régularité des ondelettes de bords est étudiée car elle est utilisée dans la démonstration d'approximation non linéaire en bandelettes. On montre que les dérivées des fonctions d'échelle sont uniformément bornées dès que les dérivées de la fonction d'échelle de départ le sont.

Pour démontrer cela, on étudie la continuité de l'opérateur qui crée les fonctions d'échelle de bords.

Les fonctions d'échelle de bords  $\varphi^p_{j,L,A}$  sont définies par un procédé d'orthonormalisation de Gramm-Schmidt à partir des projections des polynômes de bords  $(x - A)^k_{j,L}$ . Pour être plus précis, si  $M$  est la matrice définie par

$$M^{p,q} = \langle (x - A)^p_{j,L}, (x - A)^q_{j,L} \rangle_{[A,B]} \quad (p, q) \in [0, N - 1]^2 \quad (3A.36)$$

et  $C$  la décomposition de Cholevski de  $M$  ( $M = CC^t$ ) alors en posant  $G = C^{-1}$

$$\varphi^p_{j,L,A} = \sum_q G^{p,q} (x - A)^q_{j,L} . \quad (3A.37)$$

On rappelle que  $(x - A)^p_{j,L}$  est défini par

$$(x - A)^p_{j,L} = \begin{cases} \sum_{k \in S_{j,L}} \langle (x - A)^p_j, \phi_{j,k} \rangle \phi_{j,k}(x) & \text{si } x \in [A, B] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} . \quad (3A.38)$$

On peut donc écrire

$$\varphi^p_{j,L,A} = \sum_q G^{p,q} \sum_{k \in S_{j,L}} \langle (x - A)^q, \phi_{j,k} \rangle \phi_{j,k}[A,B] . \quad (3A.39)$$

On introduit alors une version non restreinte à  $[A, B]$  de ces fonctions

$$\tilde{\varphi}_{j,L,A}^p = \sum_q G^{p,q} \sum_{k \in S_{j,L}} \langle (x-A)_j^q, \phi_{j,k} \rangle \phi_{j,k} \quad (3A.40)$$

$$= \sum_{k \in S_{j,L}} \sum_q G^{p,q} \langle (x-A)_j^q, \phi_{j,k} \rangle \phi_{j,k} \quad (3A.41)$$

$$\tilde{\varphi}_{j,L,A}^p = \sum_{k \in S_{j,L}} T^{p,\kappa} \phi_{j,k} . \quad (3A.42)$$

On étudie la dépendance de  $T^{p,\kappa}$  en  $j$  et  $A$  pour montrer qu'ils dépendent continûment de  $2^{-j}A \bmod [1]$ . Un argument de compacité donne alors une borne uniforme sur les  $T^{p,k}$  et donc une borne uniforme sur les dérivées des  $\tilde{\varphi}_{j,L,A}^p$ . Comme les fonctions d'échelle de bords sont des restrictions de ces fonctions, on aura le résultat souhaité.

Revenons à  $M^{p,q}$ , on a

$$M^{p,q} = \langle (x-A)_{j,L}^p, (x-A)_{j,L}^q \rangle_{[A,B]} \quad (3A.43)$$

$$= \left\langle \sum_{k \in S_{j,L}} \langle (x-A)_j^p, \phi_{j,k} \rangle \phi_{j,k}, \sum_{l \in S_{j,L}} \langle (x-A)_j^q, \phi_{j,l} \rangle \phi_{j,l} \right\rangle_{[A,B]} \quad (3A.44)$$

$$M^{p,q} = \sum_{k \in S_{j,L}} \sum_{l \in S_{j,L}} \langle (x-A)_j^p, \phi_{j,k} \rangle \langle (x-A)_j^q, \phi_{j,l} \rangle \langle \phi_{j,k}, \phi_{j,l} \rangle_{[A,B]} \quad (3A.45)$$

or

$$\langle (x-A)^p, \phi_{j,k} \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} (y+k-2^{-j}A)^p \phi(y) dy \quad (3A.46)$$

et

$$\langle \phi_{j,k}, \phi_{j,l} \rangle_{[A,B]} = \int_{2^{-j}A-k}^{+\infty} \phi(y+k-l) \phi(y) dy . \quad (3A.47)$$

Ces intégrales sont continues en  $2^{-j}A$  mais ne sont pas périodiques. Cependant du fait de la sommation,

$$M^{p,q}(2^{-j}A) = M^{p,q}(2^{-j}A + 1) . \quad (3A.48)$$

$M^{p,q}$  dépend donc continûment de  $2^{-j}A \bmod [1]$ . Il en est donc de même pour  $M$ , pour sa décomposition de Cholevski  $C$  et pour son inverse  $G$ . Finalement les  $G^{p,q}$  sont continus en  $2^{-j}A \bmod [1]$  comme le sont les  $G^{p,q} \langle (x-A)_j^q, \phi_{j,k} \rangle \phi_{j,k}$  et donc les  $T^{p,k}$ .

On note de plus que

$$\varphi_{j,L,x}^p = \frac{1}{2^{j/2}} \phi_{0,L,2^j x}^p(x/2^j) . \quad (3A.49)$$

On peut alors choisir  $\epsilon > 0$  et pour tout  $x \in [0, 1]$  il existe une distance  $\eta_x$  telle que

$$\forall y, |y-x| \leq \eta_x, \forall (p,k), |T^{p,k}(x) - T^{p,k}(y)| \leq \epsilon . \quad (3A.50)$$

Comme  $[0, 1] = \cup_{x \in [0, 1]} B(x, \eta_x)$  et que  $[0, 1]$  est un compact, on peut extraire une famille finie de  $x_i$  telle que  $[0, 1] = \cup_i B(x_i, \eta_{x_i})$ .

Pour tout  $(j, A)$ , soit  $x_i$  le  $x_l$  le plus proche de  $2^{-j}A \bmod [1]$ ,

$$T^{p,k}(2^{-j}A) = T^{p,k}(x_i) + (T^{p,k}(2^{-j}A) - T^{p,k}(x_i)) \quad (3A.51)$$

avec

$$\forall (p, k), \quad (T^{p,k}(2^{-j}A) - T^{p,k}(x_i)) \leq \epsilon. \quad (3A.52)$$

Ceci donne

$$\tilde{\varphi}_{j,L,A}^p(A) = \sum_{k \in S_{j,L}} T^{p,k}(2^{-j}A) \phi_{j,k} \quad (3A.53)$$

$$= \sum_{k \in S_{j,L}} (T^{p,k}(x_i) + (T^{p,k}(2^{-j}A) - T^{p,k}(x_i))) \phi_{j,k} \quad (3A.54)$$

$$\tilde{\varphi}_{j,L,A}^p(A) = \tilde{\varphi}_{j,L,2^j x_i}^p + \sum_{k \in S_{j,L}} (T^{p,k}(2^{-j}A) - T^{p,k}(x_i)) \phi_{j,k}. \quad (3A.55)$$

Les fonctions d'échelle de bords peuvent donc être vues comme des petites perturbations de dilatations dyadiques d'un nombre fini de fonctions d'échelle.

En passant maintenant aux dérivées, on obtient

$$\frac{\partial^\beta}{\partial u^\beta}(\tilde{\varphi}_{j,L,A}^p)(u) = \frac{\partial^\beta}{\partial u^\beta}(\tilde{\varphi}_{j,L,2^j x_i}^p)(u) + \sum_{k \in S_{j,L}} (T^{p,k}(2^{-j}A) - T^{p,k}(x_i)) \frac{\partial^\beta}{\partial u^\beta}(\phi_{j,k})(u) \quad (3A.56)$$

d'où

$$\left| \frac{\partial^\beta}{\partial u^\beta}(\tilde{\varphi}_{j,L,A}^p)(u) \right| \leq \frac{\partial^\beta}{\partial u^\beta}(\tilde{\varphi}_{j,L,2^j x_i}^p)(u) + (2N + 2)\epsilon \frac{\partial^\beta}{\partial u^\beta}(\phi_{j,k})(u) \quad (3A.57)$$

$$\leq \max_i \left( \left\| \frac{\partial^\beta}{\partial u^\beta}(\tilde{\varphi}_{j,L,2^j x_i}^p)(u) \right\|_\infty \right) + (2N + 2)\epsilon \left\| \frac{\partial^\beta}{\partial u^\beta}(\phi_{j,k})(u) \right\|_\infty \quad (3A.58)$$

$$\leq 2^{-\beta j} 2^{-j/2} \max_i \left( \left\| \frac{\partial^\beta}{\partial u^\beta}(\tilde{\varphi}_{0,L,x_i}^p) \right\|_\infty \right) + (2N + 2)\epsilon 2^{-\beta j} 2^{-j/2} \left\| \frac{\partial^\beta}{\partial u^\beta}(\phi_{0,k})(u) \right\|_\infty \quad (3A.59)$$

$$\left| \frac{\partial^\beta}{\partial u^\beta}(\tilde{\varphi}_{j,L,A}^p)(u) \right| \leq 2^{-\beta j} 2^{-j/2} \left( \max_i \left\| \frac{\partial^\beta}{\partial u^\beta}(\tilde{\varphi}_{0,L,x_i}^p) \right\|_\infty \right) + (2N + 2)\epsilon \left\| \frac{\partial^\beta}{\partial u^\beta}(\phi_{0,k})(u) \right\|_\infty \quad (3A.60)$$

$$\left| \frac{\partial^\beta}{\partial u^\beta}(\tilde{\varphi}_{j,L,A}^p)(u) \right| \leq K 2^{-\beta j} 2^{-j/2}. \quad (3A.61)$$

Ceci donne la borne uniforme sur toutes les dérivées des fonctions d'échelle.

La borne uniforme sur les dérivées des ondelettes est obtenue à l'aide du support fini des filtres reliant les fonctions d'échelle à l'échelle  $2^{j-1}$  et les ondelettes à l'échelle  $2^j$ .

$$\psi_{j,i}^L = \sum g[n, l, i] \varphi_{n,i-1}. \quad (3A.62)$$

On utilise alors l'orthonormalité des fonctions d'échelle qui impose que chaque coefficient  $g[n, l, i]$  soit borné par 1

$$\|(\psi_{j,i}^L)^{(\beta)}\|_\infty = \left\| \sum g[n, l, i] \varphi_{n,i-1}^{(\beta)} \right\|_\infty \quad (3A.63)$$

$$\leq \sum |g[n, l, i]| \|\varphi_{n,i-1}^{(\beta)}\|_\infty \quad (3A.64)$$

d'où

$$\leq (4N + 4)2^{-\beta(j-1)}2^{-(j-1)/2} \max(K, \|\frac{\partial^\beta}{\partial u^\beta}(\phi_{0,k})(u)\|_\infty) \quad (3A.65)$$

$$\|(\psi_{j,i}^L)^{(\beta)}\|_\infty \leq K 2^{-\beta j} 2^{-j/2} \quad (3A.66)$$

et on obtient bien la borne souhaitée.

### 3A.3 Transformée en ondelettes discrètes sur l'intervalle

Il existe une transformée en ondelettes discrètes naturellement associée à la transformée en ondelettes précédente. Pour toute échelle  $2^j$  et tout réel  $A$ , l'espace  $V_j[A, A + l 2^j]$  est un espace de dimension  $l$ . Il existe donc une bijection de  $\mathbb{R}^l$  dans l'espace  $V_j[A, A + l 2^j]$  via la décomposition dans la base orthonormée  $\phi_{j,k}$ . La transformée continue sur l'intervalle définie précédemment induit une transformation discrète sur des suites de taille  $l$  pour chaque choix de  $j$  et de  $A$ . On étudie ensuite l'effet de ces choix.

Cette liberté de choix est un avantage dès que l'on extrait des suites les unes des autres. Supposons que nous ayons une suite de taille  $l$  et qu'on en extrait une suite de taille  $l' < l$  commençant en  $k$ . Pour tout choix d'une échelle  $2^j$  et d'un réel  $A$ , l'espace  $V_j[A, A + l 2^j]$  est de dimension  $l$  et l'espace  $V_j[A + k 2^j, A + (k + l')2^j]$  de dimension  $l'$ . Par construction, les fonctions d'échelle intérieures de l'espace  $V_j[A + k 2^j, A + (k + l')2^j]$  sont également des fonctions d'échelle intérieures de l'espace  $V_j[A, A + l 2^j]$ . De même, les ondelettes intérieures de l'espace  $W_{j+1}[A + k 2^j, A + (k + l')2^j]$  sont également des ondelettes intérieures de l'espace  $W_j[A, A + l 2^j]$ .

On pourrait espérer que pour une suite donnée  $c = (c_1, \dots, c_k, \dots, c_{k+l'-1}, \dots, c_l)$ , l'image  $f_c$  de  $c$  dans  $V_j[A, A + l 2^j]$  et l'image  $\tilde{f}_c$  de  $(c_k, \dots, c_{k+l'-1})$  dans  $V_j[A + k 2^j, A + (k + l')2^j]$  soient reliées par

$$f_c(x) = \tilde{f}_c(x) \quad \forall x \in [A + k 2^j, A + (k + l')2^j]. \quad (3A.67)$$

Ceci n'est malheureusement pas le cas puisque les fonctions d'échelle de bord sont différentes mais ceci est vrai sur un intervalle plus restreint

$$f_c(x) = \tilde{f}_c(x) \quad \forall x \in [A + k 2^j + 6N2^j, A + (k + l')2^j - 6N2^j]. \quad (3A.68)$$

Il en résulte que dès que nous serons suffisamment éloignés des bords, les coefficients d'ondelettes intérieures seront identiques dans les deux schémas. Cette propriété, que l'on peut qualifier de propriété d'alignement de phase, est très importante puisqu'elle signifie que la plupart des coefficients d'ondelettes de la séquence extraite sont eux-mêmes extraits des coefficients d'ondelettes de la séquence totale.

Le paramètre  $A$  peut être choisi arbitrairement, par exemple  $A = 0$ . Aucun choix n'est plus naturel qu'un autre pour l'échelle  $2^j$  sauf si la suite est elle-même une suite de coefficients d'échelle à une certaine échelle.



## 3A.4 Ondelettes de bord et schéma discret

Soit  $2^j$  une échelle et soit  $f$  une fonction appartenant à  $\text{Vect} \{ \{ \phi_{j,k_1} \}_{m \leq k_1 \leq M} \}$ ,  $f$  se décompose dans cette base en

$$f = \sum_{m \leq k_1 \leq M} c[k_1] \phi_{j,k_1}. \quad (3A.69)$$

On introduit alors l'application  $F$  qui envoie cette fonction dans  $V_j[m2^j, M2^j]$  par

$$\phi_{j,k_1} \mapsto \varphi_{j,k_1}, \quad \forall j, \forall k_1. \quad (3A.70)$$

Elle transforme une base orthonormée en une base orthonormée et ne modifie  $f$  qu'à une distance plus petite que  $3N2^j$  des bords.

La transformée en ondelette de  $V_j[m2^j, M2^j]$  donne une base d'ondelettes  $\{ \bar{\psi}_{j_1,k_1} \}$ . L'image de cette base par  $F^{-1}$  est une base orthonormée d'ondelettes  $\tilde{\psi}_{j_1,k_1}$  de l'espace vectoriel  $\text{Vect} \{ \{ \phi_{j,k_1} \}_{m \leq k_1 \leq M} \}$  et c'est la base qui apparaît dans le procédé de bandelettisation.

D'après les propriétés de  $F$ , les ondelettes  $\tilde{\psi}_{j_1,k_1}$  à une distance supérieure à  $3N2^j$  des bords sont simplement les  $\bar{\psi}_{j_1,k_1}$ . De plus le support des ondelettes  $\tilde{\psi}_{j_1,k_1}$  plus proche des bords est différent du support de  $\bar{\psi}_{j_1,k_1}$  d'une longueur d'au plus  $6N2^j$ . Le support de ces ondelettes  $\tilde{\psi}_{j_1,k_1}$  étant de longueur au plus  $6N2^{j_1}$ , les ondelettes  $\tilde{\psi}_{j_1,k_1}$  ont un support d'au plus  $12N2^{j_1}$ .

Les  $\tilde{\psi}_{j_1,k_1}$  sont donc exactement les ondelettes de départ  $\psi_{j_1,k_1}$  dès que  $\bar{\psi}_{j_1,k_1}$  est à une distance plus grande que  $3N2^j$  du bords. A l'exception de l'échelle  $2^{j+1}$ , c'est le cas pour toutes les ondelettes  $\bar{\psi}_{j_1,k_1}$  intérieures. À l'échelle  $2^{j+1}$ , c'est également le cas pour toutes les ondelettes intérieures sauf les  $4N + 1$  premières et dernières. Les ondelettes intérieures sont donc presque toutes identiques aux ondelettes de départ.

De plus, on peut contrôler la norme  $L^1$  des ondelettes  $\tilde{\psi}_{j_1,k_1}$  restante : ces fonctions sont de norme 1 et ont un support de taille au plus  $12N2^{j_1}$ , on a donc

$$\| \tilde{\psi}_{j_1,k_1} \|_1 \leq \int_x |\tilde{\psi}_{j_1,k_1}| dx \quad (3A.71)$$

$$\leq \int_x 1_{x \in \mathcal{S}(\tilde{\psi}_{j_1,k_1})} |\tilde{\psi}_{j_1,k_1}| dx \quad (3A.72)$$

$$\leq \left( \int_x 1_{x \in \mathcal{S}(\tilde{\psi}_{j_1,k_1})}^2 dx \right)^{1/2} \left( \int_x |\tilde{\psi}_{j_1,k_1}|^2 dx \right)^{1/2} \quad (3A.73)$$

$$\leq (12N2^{j_1})^{1/2} (1)^{1/2} \quad (3A.74)$$

$$\| \tilde{\psi}_{j_1,k_1} \|_1 \leq \sqrt{12N} 2^{j_1/2}. \quad (3A.75)$$

Ceci permet d'obtenir une décroissance minimale pour les coefficients d'ondelettes correspondant à ces ondelettes.

## 3A.5 Régularité des ondelettes de bords modifiées

Les fonctions d'échelle sont modifiées par cette transformation  $F^{-1}$ . On va donc regarder la régularité de  $F^{-1}\varphi_{j_1,L}^p$  pour obtenir la régularité des ondelettes de bords.

$$\varphi_{j_1,L}^p = \sum_q \langle \varphi_{j_1,L}^p, \varphi_{j,L}^q \rangle \varphi_{j,L}^q + \sum_{k \in S_{j,I}} \langle \varphi_{j_1,L}^p, \phi_{j,k} \rangle \phi_{j,k} \quad (3A.76)$$

donc

$$F^{-1}\varphi_{j,L}^p = \sum_q \langle \varphi_{j_1,L}^p, \varphi_{j,L}^q \rangle \phi_{j,k(q)} + \sum_{k \in S_{j_0,I}} \langle \varphi_{j_1,L}^p, \phi_{j,k} \rangle \phi_{j,k} \quad (3A.77)$$

et

$$F^{-1}\varphi_{j,L}^p - \varphi_{j,L}^p = \sum_q \langle \varphi_{j_1,L}^p, \varphi_{j,L}^q \rangle (\phi_{j,k(q)} - \varphi_{j,L}^q). \quad (3A.78)$$

On regarde maintenant le produit scalaire  $\langle \varphi_{j_1,L}^p, \varphi_{j,L}^q \rangle$ , on a

$$\langle \varphi_{j_1,L}^p, \varphi_{j,L}^q \rangle = \left\langle \sum_k T^{p,k}(2^{-j_1}A)\phi_{j_1,k[A,B]}, l \right\rangle \sum_l T^{q,l}(2^{-j}A)\phi_{j,l[A,B]} \quad (3A.79)$$

$$= \sum_k \sum_l T^{p,k}(2^{-j_1}A)T^{q,l}(2^{-j}A) \langle \phi_{j_1,k[A,B]}, \phi_{j,l[A,B]} \rangle \quad (3A.80)$$

$$\langle \varphi_{j_1,L}^p, \varphi_{j,L}^q \rangle = \sum_k \sum_l T^{p,k}(2^{-j_1}A)T^{q,l}(2^{-j}A) \langle \phi_{j_1,k}, \phi_{j,l} \rangle_{[A,B]} \quad (3A.81)$$

donc

$$|\langle \varphi_{j_1,L}^p, \varphi_{j,L}^q \rangle| \leq (2N+2)^2 \sup(|T^{p,k}(x)|) \sup(|\langle \phi_{j_1,k}, \phi_{j,l} \rangle_{[A,B]}|) \quad (3A.82)$$

$$|\langle \varphi_{j_1,L}^p, \varphi_{j,L}^q \rangle| \leq K2^{(j-j_1)/2} \quad (3A.83)$$

puisque les  $T^{p,k}$  sont bornés et

$$|\langle \phi_{j_1,k}, \phi_{j,l} \rangle_{[A,B]}| = \left| \int_A^B \phi_{j_1,k} \phi_{j,l} \right| \quad (3A.84)$$

$$\leq \int |\phi_{j_1,k}| |\phi_{j,l}| \quad (3A.85)$$

$$|\langle \phi_{j_1,k}, \phi_{j,l} \rangle_{[A,B]}| \leq K2^{(j-j_1)/2}. \quad (3A.86)$$

Ceci donne finalement

$$\forall x \in (A, B), \quad \left| \frac{\partial^\beta}{\partial x^\beta} (F^{-1} \varphi_{j_1, L}^p - \varphi_{j_1, L}^p)(x) \right| = \left| \sum_q \langle \varphi_{j_1, L}^p, \varphi_{j, L}^q \rangle \frac{\partial^\beta}{\partial x^\beta} (\phi_{j, k(\beta)} - \varphi_{j, L}^q)(x) \right| \quad (3A.87)$$

$$\leq \sum_q |\langle \varphi_{j_1, L}^p, \varphi_{j, L}^q \rangle| \left| \frac{\partial^\beta}{\partial x^\beta} (\phi_{j, k(q)} - \varphi_{j, L}^q)(x) \right| \quad (3A.88)$$

$$\leq (N+1) K 2^{(j-j_1)/2} 2^{-\beta j} 2^{-j/2} \quad (3A.89)$$

$$|(F^{-1} \varphi_{j_1, L}^p - \varphi_{j_1, L}^p)(x)| \leq K 2^{-j_1/2} 2^{-\beta j} \quad (3A.90)$$

on en déduit

$$\forall x \in (A, B), \quad \left| \frac{\partial^\beta}{\partial x^\beta} (F^{-1} \varphi_{j_1, L}^p)(x) \right| = \left| \frac{\partial^\beta}{\partial x^\beta} (F^{-1} \varphi_{j_1, L}^p - \varphi_{j_1, L}^p)(x) \right| + \left| \frac{\partial^\beta}{\partial x^\beta} (\varphi_{j_1, L}^p)(x) \right| \quad (3A.91)$$

$$\leq \left| \frac{\partial^\beta}{\partial x^\beta} (F^{-1} \varphi_{j_1, L}^p - \varphi_{j_1, L}^p)(x) \right| + \left| \frac{\partial^\beta}{\partial x^\beta} (\varphi_{j_1, L}^p)(x) \right| \quad (3A.92)$$

$$\leq K 2^{-j_1/2} 2^{-\beta j} + K 2^{-j_1/2} 2^{-\beta j_1} \quad (3A.93)$$

$$\left| \frac{\partial^\beta}{\partial x^\beta} (F^{-1} \varphi_{j, L}^p)(x) \right| \leq K 2^{-j_1/2} 2^{-\beta j} . \quad (3A.94)$$

Par construction, il existe  $\epsilon$  tel qu'aucune fonction d'échelle intérieure ne rencontre  $(-\infty, A + \epsilon)$ , ceci implique que

$$\forall x \in (-\infty, A + \epsilon), \quad \left| \frac{\partial^\beta}{\partial x^\beta} (F^{-1} \varphi_{j_1, L}^p)(x) \right| = \left| \sum_q \langle \varphi_{j_1, L}^p, \varphi_{j, L}^q \rangle \frac{\partial^\beta}{\partial x^\beta} (\phi_{j, k(q)})(x) \right| \quad (3A.95)$$

$$\leq \sum_\beta |\langle \varphi_{j_1, L}^p, \varphi_{j, L}^q \rangle| \left| \frac{\partial^\beta}{\partial x^\beta} (\phi_{j, k(q)})(x) \right| \quad (3A.96)$$

$$\leq (N+1) K 2^{(j-j_1)/2} 2^{-\beta j} 2^{-j/2} \quad (3A.97)$$

$$\left| \frac{\partial^\beta}{\partial x^\beta} (F^{-1} \varphi_{j_1, L}^p)(x) \right| \leq K 2^{-j_1/2} 2^{-\beta j} . \quad (3A.98)$$

Finalement, on obtient

$$\left\| \frac{\partial^\beta}{\partial x^\beta} (F^{-1} \varphi_{j, L}^p)(x) \right\|_\infty \leq K 2^{-j/2} 2^{-\beta j_0} \quad (3A.99)$$

qui permet le contrôle de la régularité des ondelettes de bords modifiées.



---

## Annexe 3B

# Estimation de la direction de régularité

---

3B.1 Norme du gradient lissé au voisinage de la singularité . . . . .	102
3B.2 Direction du gradient . . . . .	105

Dans cette annexe, on suppose que  $f$  est telle que, en dehors d'une courbe  $\mathcal{C}$  dont les dérivés secondes de la paramétrisation normales sont bornées, les dérivés partielles d'ordre  $\alpha$  sont bornées. Les noyaux de lissage  $g_\eta$  et  $h_s$  sont définis à partir de deux noyaux de lissages  $g$  et  $h$  à support dans  $[-1, 1]^2$  et strictement positif sur  $[-1/2, 1/2]^2$  tels que

$$\|g\|_1 = 1 \qquad \|h\|_1 = 1 \qquad (3B.1)$$

$$g_\eta(x) = \frac{1}{\eta^2} g\left(\frac{x}{\eta}\right) \qquad h_s(x) = \frac{1}{s^2} h\left(\frac{x}{s}\right). \qquad (3B.2)$$

On note  $K$  les constantes apparaissant dans les différentes estimations. Par souci de simplicité, on se permet de faire varier la constante  $K$  d'une ligne à l'autre tant que cette variation n'est pas essentielle.

## 3B.1 Norme du gradient lissé au voisinage de la singularité

On note  $\|\nabla f\|_\infty^r$  la norme maximum du gradient de  $f$  en dehors des contours où elle est singulière. On peut alors démontrer le lemme suivant

**Lemme 3B.1.** *Il existe une échelle de lissage  $s_0$ , une constante  $K$  et une constante  $K'$  telles que si  $(s + \eta) \leq s_0$  et si le saut le long de la courbe  $\mathcal{C}$  est plus grand que  $\lambda$  alors*

- dès que la distance d'un point  $x$  à la courbe est supérieure à  $K(s + \eta)$ ,

$$|\nabla(g_\eta \star f_s)(x)| \leq \|\nabla f\|_\infty^r, \qquad (3B.3)$$

- le long de toutes lignes traversant la discontinuité on trouve un maximum de  $(g_\eta \star f_s)$  et ce maximum en  $x'$  satisfait

$$|\nabla(g_\eta \star f_s)(x')| \geq K' \frac{1}{\eta + s} \lambda g_{min} \tan(\pi/6). \qquad (3B.4)$$

*Démonstration.* On utilise la commutativité de la convolution

$$g_\eta \star f_s = g_\eta \star (h_s \star f) \qquad (3B.5)$$

$$g_\eta \star f_s = (h_s \star g_\eta) \star f \qquad (3B.6)$$

et on étudie  $g_\eta \star f_s$  comme une légère modification de  $h_s \star f$  si  $\eta \leq s$  et comme une légère modification de  $g_\eta \star f$  si  $s \leq \eta$ .

Dans les deux cas, dès que le point  $x$  est à une distance supérieure à  $s + \eta$  d'une singularité de  $f$ , la fonction  $g_\eta \star f_s$  est régulière et  $|\nabla(g_\eta \star f_s)(x)| \leq \|\nabla f\|_\infty^r$ .

Les hypothèses sur  $g$  et  $h$  sont symétriques, on se place donc par exemple dans le cas  $s \leq \eta$ . Suivant la direction de la tangente à la courbe au point  $(x_1, x_2)$ , on montre que le long de la direction horizontale ou verticale la norme du gradient reste plus grande que  $4\|\nabla f\|_\infty^r$  au moins dans un voisinage de  $(x_1, x_2)$  de largeur  $1/4\eta$ .

Si la tangente à la courbe fait un angle inférieur à  $\pi/3$  avec la direction horizontale, par régularité, l'angle reste inférieure à  $5\pi/12$  sur un voisinage. On prouve alors que le long de la direction verticale, il existe une zone telle que  $\|\nabla(g_\eta \star f)\| \geq 4\|\nabla f\|_\infty^r$ .

Par hypothèse,  $f$  fait un saut de hauteur supérieure à  $\lambda$  le long de la courbe. Le long de la direction verticale, on peut donc écrire  $f(x) = f(x_1, x_2)$  comme la somme d'un Heaviside et d'une partie régulière.

$$f(x_1, x_2) = \lambda(x_1, c(x_1))H(x_2 - c(x_1)) + r(x_1, x_2) . \quad (3B.7)$$

Ceci implique

$$g_\eta \star f(x) = \int \frac{1}{\eta^2} g\left(\frac{u}{\eta}\right) f(x - u) du \quad (3B.8)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\eta^2} g\left(\frac{u_1}{\eta}, \frac{u_2}{\eta}\right) f(x_1 - u_1, x_2 - u_2) du_1 du_2 \quad (3B.9)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\eta^2} g\left(\frac{u_1}{\eta}, \frac{u_2}{\eta}\right) \times (\lambda(x_1 - u_1, c(x_1 - u_1))H(x_2 - u_2 - c(x_1 - u_1)) + r(x_1 - u_1, x_2 - u_2)) du_1 du_2 \quad (3B.10)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\eta^2} g\left(\frac{u_1}{\eta}, \frac{u_2}{\eta}\right) \lambda(x_1 - u_1, c(x_1 - u_1)) \times H(x_2 - u_2 - c(x_1 - u_1)) du_1 du_2 \quad (3B.11)$$

$$+ \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\eta^2} g\left(\frac{u_1}{\eta}, \frac{u_2}{\eta}\right) r(x_1 - u_1, x_2 - u_2) du_1 du_2$$

$$g_\eta \star f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{x_2 - c(x_1 - u_1)} \frac{1}{\eta^2} g\left(\frac{u_1}{\eta}, \frac{u_2}{\eta}\right) \lambda(x_1 - u_1, c(x_1 - u_1)) du_2 du_1 + \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\eta^2} g\left(\frac{u_1}{\eta}, \frac{u_2}{\eta}\right) r(x_1 - u_1, x_2 - u_2) du_1 du_2 . \quad (3B.12)$$

Si on dérive maintenant selon  $x_2$ , on obtient

$$\frac{\partial}{\partial x_2} (g_\eta \star f)(x) = \frac{\partial}{\partial x_2} \int \frac{1}{\eta^2} g\left(\frac{u}{\eta}\right) f(x - u) du \quad (3B.13)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{x_2 - c(x_1 - u_1)} \frac{1}{\eta^2} g\left(\frac{u_1}{\eta}, \frac{u_2}{\eta}\right) \lambda(x_1 - u_1, c(x_1 - u_1)) du_2 du_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\eta^2} g\left(\frac{u_1}{\eta}, \frac{u_2}{\eta}\right) r(x_1 - u_1, x_2 - u_2) du_1 du_2 \quad (3B.14)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial x_2} \int_{-\infty}^{x_2 - c(x_1 - u_1)} \frac{1}{\eta^2} g\left(\frac{u_1}{\eta}, \frac{u_2}{\eta}\right) \lambda(x_1 - u_1, c(x_1 - u_1)) du_2 du_1 + \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\eta^2} g\left(\frac{u_1}{\eta}, \frac{u_2}{\eta}\right) \frac{\partial}{\partial x_2} r(x_1 - u_1, x_2 - u_2) du_1 du_2 \quad (3B.15)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_2}(g_\eta \star f)(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\eta^2} g\left(\frac{u_1}{\eta}, \frac{x_2 - c(x_1 - u_1)}{\eta}\right) \lambda(x_1 - u_1, c(x_1 - u_1)) du_1 \\ &\quad + \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\eta^2} g\left(\frac{u_1}{\eta}, \frac{u_2}{\eta}\right) \frac{\partial}{\partial x_2} r(x_1 - u_1, x_2 - u_2) du_1 du_2 . \end{aligned} \quad (3B.16)$$

Le second terme est borné par  $\|\nabla f\|_\infty^r$ , on va maintenant étudier le terme restant, noté  $T(x, \eta)$ ,

$$T(x, \eta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\eta^2} g\left(\frac{u_1}{\eta}, \frac{x_2 - c(x_1 - u_1)}{\eta}\right) \lambda(x_1 - u_1, c(x_1 - u_1)) du_1 \quad (3B.17)$$

avec un changement de variable, on obtient

$$T(x, \eta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\eta} g(u_1, \frac{x_2 - c(x_1 - \eta u_1)}{\eta}) \lambda(x_1 - \eta u_1, c(x_1 - \eta u_1)) du_1 . \quad (3B.18)$$

On pose alors  $\delta = x_2 - c(x_1)$

$$T(x, \eta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\eta} g(u_1, \frac{\delta + c(x_1) - c(x_1 - \eta u_1)}{\eta}) \lambda(x_1 - \eta u_1, c(x_1 - \eta u_1)) du_1 \quad (3B.19)$$

$$T(x, \eta) = \int_{-1}^1 \frac{1}{\eta} g(u_1, \frac{\delta + c(x_1) - c(x_1 - \eta u_1)}{\eta}) \lambda(x_1 - \eta u_1, c(x_1 - \eta u_1)) du_1 . \quad (3B.20)$$

Pour montrer que cette intégrale est grande, on utilise une minoration grossière de  $g$

$$g(x) \geq g(x) \mathbf{1}_{x \in [-1/2, 1/2]^2} \quad (3B.21)$$

$$\geq \min_{x \in [-1/2, 1/2]^2} (g(x) \mathbf{1}_{x \in [-1/2, 1/2]^2}) \quad (3B.22)$$

$$g(x) \geq g_{\min} \mathbf{1}_{x \in [-1/2, 1/2]^2} \quad (3B.23)$$

et le fait que  $\lambda$  satisfait  $|\lambda(x_1 - \eta u_1, c(x_1 - \eta u_1))| \geq \lambda$  sans changer de signe.

Si  $\lambda(x_1 - \eta u_1)$  reste positif, on obtient

$$T(x, \eta) = \int_{-1}^1 \frac{1}{\eta} g(u_1, \frac{\delta + c(x_1) - c(x_1 - \eta u_1)}{\eta}) \lambda(x_1 - \eta u_1, c(x_1 - \eta u_1)) du_1 \quad (3B.24)$$

$$\geq \int_{-1/2}^{1/2} \frac{1}{\eta} \lambda g_{\min} \mathbf{1}_{(\delta + c(x_1) - c(x_1 - \eta u_1)) \in [-\eta/2, \eta/2]} du_1 \quad (3B.25)$$

$$T(x, \eta) \geq \frac{1}{\eta} \lambda g_{\min} \int_{-1/2}^{1/2} \mathbf{1}_{(\delta + c(x_1) - c(x_1 - \eta u_1)) \in [-\eta/2, \eta/2]} du_1 . \quad (3B.26)$$

Cette dernière intégrale est minorée par un argument géométrique. A un changement d'échelle près, cette intégrale mesure la longueur horizontale du segment tel que  $(\delta + c(x_1) - c(x_1 - \eta u_1))$  reste dans  $[-\eta/2, \eta/2]$ . Cette longueur est liée à la pente de la courbe. Si l'angle de la tangente avec l'horizontale reste inférieur à  $5\pi/6$  et si  $\delta$  est petit ( $|\delta| \leq 1/2\eta$ ),

$$\begin{aligned} \int_{-1/2}^{1/2} \mathbf{1}_{(\delta + c(x_1) - c(x_1 - \eta u_1)) \in [-\eta/2, \eta/2]} du_1 &\geq \min(\tan(\pi/6) \times 1/2, 1/2 + \delta) \\ &\quad + \min(\tan(\pi/6) \times 1/2, 1/2 - \delta) \end{aligned} \quad (3B.27)$$

$$\int_{-1/2}^{1/2} \mathbf{1}_{(\delta + c(x_1) - c(x_1 - \eta u_1)) \in [-\eta/2, \eta/2]} du_1 \geq \tan(\pi/6)/2 . \quad (3B.28)$$



Finalement,

$$T(x, \eta) \geq \frac{1}{\eta} \lambda g_{\min} \tan(\pi/6)/2 \quad (3B.29)$$

et donc

$$|\nabla(g_\eta \star f)(x)| \geq \frac{1}{\eta} \lambda g_{\min} \tan(\pi/6)/2 - \|\nabla f\|_\infty^r. \quad (3B.30)$$

Il en résulte qu'il existe bien un  $\eta$  tel que ceci soit plus grand que  $K\|\nabla f\|_\infty^r$  dès que  $|\delta| \leq \eta/2$ .

Il reste à montrer que le dernier lissage par  $h_s$  avec  $s \leq \eta$  ne modifie rien. Comme le noyau de lissage est étroit, on peut assurer que

$$|\nabla(h_s \star (g_\eta \star f))(x)| \geq K' \left( \frac{1}{\eta + s} \lambda g_{\min} \tan(\pi/6)/2 - \|\nabla f\|_\infty^r \right) \quad (3B.31)$$

avec  $K' < 1$  tant que l'on reste dans le même voisinage. Si  $\eta$  est suffisamment petit,

$$\frac{1}{\eta + s} \lambda g_{\min} \tan(\pi/6)/2 \geq 2\|\nabla f\|_\infty^r \quad (3B.32)$$

et

$$|\nabla(h_s \star (g_\eta \star f))(x)| \geq \frac{K'}{2} \frac{1}{\eta + s} \lambda g_{\min} \tan(\pi/6)/2 \quad (3B.33)$$

que l'on peut réécrire en modifiant la constante  $K'$

$$|\nabla(h_s \star (g_\eta \star f))(x)| \geq K' \frac{1}{\eta + s} \lambda g_{\min} \tan(\pi/6). \quad (3B.34)$$

On obtient donc le résultat souhaité.  $\square$

## 3B.2 Direction du gradient

On va maintenant regarder la direction du gradient en ces points de forts gradients et montrer que la direction du gradient est proche de la direction normale à la courbe au voisinage.

**Lemme 3B.2.** *Pour tout  $x'$  tel que  $d(x, x') \leq (\eta + s)$ , on a la relation suivante entre la normale  $\mathbf{n}_C(x')$  à la courbe  $C$  en  $x'$  et le gradient de la fonction lissée  $g_\eta \star f_s$  en  $x$  :*

$$|\tan(\text{angle}(\nabla(g_\eta \star f_s)(x), \mathbf{n}_C(x')))| \leq K(\eta + s) + \frac{6\sqrt{2}\|\nabla f\|_\infty^r}{|\nabla(g_\eta \star f_s)(x)|} \quad (3B.35)$$

dès que  $|\nabla(g_\eta \star f_s)(x)| \geq 3M$  et  $K(\eta + s) \leq 1$ .

*Démonstration.* On commence par montrer ceci lorsque la paramétrisation horizontale ou verticale de la courbe est strictement monotone. Ceci assure qu'il n'y a localement qu'un point de la courbe par ligne horizontale et qu'un point de la courbe par ligne verticale dans un voisinage de taille  $\eta + s$ . C'est le cas si la tangente de  $\mathcal{C}$  n'est ni horizontale ni verticale et dans ces cas la courbe peut être paramétrée par  $x_2 = c(x_1)$  ou par  $x_1 = c^{-1}(x_2)$  sur les bons intervalles.

Si l'on note  $k = g_\eta \star h_s$  qui est un noyau d'intégrale 1 et de support de diamètre majoré par  $\eta + s$ , on a

$$g_\eta \star f_s = g_\eta \star h_s \star f \quad (3B.36)$$

$$g_\eta \star f_s = k \star f . \quad (3B.37)$$

Comme dans le lemme précédent, on décompose  $f$  en un Heavyside et une partie régulière :

$$f(x_1, x_2) = \lambda(x_1, c(x_1))H(x_2 - c(x_1)) + r(x_1, x_2) \quad (3B.38)$$

$$f(x_1, x_2) = \pm \lambda(c^{-1}(x_2), x_2)H(x_1 - c^{-1}(x_2)) + \tilde{r}(x_1, x_2) \quad (3B.39)$$

où le signe de la seconde expression est fixe : c'est le signe de  $c'(x_1)$ .

En utilisant la première expression, on obtient comme dans le lemme précédent

$$k \star f(x) = \int k(u)f(x-u) du \quad (3B.40)$$

$$\begin{aligned} k \star f(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{x_2 - c(x_1 - u_1)} h(u_1, u_2) \lambda(x_1 - u_1, c(x_1 - u_1)) du_2 du_1 \\ &\quad + \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} k(u_1, u_2) r(x_1 - u_1, x_2 - u_2) du_1 du_2 \end{aligned} \quad (3B.41)$$

et en dérivant par rapport à  $x_2$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_2}(k \star f)(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} k(u_1, x_2 - c(x_1 - u_1)) \lambda(x_1 - u_1, c(x_1 - u_1)) du_1 \\ &\quad + \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} k(u_1, u_2) \frac{\partial}{\partial x_2} r(x_1 - u_1, x_2 - u_2) du_1 du_2 . \end{aligned} \quad (3B.42)$$

Si l'on fait la même chose dans l'autre direction, on obtient

$$k \star f(x) = \int k(u)f(x-u) du \quad (3B.43)$$

$$\begin{aligned} k \star f(x) &= \pm \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{x_1 - c^{-1}(x_2 - u_2)} h(u_1, u_2) \lambda(c^{-1}(x_2 - u_2), x_2 - u_2) du_1 du_2 \\ &\quad + \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} k(u_1, u_2) \tilde{r}(x_1 - u_1, x_2 - u_2) du_1 du_2 \end{aligned} \quad (3B.44)$$

et en dérivant selon  $x_1$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_1}(k \star f)(x) &= \pm \int_{-\infty}^{+\infty} k(x_1 - c^{-1}(x_2 - u_2), u_2) \lambda(c^{-1}(x_2 - u_2), x_2 - u_2) du_2 \\ &\quad + \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} k(u_1, u_2) \frac{\partial}{\partial x_1} \tilde{r}(x_1 - u_1, x_2 - u_2) du_1 du_2 . \end{aligned} \quad (3B.45)$$

Les premières intégrales dans les deux directions sont très similaires. Soit  $T_1$  la première intégrale correspondant à une dérivée selon  $x_1$  et  $T_2$  l'autre

$$T_1 = \pm \int_{-\infty}^{+\infty} k(x_1 - c^{-1}(x_2 - u_2), u_2) \lambda(c^{-1}(x_2 - u_2), x_2 - u_2) du_2 . \quad (3B.46)$$

et

$$T_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} k(u_1, x_2 - c(x_1 - u_1)) \lambda(x_1 - u_1, c(x_1 - u_1)) du_1 \quad (3B.47)$$

On utilise alors le changement de variable  $u_1$  par  $u_2 = x_2 - c(x_1 - u_1)$  qui donne  $du_2 = c'(x_1 - u_1) du_1$

$$T_1 = - \int_{-\infty}^{+\infty} k(u_1, x_2 - c(x_1 - u_1)) \lambda(x_1 - u_1, c(x_1 - u_1)) c'(x_1 - u_1) du_1 . \quad (3B.48)$$

On choisit alors  $x'_1$  à une distance inférieure à  $\eta + s$  de  $x_1$

$$T_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} k(u_1, x_2 - c(x_1 - u_1)) \lambda(x_1 - u_1, c(x_1 - u_1)) c'(x'_1) + (c'(x_1 - u_1) - c'(x'_1)) du_1 \quad (3B.49)$$

$$\begin{aligned} T_1 &= -c'(x'_1) T_2 \\ &\quad + \int_{-\infty}^{+\infty} k(u_1, x_2 - c(x_1 - u_1)) \lambda(x_1 - u_1, c(x_1 - u_1)) (c'(x_1 - u_1) - c'(x'_1)) du_1 . \end{aligned} \quad (3B.50)$$

En utilisant la régularité de  $\mathcal{C}$ , on obtient pour le dernier terme  $T'_1$

$$T'_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} k(u_1, x_2 - c(x_1 - u_1)) \lambda(x_1 - u_1, c(x_1 - u_1)) (c'(x_1 - u_1) - c'(x'_1)) du_1 \quad (3B.51)$$

et

$$|T'_1| = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} k(u_1, x_2 - c(x_1 - u_1)) \lambda(x_1 - u_1, c(x_1 - u_1)) (c'(x_1 - u_1) - c'(x'_1)) du_1 \right| \quad (3B.52)$$

$$\leq \int_{-\infty}^{+\infty} |k(u_1, x_2 - c(x_1 - u_1)) \lambda(x_1 - u_1, c(x_1 - u_1)) (c'(x_1 - u_1) - c'(x'_1))| du_1 \quad (3B.53)$$

$$\leq \int_{-\infty}^{+\infty} |k(u_1, x_2 - c(x_1 - u_1)) \lambda(x_1 - u_1, c(x_1 - u_1))| \max(c'(x_1 - u_1) - c'(x'_1)) du_1 \quad (3B.54)$$

$$\leq \max(c'(x_1 - u_1) - c'(x'_1)) |T_2| \quad (3B.55)$$

$$T'_1 \leq |T_2| \max(c''(x_1 - u_1)) (\eta + s) . \quad (3B.56)$$

Ceci est borné tant que  $c'(x_1) \leq 2$  par

$$T'_1 \leq K(\eta + s)|T_2| . \quad (3B.57)$$

La régularité de  $f$  à l'extérieur du contour permet d'obtenir

$$R_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} k(u_1, u_2) \frac{\partial}{\partial x_1} r(x_1 - u_1, x_2 - u_2) du_1 du_2 \quad (3B.58)$$

et

$$|R_1| \leq \|\nabla f\|_\infty^r . \quad (3B.59)$$

De même dans l'autre direction

$$R_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} k(u_1, u_2) \frac{\partial}{\partial x_2} r(x_1 - u_1, x_2 - u_2) du_1 du_2 \quad (3B.60)$$

et

$$|R_2| \leq \|\nabla f\|_\infty^r . \quad (3B.61)$$

Finalement,

$$\nabla(k \star f)(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1}(k \star f)(x) \\ \frac{\partial}{\partial x_2}(k \star f)(x) \end{pmatrix} \quad (3B.62)$$

$$= \begin{pmatrix} T_1 + R_1 \\ T_2 + R_2 \end{pmatrix} \quad (3B.63)$$

$$= \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \end{pmatrix} \quad (3B.64)$$

$$= \begin{pmatrix} -c'(x'_1)T_2 + T'_1 \\ T_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \end{pmatrix} \quad (3B.65)$$

$$\nabla(k \star f)(x) = T_2 \begin{pmatrix} -c'(x'_1) \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} T'_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \end{pmatrix} . \quad (3B.66)$$

On utilise alors les bornes sur  $T'_1$ ,  $R_1$  et  $R_2$  pour majorer la différence entre le gradient et la normale à la courbe

$$D = \nabla(k \star f)(x) - T_2 \begin{pmatrix} -c'(x'_1) \\ 1 \end{pmatrix} \quad (3B.67)$$

$$D = \begin{pmatrix} T'_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \end{pmatrix} \quad (3B.68)$$

et

$$|D| = \left| \begin{pmatrix} T'_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \end{pmatrix} \right| \quad (3B.69)$$

$$\leq \left| \begin{pmatrix} T'_1 \\ 0 \end{pmatrix} \right| + \left| \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \end{pmatrix} \right| \quad (3B.70)$$

$$|D| \leq K(\eta + s)|T_2| + \sqrt{2}\|\nabla f\|_\infty^r . \quad (3B.71)$$

On obtient donc

$$|\tan(\text{angle}(\nabla(g_\eta \star f_s)(x), \mathbf{n}_C(x')))| \leq \frac{|\nabla(k \star f)(x) - T_2 \begin{pmatrix} -c'(x'_1) \\ 1 \end{pmatrix}|}{|T_2 \begin{pmatrix} -c'(x'_1) \\ 1 \end{pmatrix}|} \quad (3B.72)$$

$$\leq \frac{|D|}{|T_2(-c'(x'_1)/1)|} \quad (3B.73)$$

$$\leq \frac{|\begin{pmatrix} T'_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \end{pmatrix}|}{|T_2 \begin{pmatrix} -c'(x'_1) \\ 1 \end{pmatrix}|} \quad (3B.74)$$

$$\leq \frac{K(\eta + s)|T_2| + \sqrt{2}\|\nabla f\|_\infty^r}{|T_2|\sqrt{1 + c'(x'_1)^2}} \quad (3B.75)$$

$$\leq \frac{K(\eta + s)}{\sqrt{1 + c'(x'_1)^2}} + \frac{\sqrt{2}\|\nabla f\|_\infty^r}{|T_2|\sqrt{1 + c'(x'_1)^2}} \quad (3B.76)$$

$$|\tan(\text{angle}(\nabla(g_\eta \star f_s)(x), \mathbf{n}_C(x')))| \leq K(\eta + s) + \frac{\sqrt{2}\|\nabla f\|_\infty^r}{|T_2|\sqrt{1 + c'(x'_1)^2}}. \quad (3B.77)$$

Si  $K(\eta + s) \leq 1$  et  $|\nabla(g_\eta \star f_s)(x)| \geq 3\|\nabla f\|_\infty^r$ , on a

$$|\nabla(g_\eta \star f_s)(x)| = |T_2 \begin{pmatrix} -c'(x'_1) \\ 1 \end{pmatrix} - D| \quad (3B.78)$$

$$\leq |T_2 \begin{pmatrix} -c'(x'_1) \\ 1 \end{pmatrix}| + \|D\| \quad (3B.79)$$

$$\leq |T_2|\sqrt{1 + c'(x'_1)^2} + K(\eta + s)|T_2| + \sqrt{2}\|\nabla f\|_\infty^r \quad (3B.80)$$

$$|\nabla(g_\eta \star f_s)(x)| \leq 2|T_2|\sqrt{1 + c'(x'_1)^2} + \sqrt{2}\|\nabla f\|_\infty^r \quad (3B.81)$$

d'où

$$|\nabla(g_\eta \star f_s)(x)| - \sqrt{2}\|\nabla f\|_\infty^r \leq 2|T_2|\sqrt{1 + c'(x'_1)^2} \quad (3B.82)$$

et

$$\frac{1}{3}|\nabla(g_\eta \star f_s)(x)| \leq 2|T_2|\sqrt{1 + c'(x'_1)^2} \quad (3B.83)$$

ce qui donne

$$|\nabla(g_\eta \star f_s)(x)| \leq 6|T_2|\sqrt{1 + c'(x'_1)^2}. \quad (3B.84)$$

On a donc

$$|\tan(\text{angle}(\nabla(g_\eta \star f_s)(x), \mathbf{n}_C(x')))| \leq K(\eta + s) + \frac{\sqrt{2}\|\nabla f\|_\infty^r}{|T_2|\sqrt{1 + c'(x'_1)^2}} \quad (3B.85)$$

$$|\tan(\text{angle}(\nabla(g_\eta \star f_s)(x), \mathbf{n}_C(x')))| \leq K(\eta + s) + \frac{6\sqrt{2}\|\nabla f\|_\infty^r}{|\nabla(g_\eta \star f_s)(x)|}. \quad (3B.86)$$

Dans le cas où la courbe devient horizontale un découpage du domaine permet de se ramener au cas précédent.  $\square$



---

# Chapitre 4

## Approximation non linéaire dans un frame de bandelettes

---

<b>4.1</b>	<b>Géométrie des domaines</b>	<b>112</b>
4.1.1	Conditions sur la géométrie des domaines	112
4.1.2	Géométrie et grass-fire	114
<b>4.2</b>	<b>Approximation.</b>	<b>116</b>
4.2.1	Régularité et produits scalaires avec des ondelettes	116
4.2.2	Approximation linéaire de la géométrie	118
4.2.3	Approximation non-linéaire sur un domaine $\Omega$	119
4.2.4	Approximation non-linéaire	129
<b>4.3</b>	<b>Détection dans le cas des fonctions étoilées</b>	<b>138</b>
4.3.1	Fonctions étoilées	138
4.3.2	Détection	139
4.3.2.1	Chânage des maxima et construction des régions	140
4.3.2.2	Intégration du flot	141

Dans ce chapitre, on se place dans le cadre du modèle de fonctions présenté dans l'introduction. On enlève cependant la composante de bruit pour obtenir des résultats d'approximation. Une fonction  $f_s$  dans ce modèle est donc une version lissée par  $h_s$  d'une fonction régulière par morceaux avec des discontinuités le long de courbes régulières.

On suppose également que l'ondelette  $\psi$  utilisée possède  $p \geq \alpha$  moments nuls, est à support compact et que la dérivée d'ordre  $\alpha$  de est bornée. Ceci est notamment le cas pour les ondelettes de Daubechies avec  $p \sim 5\alpha$ .

Dans un premier temps, on supposera que ces courbes ont été détectées avec une précision  $\eta = \max(\epsilon, s)$  et que celles-ci ont été découpées pour assurer que le long de ces courbes la pente de la vraie courbe n'est pas trop grande.

## 4.1 Géométrie des domaines

On montre tout d'abord qu'on peut approcher la géométrie détectée et obtenir des domaines satisfaisant des conditions de confinement des contours à l'intérieur des domaines et d'isolement des domaines les uns par rapport aux autres.

### 4.1.1 Conditions sur la géométrie des domaines

La première condition sur la géométrie est une condition de confinement du contour dans le domaine à une certaine précision près. Le contour doit rester complètement à l'intérieur du domaine sauf aux extrémités où il peut ne pas être recouvert sur une taille proportionnelle à la précision de la géométrie. De plus, les frontières du domaine doivent rester à distance du contour. Tout ces contrôles vont dépendre de la distance aux extrémités du domaine. Cette distance est mesurée horizontalement comme la différence des abscisses pour les domaines horizontaux et verticalement comme la différence des ordonnées pour les domaines verticaux.

Pour être plus précis, soit une distance  $d_0$  et deux constantes  $K$  et  $C$ , on définit la notion de confinement d'un domaine.

**Définition 4.1.** Un domaine horizontal est dit confiné à  $\eta$  près

- si la distance horizontale  $d_H$  d'un point de la frontière à une extrémité est comprise entre  $K\eta$  et  $d_0$ , alors la distance entre ce point et la vraie courbe reste plus grande que  $Cd_H$  et
- si la distance horizontale  $d_H$  d'un point de la frontière à une extrémité est supérieure à  $d_0$ , alors la distance entre ce point et la vraie courbe reste plus grande que  $Cd_0$ .

Si la distance  $d_H$  à un extrémité est inférieure à  $K\eta$  aucun contrôle n'est requis sur la frontière.

La seconde condition est une condition d'isolement qui permet d'éviter l'influence des autres zones en garantissant qu'elle reste à une distance suffisante.

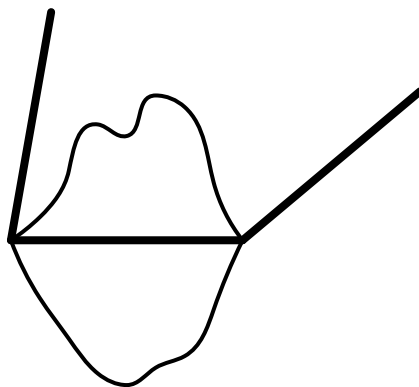


**Définition 4.2.** Un domaine horizontal est dit isolé à  $\eta$  près des autres

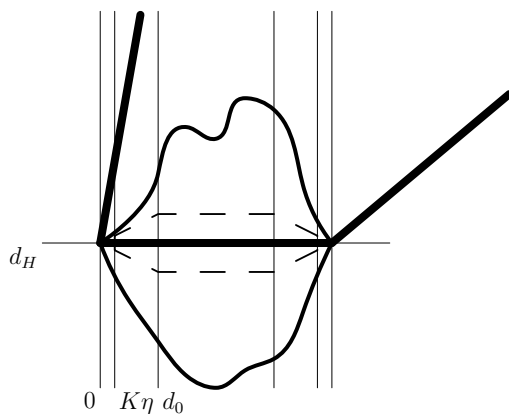
- si la distance horizontale  $d_H$  d'un point de la frontière à une extrémité est comprise entre  $K\eta$  et  $d_0$ , alors la distance entre ce point et les autres courbes reste plus grande que  $Cd_H$  et
- si la distance horizontale  $d_H$  d'un point de la frontière à une extrémité est supérieure à  $d_0$ , alors la distance ce points et les autres courbes reste plus grande que  $Cd_0$ .

Comme pour la notion de confinement, aucun contrôle sur la frontière n'est requis si la distance horizontale  $d_H$  à l'extrémité est inférieure à  $K\eta$ .

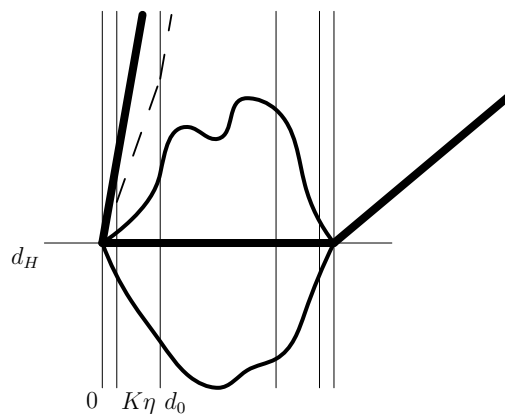
L'isolement d'un domaine peut se déduire de son confinement si la distance d'un point de frontière à sa courbe associée est plus petite à  $K\eta$  près que la distance à toute autre courbe par des inégalités triangulaires.



(a)



(b)



(c)

FIGURE 4.1 – Confinement et isolement : (a) un domaine et deux courbes voisines, (b) la contrainte sur le domaine due au confinement, (c) la contrainte sur le domaine due à l'isolement.

### 4.1.2 Géométrie et grass-fire

On souhaite maintenant montrer que si l'on obtient une détection des courbes avec une précision de  $\eta = \max(\epsilon, s)$  alors on peut obtenir des domaines satisfaisant les conditions précédentes par une technique de grass-fire, c'est-à-dire de croissance de régions, à partir des contours détectés.

On définit la notion suivante pour la précision de la détection :

**Définition 4.3.** La détection est dite précise à  $\eta$  près si

- Les courbes définissant  $f_0$  sont découpées en courbes horizontales ou verticales dont la tangente conserve un angle supérieur à  $\pi/24$  avec respectivement la verticale et l'horizontale. On note ces courbes  $\mathcal{C}_i$ .
- On connaît des courbes  $\mathcal{G}_i$  définie sur l'ensemble de définition de la paramétrisation  $c_i$  de  $\mathcal{C}_i$  éventuellement modifiée d'une largeur  $K\eta$  aux extrémités et telles que l'erreur entre la paramétrisation  $g_i$  de la courbe  $\mathcal{G}_i$  et la paramétrisation  $c_i$  de la courbe  $\mathcal{C}_i$  sur leur domaine de définition commun est bornée

$$\|c_i - g_i\|_\infty \leq \eta . \quad (4.1)$$

On suppose désormais que la détection satisfait cette propriété. On ajoute à ces contours les bords horizontaux et verticaux de l'image car la fonction  $y$  présente un comportement similaire à celui des vrais contours.

Les domaines  $\Omega_i$  associés à chaque courbe horizontale ou verticale  $\mathcal{C}_i$  sont obtenus à partir de la géométrie estimée à l'aide d'un grass-fire [Blu73] légèrement modifié. Celui-ci se fait en deux étapes à partir des estimations  $\mathcal{G}_i$  des courbes  $\mathcal{C}_i$ . Dans un premier temps on détermine des domaines  $\Omega'_i$  associés aux courbes  $h_i$  par un grass-fire normal : le domaine  $\Omega'_i$  correspond aux points qui sont plus proche de la courbe  $\mathcal{G}_i$  que des autres courbes.

$$\Omega'_i = \{x, d(x, \mathcal{G}_i) = \inf_j d(x, \mathcal{G}_j)\} . \quad (4.2)$$

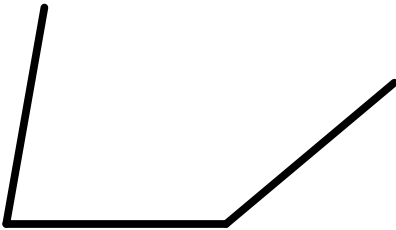
On modifie alors ces domaines  $\Omega'_i$  en fonction de l'horizontalité ou de la verticalité de la courbe  $\mathcal{C}_i$ . Si cette courbe est horizontale, on restreint tout d'abord le domaine  $\Omega'_i$  horizontalement à la partie  $\mathcal{D}_{g_i}$  où la paramétrisation  $g_i$  est définie. On ne conserve alors que les points où la distance verticale entre la courbe paramétrée par  $g_i$  et le bord du domaine est inférieure à une distance  $d_{\max}$  fixée. Le domaine ainsi obtenu est le domaine  $\Omega_i$  :

$$\Omega_i = \Omega'_i \cap \{\mathcal{D}_{g_i} \times \mathbb{R}\} \cap \{x = (x_1, x_2), |g(x_1) - x_2| \leq d_{\max}\} . \quad (4.3)$$

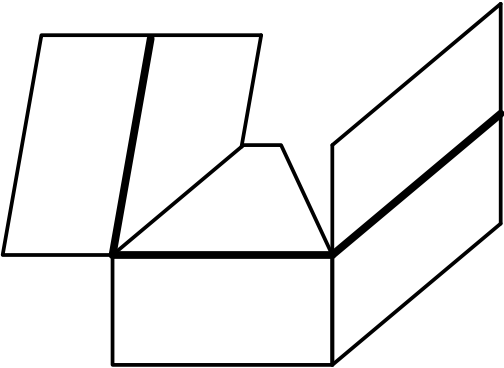
Si la courbe est verticale, on échange le rôle des directions verticale et horizontale.

D'un point de vue algorithmique, ce grass-fire s'obtient de manière similaire à celui décrit dans la section 3.2.2 par un algorithme de croissance de régions.

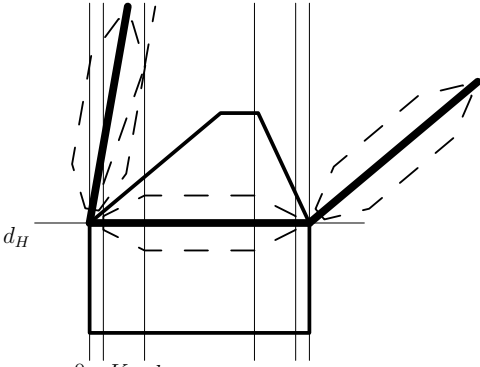
On montre que les domaines  $\Omega_i$  satisfont les conditions de la section précédente.



(a)



(b)



(c)

FIGURE 4.2 – Grass-fire et domaines

**Lemme 4.1.** *Si la détection de la géométrie d'une fonction du modèle est précise à  $\eta$  près alors les domaines obtenus par le grass-fire sont à la fois confinés à  $\eta$  près et isolés à  $\eta$  près.*

*Démonstration.* La preuve est basée sur des arguments de régularité des courbes. Elle est technique et repoussée dans l'annexe 4A.  $\square$

## 4.2 Approximation

On suppose dorénavant que la détection est précise au sens de la définition 4.3. Les théorèmes d'approximation sont basés sur la régularité. On commence donc par rappeler le lien entre régularité et produit scalaire avec une ondelette possédant des moments nuls. On montre alors que l'on peut approcher la géométrie en ondelettes en conservant une détection précise puisque dans ce cas on peut approcher efficacement la fonction en bandelettes sur chaque domaine. Une approximation globale de la fonction  $f_s$  est alors construite dans le frame de bandelettes à partir de ces résultats.

### 4.2.1 Régularité et produits scalaires avec des ondelettes

La construction des bandelettes utilise les ondelettes monodimensionnelles. Leurs propriétés d'approximation seront donc à la base de la démonstration de celle des bandelettes. Les démonstrations des théorèmes d'approximation concernant les ondelettes de la section 1.3.3 sont basées sur l'estimation de décroissance des coefficients d'ondelettes avec les échelles. Dans ce travail, on utilise la régularité d'une fonction  $f$  pour obtenir cette décroissance à l'aide du lemme suivant :

**Lemme 4.2.** *Si  $f$  est telle que sa dérivée d'ordre  $\alpha$  selon  $x_i$  est bornée et si  $\psi$  est à support compact et possède  $p \geq \alpha$  moments nuls selon  $x_i$  alors*

$$|\langle f, \psi \rangle| \leq \left\| \frac{\partial^\alpha f}{\partial x_i^\alpha} \right\|_\infty \|\psi^{[\alpha]_i}\|_1 \quad (4.4)$$

où

$$\psi^{[\alpha]_i}(x) = \int_{-\infty}^{x_i} \psi^{[\alpha-1]_i}(x_1, \dots, u_i, \dots, x_n) du_i \quad (4.5)$$

et

$$\psi^{[0]_i}(x) = \psi(x) . \quad (4.6)$$

*Démonstration.* Ce résultat s'obtient par des intégrations par parties.

On commence par montrer que les  $\psi^{[\beta]_i}$  sont à support compact pour  $\beta \leq \alpha$  en utilisant les moments nuls de  $\psi$ . Ceci est vrai pour  $\psi^{[0]_i} = \psi$  et on dénote par  $] -K, K[$  un intervalle tel que  $\psi(x)$  est nulle dès que  $x_i$  n'est pas dedans. On suppose maintenant que  $\psi^{[\beta]_i}(x)$  avec  $\beta < \alpha$  est nulle dès que  $x_i$  n'est pas dans  $] -K, K[$ . On vérifie alors que si  $x_i \leq -K$

$$\psi^{[\beta+1]_i}(x) = \int_{-\infty}^{x_i} \psi^{[\beta]_i}(x_1, \dots, u_i, \dots, x_n) du_i \quad (4.7)$$

$$= \int_{-\infty}^{x_i} 0 du_i \quad (4.8)$$

$$\psi^{[\beta+1]_i}(x) = 0 . \quad (4.9)$$

Si  $x_i \geq K$ ,

$$\psi^{[\beta+1]_i}(x) = \int_{-\infty}^{x_i} \psi^{[\beta]_i}(x_1, \dots, u_i, \dots, x_n) du_i \quad (4.10)$$

$$= \int_{-K}^K \psi^{[\beta]_i}(x_1, \dots, u_i, \dots, x_n) du_i \quad (4.11)$$

par intégration par parties

$$\psi^{[\beta+1]_i}(x) = [u_i \psi^{[\beta]_i}(x_1, \dots, u_i, \dots, x_n)]_{-K}^K - \int_{-K}^K u_i \psi^{[\beta-1]_i}(x_1, \dots, u_i, \dots, x_n) du_i . \quad (4.12)$$

On utilise alors le support fini de  $\psi^{[\beta]_i}$

$$\psi^{[\beta+1]_i}(x) = - \int_{-K}^K u_i \psi^{[\beta-1]_i}(x_1, \dots, u_i, \dots, x_n) du_i \quad (4.13)$$

et on répète alors cette intégration par parties et l'argument de support pour obtenir

$$\psi^{[\beta+1]_i}(x) = (-1)^\beta \int_{-K}^K u_i^\beta \psi^{[0]_i}(x_1, \dots, u_i, \dots, x_n) . du_i \quad (4.14)$$

On utilise alors les moments nuls de  $\psi^{[0]_i} = \psi$  pour conclure

$$\psi^{[\beta+1]_i}(x) = 0 . \quad (4.15)$$

On étudie maintenant le produit scalaire.

$$\langle f, \psi \rangle = \int f(x) \psi(x) dx \quad (4.16)$$

$$\langle f, \psi \rangle = \int_{x_j \neq x_i} \int_{x_i} f(x) \psi(x) dx_i dx_1 \dots dx_n . \quad (4.17)$$

On s'intéresse à l'intégrale intérieure et on effectue une intégration par parties

$$\int_{x_i} f(x) \psi(x) dx_i = [f(x) \psi^{[1]_i}(x)]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{x_i} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \psi^{[1]_i}(x) dx_i . \quad (4.18)$$

On utilise alors le support compact de  $\psi^{[1]_i}$

$$\int_{x_i} f(x) \psi(x) dx_i = - \int_{x_i} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \psi^{[1]_i}(x) dx_i . \quad (4.19)$$

On répète l'intégration par parties pour obtenir grâce au support compact de  $\psi^{[\beta]_i}$  pour  $\beta \leq \alpha$

$$\int_{x_i} f(x) \psi(x) dx_i = (-1)^\alpha \int_{x_i} \frac{\partial^\alpha f}{\partial x_i^\alpha}(x) \psi^{[\alpha]_i}(x) dx_i \quad (4.20)$$

donc

$$\langle f, \psi \rangle = \int f(x) \psi(x) dx \quad (4.21)$$

$$= \int_{x_j \neq x_i} (-1)^\alpha \int_{x_i} \frac{\partial^\alpha f}{\partial x_i^\alpha}(x) \psi^{[\alpha]_i}(x) dx_i dx_1 \dots dx_n \quad (4.22)$$

$$\langle f, \psi \rangle = \int_x (-1)^\alpha \frac{\partial^\alpha f}{\partial x_i^\alpha}(x) \psi^{[\alpha]_i}(x) dx \quad (4.23)$$

et

$$|\langle f, \psi \rangle| \leq \left\| \frac{\partial^\alpha f}{\partial x_i^\alpha} \right\|_\infty \|\psi^{[\alpha]_i}\|_1. \quad (4.24)$$

□

Ce lemme permet d'obtenir une décroissance des produits scalaires avec les échelles dès qu'on exhibe une régularité.

**Lemme 4.3.** *Si  $f$  est telle que sa dérivée d'ordre  $\alpha$  selon  $x_i$  est bornée, si  $\psi$  est à support compact et possède  $\alpha$  moments nuls selon  $x_i$  et si on pose*

$$\psi_{j,k}(x) = \frac{1}{2^{nj/2}} \psi\left(\frac{x - k2^j}{2^j}\right) \quad (4.25)$$

alors

$$|\langle f, \psi_{j,k} \rangle| \leq \left\| \frac{\partial^\alpha f}{\partial x_i^\alpha} \right\|_\infty \|\psi^{[\alpha]_i}\|_1 2^{j\alpha}. \quad (4.26)$$

*Démonstration.* Il suffit d'utiliser le lemme précédent et de remarquer que

$$\|\psi_{j,k}^{[\alpha]_i}\|_1 = \|\psi^{[\alpha]_i}\|_1 2^{j\alpha} \quad (4.27)$$

puisque

$$\psi_{j,k}^{[\alpha]_i}(x) = 2^{j\alpha} \frac{1}{2^{nj/2}} \psi^{[\alpha]_i}\left(\frac{x - k2^j}{2^j}\right). \quad (4.28)$$

□

Ces lemmes, et en particulier le second, sont utilisés de manière intensive dans les démonstrations de l'annexe 4B pour obtenir les résultats d'approximations des sections suivantes.

## 4.2.2 Approximation linéaire de la géométrie

On montre que si on a une détection précise au sens de la définition 4.3 des  $c_i$  par les  $g_i$  alors il existe des approximations des  $g_i$  tels que la détection reste précise. Pour cela, on approche  $c_i$  par une approximation linéaire en ondelettes  $P_{V_{j_0}^1} g_i$  de  $g_i$  où  $P_{V_{j_0}^1} g_i$  est la projection orthogonale sur l'espace  $V_{j_0}^1$  défini dans la section 1.3.3.1. On montre alors que si l'indice de l'échelle est choisi égal à  $j_0 = \log_2(\eta)/\alpha$  alors non seulement on contrôle encore l'erreur en norme infinie mais de plus cette approximation  $P_{V_{j_0}^1} g_i$  de  $g_i$  est aussi régulière que  $c_i$ . Le nombre de coefficients d'ondelettes nécessaires pour caractériser cette approximation est borné par  $l_{c_i} \eta^{-1/\alpha}$ .

**Lemme 4.4.** *Si  $c$  est telle que sa dérivée d'ordre  $\alpha$  est bornée sur  $[0, l]$ , il existe une constante  $C$  telle que pour tout  $\eta > 0$ , si  $g$  satisfait  $\|c - g\|_\infty \leq \eta$  alors pour l'échelle d'indice  $j_0 = \lceil \log_2(\eta)/\alpha \rceil$ , on a*

$$\|(P_{V_{j_0}^1} g - c)^{(\kappa)}\|_\infty \leq K \eta^{(1-\kappa/\alpha)} \quad \forall \kappa \leq \alpha. \quad (4.29)$$

*Démonstration.* La preuve fait l'objet de la section 4B.1 de l'annexe 4B.  $\square$

On confondra désormais  $g_i$  et son approximation  $P_{V_{j_0}^1} g_i$ . En particulier les domaines  $\Omega_i$  obtenus à partir des approximations satisfont également les conditions requises.

### 4.2.3 Approximation non-linéaire sur un domaine $\Omega$

Ce domaine  $\Omega$  est associé à une courbe horizontale  $\mathcal{C}$  paramétrée par  $c$ . On suppose ici qu'une détection précise à  $\eta$  près de la géométrie  $g$  a été obtenue et qu'elle a été approchée en ondelettes comme décrit précédemment. La géométrie  $g$  est donc régulière et le domaine  $\Omega$  associé possède les propriétés de confinement et d'isolement définies en 4.1 et 4.2.

On montre alors que sous ces conditions il existe une approximation non-linéaire avec  $M$  bandelettes permettant d'obtenir une décroissance de l'erreur sur le domaine en  $O(M^{-\alpha})$ .

**Théorème 4.1.** *Soit  $f$  un fonction telle que, en dehors d'un ensemble de courbes dont les dérivées d'ordre  $\alpha$  des paramétrisations normales sont bornées, les dérivées partielles d'ordre  $\alpha$  sont bornées, il existe deux constantes  $K_1$  et  $K_2$  ne dépendant que de la fonction  $f$ , du noyau de lissage  $h$  et de l'ondelette  $\psi$  telles que pour tout  $\epsilon$  si on connaît une détection à  $\eta = \inf(\epsilon, s)$  près de la géométrie alors pour chaque domaine  $\Omega$ , il existe une approximation  $f_{s,\epsilon,\Omega}$  de  $f_s$  en bandelettes avec  $M_{s,\epsilon,\Omega}$  coefficients où*

$$M_{s,\epsilon,\Omega} \leq K_1 \epsilon^{-1/\alpha} \quad (4.30)$$

telle que

$$\|f_s - f_{s,\epsilon,\Omega}\|_{2,\Omega}^2 \leq K_2 \epsilon \quad (4.31)$$

et donc

$$\|f_s - f_{s,\epsilon,\Omega}\|_{2,\Omega}^2 \leq K_1^\alpha K_2 M_{s,\epsilon,\Omega}^{-\alpha} \quad (4.32)$$

où les constantes  $K_1$  et  $K_2$  ne dépendent que de la fonction  $f$ , du noyau de lissage  $h$  et des ondelettes utilisées.

Dans la démonstration de ce théorème, on ne considère pas la question de l'approximation de la géométrie. On suppose de plus que l'échelle de coupure  $j_0$  est connue. Dans le théorème général, on montre qu'on pouvait en fait se passer de cette hypothèse si les courbes détectées sont dérivables.

*Démonstration.* On construit une approximation de  $f_s$  sur le domaine  $\Omega$  en choisissant des approximations linéaires sur différentes catégories de coefficients en supposant connues la régularité  $\alpha$ , l'échelle de lissage  $s$  et la position de la courbe  $\mathcal{C}$ .

La courbe détectée  $\mathcal{G}$  est approchée comme indiqué dans la section 4.2.2 par sa projection sur l'espace  $V_{j_0}^1$  avec  $j_0 = \log_2(\eta)/\alpha$ . Ceci assure la régularité des contours et permet

un contrôle du nombre de coefficients nécessaires. En effet le lemme 4.4 nous assure alors si  $g$  est la paramétrisation de  $h$  et  $c$  celle de  $\mathcal{C}$  que

$$\|(P_{V_{j_0}^1} g - c)^{(\kappa)}\|_\infty \leq K\eta^{(1-\kappa/\alpha)} \quad \forall \kappa \leq \alpha \quad (4.33)$$

et le nombre  $M_G$  de coefficients nécessaires à la description de cette projection satisfait

$$M_G \leq l_c \eta^{-1/\alpha} . \quad (4.34)$$

On suppose désormais que le grass-fire est initialisé avec cette courbe, de sorte que le domaine  $\Omega$  reste bien confiné et bien isolé à  $K\eta$  près.

Pour approcher la fonction  $f_s$  sur le domaine  $\Omega$ , on utilise soit l'ensemble des ondelettes rencontrant le domaine si le lissage est large,  $s \geq s_0$ , soit la famille orthonormée de bandelettes associées au domaine. La largeur de lissage  $s_0$  correspond à la largeur minimale des domaines,  $Cd_0$ , de la définition des détections précises et confinées (4.1 et 4.2).

On va maintenant montrer que l'on peut définir des échelles de coupures sur les coefficients utilisés telles que le nombre de coefficients conservés au dessus de cette échelle soit bien de l'ordre de  $\epsilon^{-1/\alpha}$  tandis que l'erreur est de l'ordre de  $\epsilon$ . Ceci suppose des propriétés de décroissance que l'on obtient en particulier à l'aide du lemme 4.3 qui relie régularité et produit scalaire.

Pour obtenir ces décroissances, on va diviser les coefficients en 16 catégories caractérisées par un type d'ondelettes, une gamme d'échelles ou une position. On décrit maintenant ces coefficients et on précise la source de régularité à l'origine du contrôle sur l'erreur.



- Ondelettes isotropes : ce sont les ondelettes isotropes rencontrant le domaine  $\Omega$ , elles ne sont utilisées que dans le cas d'un large lissage ( $s \geq s_0$ ).

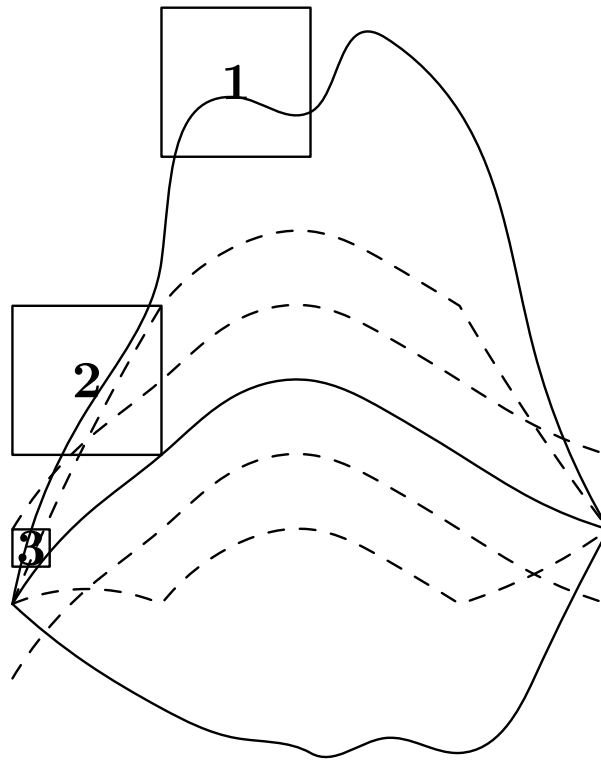


FIGURE 4.3 – Ondelettes isotropes

- 1** : Ondelettes isotropes ne rencontrant pas la singularité lissée : la décroissance provient de la régularité de  $f_s$  en dehors de la singularité. On utilise donc les propriétés d'approximation des ondelettes pour les fonctions régulières qui permettent d'assurer la bonne décroissance de l'erreur pour ces coefficients.
- 2** : Ondelettes isotropes rencontrant la singularité lissée avec  $2^j \geq s_0$  : ces ondelettes sont traitées différemment selon leur position par rapport à l'échelle de lissage  $s$ . Lorsque l'échelle des ondelettes est plus grande que l'échelle de lissage, on retrouve le comportement des ondelettes le long d'une singularité non lissée. Lorsque l'échelle des ondelettes est plus petite que l'échelle de lissage, on peut utiliser la régularité de la fonction de lissage pour obtenir une décroissance des coefficients d'ondelettes. Le contrôle sur le nombre de ces coefficients situés à proximité du contour permet d'obtenir la bonne décroissance.
- 3** : Ondelettes isotropes rencontrant la singularité lissée avec  $2^j < s_0$  : elle sont traitées ici avec les précédentes.

- Ondelettes déformées : ce sont les ondelettes isotropes dans l'espace déformé qui n'ont pas été transformées en bandelettes car elles touchaient le bord du domaine.

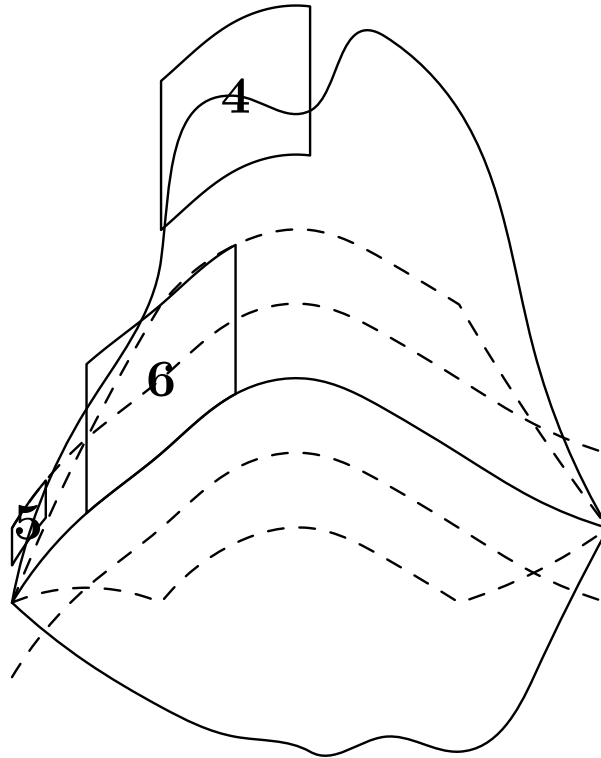


FIGURE 4.4 – Ondelettes isotropes déformées

- 4 :** Ondelettes déformées qui ne rencontrent pas la singularité lissée : la décroissance provient de la régularité de  $f_s$  en dehors de la singularité. Ici encore, on utilise les propriétés d'approximation des ondelettes isotropes pour les fonctions régulières. On montre en effet que la régularité de  $f_s$  et de la paramétrisation  $g$  de la courbe détectée sur ce domaine implique la régularité de la fonction  $Wf_s$  et donc permet d'obtenir la bonne décroissance pour ces coefficients.
- 5 :** Ondelettes déformées qui rencontrent la singularité lissée avec  $2^j \leq s_0$  : ces ondelettes sont situés aux extrémités du tube par construction. Leur nombre est constant au dessus de l'échelle de lissage  $s$ . Lorsque l'échelle des ondelettes est plus petite que l'échelle de lissage, leur nombre augmente mais on utilise alors la régularité de la fonction de lissage  $h_s$  pour obtenir une décroissance suffisante des coefficients d'ondelettes.
- 6 :** Ondelettes déformées qui rencontrent la singularité avec  $2^j \geq \log_2(s)_0$  : ces ondelettes sont des ondelettes assez larges et leur nombre est donc borné.

- Bandelette intérieure : ce sont les bandelettes qui ne viennent pas d'ondelettes de bord sur l'intervalle, elles correspondent à la majorité des bandelettes.

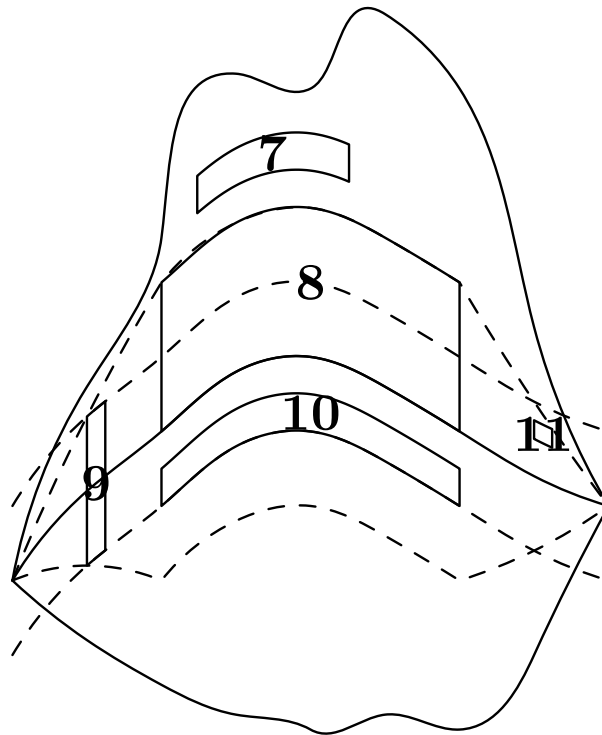


FIGURE 4.5 – Bandelettes intérieures

- 7 :** Bandelettes intérieure qui ne rencontrent pas la la singularité lissée : la décroissance provient de la régularité de  $f$  en dehors de la singularité. Celle ci avec la régularité de  $g$  implique la régularité de  $Wf_s$  et permet d'utiliser les propriétés d'approximation des ondelettes anisotropes pour les fonctions régulières.
- 8 :** Bandelettes intérieures qui rencontrent la singularité lissée avec une échelle  $2^{j_2} \geq \eta$  et un support inclus dans  $[\eta, l - \eta] \times \mathbb{R}$  : ce sont sans doute les bandelettes les plus importantes. Ce sont ces bandelettes qui nécessitent l'hypothèse de régularité des ondelettes. On utilise en effet le fait que les produits scalaires monodimensionnels des ondelettes verticales à travers la singularité varie peu si la fonction est régulière le long de la singularité, si on se déplace peu par rapport à la position du contour et surtout si les ondelettes utilisées sont régulières. On utilise donc la régularité de la fonction  $f$  le long du contour, le contrôle sur l'erreur entre la courbe détectée et le contour ainsi que la régularité des ondelettes elles-mêmes pour obtenir une décroissance de ces coefficients en fonction des échelles.
- 9 :** Bandelettes intérieures qui rencontrent la singularité lissée avec  $2^{j_2} \geq \eta$  et un support non inclus dans  $[\eta, l - \eta] \times \mathbb{R}$  : ces bandelettes sont large dans une direction et on peut ainsi contrôler leur nombre.
- 10 :** Bandelettes intérieures qui rencontrent la singularité lissée avec une échelle  $2^{j_2} \leq s$  et un support inclus dans  $[\eta, l - \eta] \times \mathbb{R}$  : ce sont des bandelettes demandant une analyse similaire à celle de la catégorie 8 où la régularité de l'ondelette est remplacée par la régularité du noyau de lissage  $h_s$ .

**11** : Bandelettes intérieures qui rencontrent la singularité lissée avec  $2^{j_2} \leq s$  et un support non inclus dans  $[\eta, l - \eta] \times \mathbb{R}$  : ces bandelettes sont situées aux extrémités des domaines et un contrôle sur leur nombre est suffisant.

- Bandelettes de bord : ce sont les bandelettes où interviennent une ondelette monodimensionnelle de bord ou une fonction monodimensionnelle d'échelle.

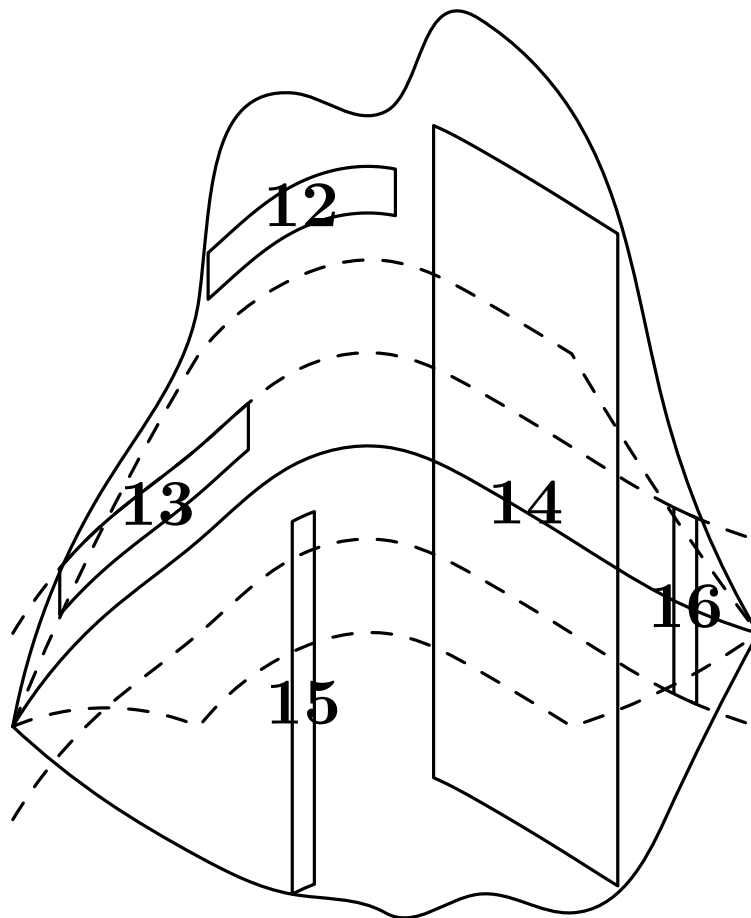


FIGURE 4.6 – Bandelettes de bord

**12** : Bandelettes de bord qui ne rencontrent pas de singularité lissée : la régularité utilisée est la même que pour la catégorie 7, celle de  $f$ .

- 13 :** Bandelettes de bord qui rencontrent la singularité lissée dans le sens de la géométrie ( $j_1 \geq j_2$ ) : on montre qu'un contrôle sur le nombre de ces bandelettes de bord est suffisant.
- 14 :** Bandelettes de bord qui rencontrent la singularité lissée orthogonalement à la géométrie ( $j_2 \geq j_1$ ) telles que  $2^{j_1} \geq \log_2(s)$  et le support est inclus dans  $[\eta, l - \eta] \times \mathbb{R}$  : ces bandelettes de bord se traitent de manière similaire à celle de la catégorie 8 en utilisant le contrôle sur l'erreur de détection, la régularité de la fonction  $f$  le long du contour et la régularité de l'ondelette.
- 15 :** Bandelettes de bord qui rencontrent la singularité lissée orthogonalement à la géométrie ( $j_2 \geq j_1$ ) telles que  $2^{j_1} \leq s$  et le support est inclus dans  $[\eta, l - \eta] \times \mathbb{R}$  : ces bandelettes de bord se comportent comme les bandelettes intérieures de la catégorie 9 où on utilise le contrôle sur l'erreur de détection, la régularité de la fonction  $f$  le long du contour et la régularité du noyau de lissage  $h_s$ .
- 16 :** Bandelettes de bord qui rencontrent la singularité orthogonalement à la géométrie ( $j_2 \geq j_1$ ) telles que leur support n'est pas inclus dans  $[\eta, l - \eta] \times \mathbb{R}$  : pour cette catégorie de bandelettes situées aux extrémités un contrôle sur leur nombre est suffisant.

La première étape consiste à ne conserver aucun coefficient en dessous de l'échelle  $\epsilon$ , l'erreur résiduelle  $E_\epsilon$  est de l'ordre de  $\epsilon$ . Cette coupure correspond à une approximation linéaire et permet d'éviter d'avoir à traiter le cas des échelles inférieures à  $\epsilon$  mais supérieures à  $s$  pour lesquelles la précision de la géométrie ne permet plus d'assurer un contrôle.

On définit alors  $\xi$  comme un multiple de  $\epsilon$ . Celui-ci permet la définition d'une échelle minimale d'indice

$$j_\star = \max(\log_2(\epsilon), \log_2(\xi), \log_2(s) + (\log_2(\xi) - \log_2(s))/(2\alpha)) \quad (4.35)$$

en dessous de laquelle on ne conserve également aucun coefficient. Cette échelle minimale correspond à l'échelle d'approximation linéaire permettant d'obtenir une erreur de l'ordre de  $\epsilon$ . L'erreur due à cette échelle minimale est notée  $E_0$ .

On définit alors pour chacune des catégories des échelles de coupure au dessus de cette échelle minimale. Celles-ci sont précisées dans l'annexe 4B.

On obtient alors les trois tableaux suivants qui donnent pour chacune des catégories de coefficients le nombre de coefficients conservés ainsi que l'erreur résultante due au coefficients abandonnés. Ces valeurs sont données à une constante multiplicative près qui ne dépend pas de la fonction. Les démonstrations correspondantes sont repoussées dans l'annexe 4B.

Le premier tableau correspond au cas du lissage large,  $s \geq s_0$ , où l'on utilise uniquement des ondelettes isotropes :

$k$	$M_k$	$E_k$
	Échelle minimale	
$\epsilon$	0	$(\ D^\alpha f\ _{\mathcal{C}}^2 + \ f\ _\infty^2)\epsilon$
0	0	$(\ D^\alpha f\ _{\mathcal{C}}^2 + \ f\ _\infty^2)\xi$
	Ondelettes isotropes	
1	$l\xi^{-1/\alpha}$	$l\ D^\alpha f\ _{\mathcal{C}}^2\xi$
2	$ls_0^{-1}(1 + s_0^{1/\alpha}\xi^{-1/\alpha})$	$l\ f\ _\infty^2\xi$
3	$\emptyset$	
	Ondelettes déformées	
4	$\emptyset$	
5	$\emptyset$	
6	$\emptyset$	
	Bandelettes intérieures	
7	$\emptyset$	
8	$\emptyset$	
9	$\emptyset$	
10	$\emptyset$	
11	$\emptyset$	
	Bandelettes de bord	
12	$\emptyset$	
13	$\emptyset$	
14	$\emptyset$	
15	$\emptyset$	
16	$\emptyset$	

Le deuxième tableau correspond au cas du lissage faible,  $s \leq \epsilon$ , où la fonction se comporte comme si elle n'était pas lissée. On utilise alors la famille orthonormée de bandelettes : ondelettes isotropes déformées, bandelettes intérieures et bandelettes de bord.

$k$	$M_k$	$E_k$
		Échelle minimale
$\epsilon$	0	$l \max(1, \ D^\alpha c\ ^{2\alpha})$ $\times (\ D^\alpha f\ _{\mathcal{C}}^2 + \ f\ _\infty^2) \epsilon$
0	0	$l \max(1, \ D^\alpha c\ ^{2\alpha})$ $\times (\ D^\alpha f\ _{\mathcal{C}}^2 + \ f\ _\infty^2) \xi$
		Ondelettes isotropes
1	$\emptyset$	
2	$\emptyset$	
3	$\emptyset$	
		Ondelettes déformées
4	$l \xi^{-1/(2\alpha+1)}$	$l \max(1, \ D^\alpha c\ ^{2\alpha}) \ D^\alpha f\ _{\mathcal{C}}^2 \xi$
5	$\min( \log_2(\xi) /2,  \log_2(\epsilon) , \xi^{-1/(2\alpha+1)})$	$\max(1, \ D^\alpha c\ ^{2\alpha}) \ f\ _\infty^2 \xi$
6	$l s_0^{-1}$	0
		Bandelettes intérieures
7	$l \xi^{-1/\alpha}$	$l \max(1, \ D^\alpha c\ ^{2\alpha+2}) \ D^\alpha f\ _{\mathcal{C}}^2 \xi$
8	$l \xi^{-1/(2\alpha)} \epsilon^{-1/(2\alpha)}$	$l \max(1, \ D^\alpha c\ ^{2\alpha+2}) \ f\ _\infty^2 \xi$
9	$\begin{cases} 0 & \text{si } s \leq \xi \\ \xi^{-1/(2\alpha)} & \text{sinon} \end{cases}$	0
10	$\emptyset$	
11	$\emptyset$	
		Bandelettes de bord
12	$l \xi^{-1/\alpha}$	$l \max(1, \ D^\alpha c\ ^{2\alpha+2}) \ D^\alpha f\ _{\mathcal{C}}^2 \xi$
13	$( \log_2(\max(\xi, \epsilon)) )^2$	0
14	$l \xi^{-1/(2(\alpha-1))}$	$l \max(1, \ D^\alpha c\ ^{2\alpha+2}) \ D^\alpha f\ _{\mathcal{C}}^2 \xi$
15	$\begin{cases} 0 & \text{si } \xi \geq s^2 \\ l \xi^{-1/\alpha} & \text{si } \xi \leq s^2 \end{cases}$	$l \max(1, \ D^\alpha c\ ^{2\alpha+2}) \ D^\alpha f\ _{\mathcal{C}}^2 \xi$
16	$ \log_2(\max(\xi, \epsilon)) ^2$	0

Le troisième et dernier tableau correspond au cas du lissage intermédiaire,  $s_0 \geq s \geq \epsilon$ , où l'on utilise les propriétés du noyau de lissage. Pour représenter la fonction sur le domaine, on utilise la famille orthonormée de bandelettes : ondelettes isotropes déformées, bandelettes intérieures et bandelettes de bord.

$k$	$M_k$	$E_k$
Échelle minimale		
$\epsilon$	0	$l \max(1, \ D^\alpha c\ ^{2\alpha})$ $\times (\ D^\alpha f\ _{\mathcal{C}}^2 + \ f\ _\infty^2)\epsilon$
0	0	$l \max(1, \ D^\alpha c\ ^{2\alpha})$ $\times (\ D^\alpha f\ _{\mathcal{C}}^2 + \ f\ _\infty^2)\xi$
Ondelettes isotropes		
1	$\emptyset$	
2	$\emptyset$	
3	$\emptyset$	
Ondelettes déformées		
4	$l \xi^{-1/(2\alpha+1)}$	$l \max(1, \ D^\alpha c\ ^{2\alpha}) \ D^\alpha f\ _{\mathcal{C}}^2 \xi$
5	$\min( \log_2(\xi) /2,  \log_2(\epsilon) , \xi^{-1/(2\alpha+1)})$	$\max(1, \ D^\alpha c\ ^{2\alpha}) \ f\ _\infty^2 \xi$
6	$l s_0^{-1}$	0
Bandelettes intérieures		
7	$l \xi^{-1/\alpha}$	$l \max(1, \ D^\alpha c\ ^{2\alpha+2}) \ D^\alpha f\ _{\mathcal{C}}^2 \xi$
8	$l \xi^{-1/(2\alpha)} \epsilon^{-1/(2\alpha)}$	$l \max(1, \ D^\alpha c\ ^{2\alpha+2}) \ f\ _\infty^2 \xi$
9	$\begin{cases} 0 & \text{si } s \leq \xi \\ \xi^{-1/(2\alpha)} & \text{sinon} \end{cases}$	0
10	$l \xi^{-1/\alpha}$	$l \max(1, \ D^\alpha c\ ^{2\alpha+2}) \ D^\alpha f\ _{\mathcal{C}}^2 \xi$
11	$\begin{cases} \xi^{-1/\alpha} & \text{si } s \leq \xi \\ (\xi^{-1/(2\alpha)} +  \log_2(\epsilon) ) & \text{sinon} \end{cases}$	$\max(1, \ D^\alpha c\ ^{2\alpha+2}) \ f\ _\infty^2 \xi$
Bandelettes de bord		
12	$l \xi^{-1/\alpha}$	$l \max(1, \ D^\alpha c\ ^{2\alpha+2}) \ D^\alpha f\ _{\mathcal{C}}^2 \xi$
13	$( \log_2(\xi) )^2 + \xi^{-1/\alpha}$	0
14	$l \xi^{-1/(2(\alpha-1))}$	$l \max(1, \ D^\alpha c\ ^{2\alpha+2}) \ D^\alpha f\ _{\mathcal{C}}^2 \xi$
15	$\begin{cases} 0 & \text{si } \xi \geq s^2 \\ l \xi^{-1/\alpha} & \text{si } \xi \leq s^2 \end{cases}$	$l \max(1, \ D^\alpha c\ ^{2\alpha+2}) \ D^\alpha f\ _{\mathcal{C}}^2 \xi$
16	$\begin{cases}  \log_2(\xi) ^2 & \text{si } \xi \geq s \\ \xi^{-1/\alpha} & \text{sinon} \end{cases}$	0

Ces tableaux permettent alors de conclure en choisissant  $\xi$ .

$$\xi \simeq K \frac{\epsilon}{\max(1, \|D^\alpha c\|^{2\alpha+2}) \|D^\alpha f\|_{\mathcal{C}}^2}. \quad (4.36)$$

de sorte que la somme des erreurs autres que  $E_\epsilon$ , celle provenant du seuillage à l'échelle  $\epsilon$ , soit inférieure à  $\epsilon$ .



On obtient en effet

– dans le premier cas, celui du lissage large,

$$\sum_k M_k \leq K(\epsilon^{-1/\alpha} + s_0^{-1}(1 + s_0^{1/\alpha}\xi^{-1/\alpha})) \quad (4.37)$$

et

$$\sum_k E_k \leq (1 + Kl(\|D^\alpha f\|_{\mathcal{C}}^2 + \|f\|_\infty^2)) \epsilon, \quad (4.38)$$

– dans deuxième cas, celui du lissage faible,

$$\sum_k M_k \leq K(\epsilon^{-1/\alpha} + s_0^{-1}) \quad (4.39)$$

et

$$\sum_k E_k \leq (1 + Kl \max(1, \|D^\alpha c\|^{2\alpha})(\|D^\alpha f\|_{\mathcal{C}}^2 + \|f\|_\infty^2)) \epsilon, \quad (4.40)$$

– et enfin dans le dernier cas, celui du lissage intermédiaire,

$$\sum_k M_k \leq K(\epsilon^{-1/\alpha} + s_0^{-1}) \quad (4.41)$$

et

$$\sum_k E_k \leq (1 + Kl \max(1, \|D^\alpha c\|^{2\alpha})(\|D^\alpha f\|_{\mathcal{C}}^2 + \|f\|_\infty^2)) \epsilon. \quad (4.42)$$

On conclut alors sur l'existence de l'approximation satisfaisant le théorème en ajoutant les  $M_G$  coefficients de géométrie et en utilisant le fait que la famille de bandelettes est orthonormée.  $\square$

On note que si l'on conserve le nombre minimal  $M$  des plus grands coefficients au dessus de l'échelle  $\epsilon$  assurant une erreur au dessus de l'échelle  $\epsilon$  inférieure à  $\epsilon$ , on obtient une approximation qui satisfait les conditions du théorème. De même, l'approximation faite en conservant le nombre minimal  $M$  des plus grands coefficients assurant une erreur inférieure à l'erreur en dessous de l'échelle  $\epsilon$  augmentée de  $\epsilon$  satisfait les conditions du théorème. On utilise cet argument dans la construction effective de l'approximation que l'on fait dans la section suivante.

## 4.2.4 Approximation non-linéaire

Les deux sections précédentes fournissent les outils permettant une approximation non-linéaire en bandelettes. On peut maintenant énoncer le théorème d'approximation linéaire. Il suppose une détection précise et donne une approximation non-linéaire dans le frame de bandelettes. Cette approximation non-linéaire est telle que l'erreur décroisse en  $O(M^{-\alpha})$  où  $M$  est la somme du nombre de coefficients du frame de bandelettes et du nombre de coefficients d'ondelettes de la géométrie.

**Théorème 4.2.** *Soit  $f$  un fonction telle que, en dehors d'un ensemble de courbes dont les dérivées d'ordre  $\alpha$  des paramétrisations normales sont bornées, les dérivées partielles d'ordre  $\alpha$  sont bornées, il existe deux constantes  $K_1$  et  $K_2$  ne dépendant que de la fonction  $f$ , du noyau de lissage  $h$  et de l'ondelette  $\psi$  telles que pour tout  $\epsilon$ , si on connaît une détection à  $\eta = \inf(\epsilon, s)$  près de la géométrie et que cette géométrie estimée est uniformément dérivable alors on peut construire une approximation  $f_{s,\epsilon}$  de  $f_s$  à l'aide de  $M_{s,\epsilon}$  coefficients au total pour la géométrie et le frame de bandelettes où*

$$M_{s,\epsilon} \leq K_1 \epsilon^{-1/\alpha} \quad (4.43)$$

et

$$\|f_s - f_{s,\epsilon}\|_2^2 \leq K_2 \epsilon \quad (4.44)$$

soit

$$\|f_s - f_{s,\epsilon}\|_2^2 \leq K_1^\alpha K_2 M_{s,\epsilon}^{-\alpha} \quad (4.45)$$

où les constantes  $K_1$  et  $K_2$  ne dépendent que de la fonction  $f$ , du noyau de lissage  $h$  et des ondelettes utilisées.

*Démonstration.* Cette démonstration est essentiellement basée sur le théorème précédent. Celui-ci permet en effet de traiter chacun des domaines pour prouver l'existence de l'approximation. Ce théorème doit cependant être complété car les ondelettes isotropes correspondant au fond n'ont pas été traitées.

Il faut ensuite montrer qu'on peut effectivement obtenir une telle approximation à partir du moment où l'on a une détection précise à  $\eta = \max(\epsilon, s)$  près de la géométrie et que les paramétrisations de ces courbes sont uniformément dérivables. Ceci se fait en testant différentes échelles pour le lissage de la géométrie.

La première partie de la démonstration est donc la construction d'une approximation satisfaisant les conditions du théorème. Pour ceci, on suppose que l'on peut tout connaître sur la fonction  $f_s$  : la régularité  $\alpha$ , l'échelle de lissage  $s$  et la position des vrais contours  $\mathcal{C}_i$ .

Sur chacun des domaines  $\Omega_i$ , la courbe détectée  $\mathcal{G}_i$  est approchée comme indiqué dans la section 4.2.2 par sa projection sur l'espace  $V_{j_0}^1$  avec  $j_0 = \log_2(\eta)/\alpha$ . Ceci assure la régularité des contours et permet un contrôle du nombre de coefficients nécessaires comme dans la démonstration précédente. En particulier le nombre  $M_G$  de coefficients utilisés pour représenter la géométrie satisfait :

$$M_G \leq \sum_i l_{c_i} \eta^{-1/\alpha} . \quad (4.46)$$

Le grass-fire est initialisé par ces courbes approchées, de sorte que les domaines  $\Omega_i$  sont bien confinés et bien isolés à  $K\eta$  près.

Comme dans la démonstration précédente, les familles de fonctions utilisées sur chaque domaine dépendent du lissage. Si celui-ci est large, on utilise les ondelettes isotropes sinon on utilise les bandelettes. Le fond est lui toujours représenté avec des ondelettes isotropes.

On va maintenant montrer que l'on peut définir des échelles de coupures sur les coefficients utilisés telles que le nombre de coefficients conservés au dessus de cette échelle soit bien de l'ordre de  $\epsilon^{-1/\alpha}$  tandis que l'erreur est de l'ordre de  $\epsilon$ . Ceci suppose des propriétés de décroissance que l'on obtient en particulier à l'aide du lemme 4.3 qui relie régularité et produit scalaire.

Pour obtenir ces décroissances, on réutilise les différents coefficients de la démonstration précédente sauf pour le fond.

Les ondelettes isotropes correspondant au fond sont classées en trois catégories similaires à celles utilisées lors de la représentation des domaines. La source de régularité utilisée est précisée dans chaque cas.

- Ondelettes isotropes : ce sont les ondelettes isotropes rencontrant le domaine  $\bar{\Omega}$ .

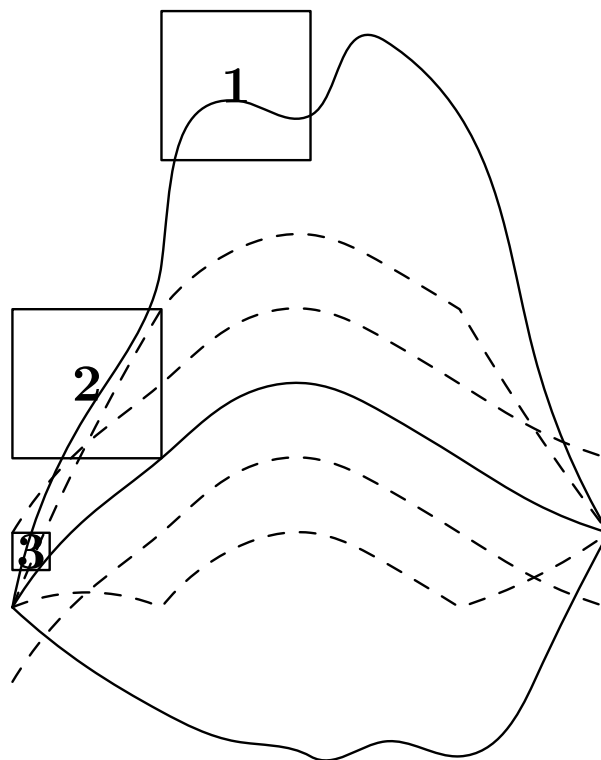


FIGURE 4.7 – Ondelettes isotropes

- 1** : Ondelettes isotropes ne rencontrant pas la singularité lissée : la décroissance provient de la régularité de  $f_s$  en dehors de la singularité. On utilise donc les propriétés d'approximation des ondelettes pour les fonctions régulières qui permettent d'assurer la bonne décroissance de l'erreur pour ces coefficients.
- 2** : Ondelettes isotropes rencontrant une singularité lissée avec  $2^j \geq s_0$  : ces ondelettes sont larges et sont donc en nombre borné.
- 3** : Ondelettes isotropes rencontrant une singularité lissée avec  $2^j < s_0$  : ces ondelettes sont traitées différemment selon leur position par rapport à l'échelle de lissage  $s$ . Lorsque l'échelle des ondelettes est plus grande que l'échelle de lissage,

on retrouve le comportement des ondelettes autour d'une singularité ponctuelle. Lorsque l'échelle des ondelettes est plus petite que l'échelle de lissage, on peut utiliser la régularité de la fonction de lissage pour obtenir une décroissance des coefficients d'ondelettes. Le contrôle sur le nombre de ces coefficients situés à proximité du contour permet d'obtenir la bonne décroissance.

La première étape consiste à ne conserver aucun coefficient en dessous de l'échelle  $\epsilon$ , l'erreur résiduelle  $E_\epsilon$  est de l'ordre de  $\epsilon$ . Cette coupure correspond à une approximation linéaire et permet d'éviter d'avoir à traiter le cas des échelles inférieures à  $\epsilon$  mais supérieures à  $s$  pour lesquelles la précision de la géométrie ne permet plus d'assurer un contrôle.

On définit alors  $\xi$  comme un multiple de  $\epsilon$ . Celui-ci permet la définition d'une échelle minimale d'indice

$$j_\star = \max(\log_2(\epsilon), \log_2(\xi), \log_2(s) + (\log_2(\xi) - \log_2(s))/(2\alpha)) \quad (4.47)$$

en dessous de laquelle on ne conserve également aucun coefficient. Cette échelle minimale correspond à l'échelle d'approximation linéaire permettant d'obtenir une erreur de l'ordre de  $\epsilon$ . L'erreur due à cette échelle minimale est notée  $E_0$ .

On définit alors pour chacune des catégories des échelles de coupure au dessus de cette échelle minimale. Celles-ci sont précisées dans l'annexe 4B.

On obtient alors les trois tableaux suivants qui donnent pour chacune des catégories de coefficients le nombre de coefficients conservés ainsi que l'erreur résultante due au coefficients abandonnés. Ces valeurs sont données à une constante multiplicative près qui ne dépend pas de la fonction. Les démonstrations correspondantes sont repoussées dans l'annexe 4B.

Le premier tableau correspond au cas du lissage large,  $s \geq s_0$ , où l'on utilise uniquement des ondelettes isotropes : les ondelettes de la catégorie 1 sont celles ne rencontrant pas de contour lissé et les ondelettes de la catégorie 2 celles rencontrant l'un des contours lissés.

$k$	$M_k$	$E_k$
		Échelle minimale
$\epsilon$	0	$(\ D^\alpha f\ _{\mathcal{C}}^2 + \sum l_{c_i} \ f\ _\infty^2) \epsilon$
0	0	$(\ D^\alpha f\ _{\mathcal{C}}^2 + \sum_i l_{c_i} \ f\ _\infty^2) \xi$
		Ondelettes isotropes
1	$\xi^{-1/\alpha}$	$\ D^\alpha f\ _{\mathcal{C}}^2 \xi$
2	$\sum_i l_{c_i} s_0^{-1} (1 + s_0^{1/\alpha} \xi^{-1/\alpha})$	$\sum_i l_{c_i} \ f\ _\infty^2 \xi$
3	$\emptyset$	
		Ondelettes déformées
4	$\emptyset$	
5	$\emptyset$	
6	$\emptyset$	
		Bandelettes intérieures
7	$\emptyset$	
8	$\emptyset$	
9	$\emptyset$	
10	$\emptyset$	
11	$\emptyset$	
		Bandelettes de bord
12	$\emptyset$	
13	$\emptyset$	
14	$\emptyset$	
15	$\emptyset$	
16	$\emptyset$	

Le deuxième tableau correspond au cas du lissage faible,  $s \leq \epsilon$ , où la fonction se comporte comme si elle n'était pas lissée. On utilise alors la famille orthonormée de bandelettes pour les domaines (ondelettes isotropes déformées, bandelettes intérieures et bandelettes de bord) et les ondelettes isotropes pour le fond.

$k$	$M_k$	$E_k$
		Échelle minimale
$\epsilon$	0	$\max_i(1, \ D^\alpha c_i\ ^{2\alpha})$ $\times (\ D^\alpha f\ _{\mathcal{C}}^2 + \sum_i l_{c_i} \ f\ _\infty^2) \epsilon$
0	0	$\max_i(1, \ D^\alpha c_i\ ^{2\alpha})$ $\times (\ D^\alpha f\ _{\mathcal{C}}^2 + \sum_i l_{c_i} \ f\ _\infty^2) \xi$
		Ondelettes isotropes
1	$\xi^{-1/\alpha}$	$\ D^\alpha f\ _{\mathcal{C}}^2 \xi$
2	$\sum_i l_{c_i} s_0^{-1}$	0
3	$\#(I) \min( \log_2(\xi) /2,  \log_2(s)  + s^{1/\alpha} \xi^{-1/(2\alpha)})$	$\#(I) \ f\ _\infty^2 \xi$
		Ondelettes déformées
4	$\sum_i l_{c_i} \xi^{-1/(2\alpha+1)}$	$\sum_i l_{c_i} \max_i(1, \ D^\alpha c_i\ ^{2\alpha}) \ D^\alpha f\ _{\mathcal{C}}^2 \xi$
5	$\#(I) \min( \log_2(\xi) /2,  \log_2(\epsilon) , \xi^{-1/(2\alpha+1)})$	$\#(I) \max_i(1, \ D^\alpha c_i\ ^{2\alpha}) \ f\ _\infty^2 \xi$
6	$\sum_i l_{c_i} s_0^{-1}$	0
		Bandelettes intérieures
7	$\sum_i l_{c_i} \xi^{-1/\alpha}$	$l \max_i(1, \ D^\alpha c_i\ ^{2\alpha+2}) \ D^\alpha f\ _{\mathcal{C}}^2 \xi$
8	$\sum_i l_{c_i} \xi^{-1/(2\alpha)} \epsilon^{-1/(2\alpha)}$	$\sum_i l_{c_i} \max_i(1, \ D^\alpha c_i\ ^{2\alpha+2}) \ f\ _\infty^2 \xi$
9	$\begin{cases} 0 & \text{si } s \leq \xi \\ \#(I) \xi^{-1/(2\alpha)} & \text{sinon} \end{cases}$	0
10	$\emptyset$	
11	$\emptyset$	
		Bandelettes de bord
12	$\sum_i l_{c_i} \xi^{-1/\alpha}$	$\sum_i l_{c_i} \max_i(1, \ D^\alpha c_i\ ^{2\alpha+2}) \ D^\alpha f\ _{\mathcal{C}}^2 \xi$
13	$\#(I) ( \log_2(\max(\epsilon, \xi)) )^2$	0
14	$\sum_i l_{c_i} \xi^{-1/(2(\alpha-1))}$	$\sum_i l_{c_i} \max_i(1, \ D^\alpha c_i\ ^{2\alpha+2}) \ D^\alpha f\ _{\mathcal{C}}^2 \xi$
15	$\begin{cases} 0 & \text{si } \xi \geq s^2 \\ \sum_i l_{c_i} \xi^{-1/\alpha} & \text{si } \xi \leq s^2 \end{cases}$	$\sum_i l_{c_i} \max_i(1, \ D^\alpha c_i\ ^{2\alpha+2}) \ D^\alpha f\ _{\mathcal{C}}^2 \xi$
16	$\#(I)  \log_2(\max(\xi, \epsilon)) ^2$	0

Le troisième et dernier tableau correspond au cas du lissage intermédiaire,  $s_0 \geq s \geq \epsilon$ , où l'on utilise les propriétés du noyau de lissage. Pour représenter la fonction sur le domaine, on utilise la famille orthonormée de bandelettes (ondelettes isotropes déformées, bandelettes intérieures et bandelettes de bord) pour les domaines et les ondelettes isotropes pour le fond.

$k$	$M_k$	$E_k$
	Échelle minimale	
$\epsilon$	0	$\max_i(1, \ D^\alpha c_i\ ^{2\alpha})$ $\times (\ D^\alpha f\ _{\mathcal{C}}^2 + \ f\ _\infty^2) \epsilon$
0	0	$\max_i(1, \ D^\alpha c_i\ ^{2\alpha})$ $\times (\ D^\alpha f\ _{\mathcal{C}}^2 + \ f\ _\infty^2) \xi$
	Ondelettes isotropes	
1	$\xi^{-1/\alpha}$	$\ D^\alpha f\ _{\mathcal{C}}^2 \xi$
2	$\sum_i l_{c_i} s_0^{-1}$	0
3	$\#(I) \min( \log_2(\xi) /2,  \log_2(s)  + s^{1/\alpha} \xi^{-1/(2\alpha)})$	$\#(I) \ f\ _\infty^2 \xi$
	Ondelettes déformées	
4	$\sum_i l_{c_i} \xi^{-1/(2\alpha+1)}$	$\sum_i l_{c_i} \max_i(1, \ D^\alpha c_i\ ^{2\alpha}) \ D^\alpha f\ _{\mathcal{C}}^2 \xi$
5	$\#(I) \min( \log_2(\xi) /2,  \log_2(\epsilon) , \xi^{-1/(2\alpha+1)})$	$\#(I) \max_i(1, \ D^\alpha c_i\ ^{2\alpha}) \ f\ _\infty^2 \xi$
6	$l s_0^{-1}$	0
	Bandelettes intérieures	
7	$\sum_i l_{c_i} \xi^{-1/\alpha}$	$\sum_i l_{c_i} \max_i(1, \ D^\alpha c_i\ ^{2\alpha+2}) \ D^\alpha f\ _{\mathcal{C}}^2 \xi$
8	$\sum_i l_{c_i} \xi^{-1/(2\alpha)} \epsilon^{-1/(2\alpha)}$	$\sum_i l_{c_i} \max_i(1, \ D^\alpha c_i\ ^{2\alpha+2}) \ f\ _\infty^2 \xi$
9	$\begin{cases} 0 & \text{si } s \leq \xi \\ \#(I) \xi^{-1/(2\alpha)} & \text{sinon} \end{cases}$	0
10	$\sum_i l_{c_i} \xi^{-1/\alpha}$	$\sum_i l_{c_i} \max_i(1, \ D^\alpha c_i\ ^{2\alpha+2}) \ D^\alpha f\ _{\mathcal{C}}^2 \xi$
11	$\begin{cases} \#(I) \xi^{-1/\alpha} & \text{si } s \leq \xi \\ \#(I) (\xi^{-1/(2\alpha)} +  \log_2(\epsilon) ) & \text{sinon} \end{cases}$	$\max_i(1, \ D^\alpha c_i\ ^{2\alpha+2}) \ f\ _\infty^2 \xi$
	Bandelettes de bord	
12	$\sum_i l_{c_i} \xi^{-1/\alpha}$	$\sum_i l_{c_i} \max_i(1, \ D^\alpha c_i\ ^{2\alpha+2}) \ D^\alpha f\ _{\mathcal{C}}^2 \xi$
13	$\begin{cases} \#(I) ( \log_2(\max(\xi)) )^2 & \text{si } \xi \geq s \\ \#(I) (( \log_2(\max(\epsilon)) )^2 + \xi^{-1/\alpha}) & \text{sinon} \end{cases}$	0
14	$\sum_i l_{c_i} \xi^{-1/(2(\alpha-1))}$	$\sum_i l_{c_i} \max_i(1, \ D^\alpha c_i\ ^{2\alpha+2}) \ D^\alpha f\ _{\mathcal{C}}^2 \xi$
15	$\begin{cases} 0 & \text{si } \xi \geq s^2 \\ \sum_i l_{c_i} \xi^{-1/\alpha} & \text{si } \xi \leq s^2 \end{cases}$	$\sum_i l_{c_i} \max_i(1, \ D^\alpha c_i\ ^{2\alpha+2}) \ D^\alpha f\ _{\mathcal{C}}^2 \xi$
16	$\begin{cases} \#(I)  \log_2(\xi) ^2 & \text{si } \xi \geq s \\ \#(I) \xi^{-1/\alpha} & \text{sinon} \end{cases}$	0

Ces tableaux permettent alors de conclure en choisissant  $\xi$

$$\xi \simeq K \frac{\epsilon}{\#(I) \max_i(1, \|D^\alpha c_i\|^{2\alpha+2}) \|D^\alpha f\|_{\mathcal{C}}^2}. \quad (4.48)$$

de sorte que la somme des erreurs autres que  $E_\epsilon$ , celle provenant du seuillage à l'échelle  $\epsilon$ , soit inférieure à  $\epsilon$ .

On obtient en effet en utilisant  $l_{c_i} \leq 1$

– dans le premier cas, celui du lissage large,

$$\sum_k M_k \leq K(\epsilon^{-1/\alpha} + \#(I) s_0^{-1}(1 + s_0^{1/\alpha} \epsilon^{-1/\alpha})) \quad (4.49)$$

et

$$\sum_k E_k \leq (1 + K \|D^\alpha f\|_{\mathcal{C}}^2 + \#(I) \|f\|_\infty^2) \epsilon, \quad (4.50)$$

– dans le deuxième cas, celui du lissage faible,

$$\sum_k M_k \leq K(1 + \#(I))(\epsilon^{-1/\alpha} + s_0^{-1}) \quad (4.51)$$

et

$$\sum_k E_k \leq (1 + K \max_i(1, \|D^\alpha c_i\|^{2\alpha}) \#(I) (\|D^\alpha f\|_{\mathcal{C}}^2 + \|f\|_\infty^2)) \epsilon, \quad (4.52)$$

– et enfin dans le dernier cas, celui du lissage intermédiaire,

$$\sum_k M_k \leq K(1 + \#(I))(\epsilon^{-1/\alpha} + s_0^{-1}) \quad (4.53)$$

et

$$\sum_k E_k \leq (1 + K \max_i(1, \|D^\alpha c_i\|^{2\alpha}) \#(I) (\|D^\alpha f\|_{\mathcal{C}}^2 + \|f\|_\infty^2)) \epsilon. \quad (4.54)$$

À ces nombres de coefficients dans le frame de bandelettes, il faut ajouter les  $M_G$  coefficients provenant de la géométrie. Le lemme 4.4 nous indique alors que

$$M_G \leq \sum_i l_{c_i} \eta^{-1/\alpha} \quad (4.55)$$

et donc

$$M_G \leq \sum_i l_{c_i} \epsilon^{-1/\alpha}. \quad (4.56)$$

On a alors montré l'existence d'une approximation répondant au théorème. Il faut alors démontrer qu'on peut effectivement en obtenir une au moins aussi performante de manière pratique. En effet, la construction précédente suppose connu la régularité de la géométrie via l'échelle de coupure et spécifie pour chaque catégorie de coefficients ceux qu'il faut conserver. Ces catégories ne sont pas connues en pratique et donc cette construction n'est pas directement applicable.

Afin de résoudre ce problème, on adopte la stratégie suivante : on teste les différentes approximations de la géométrie en faisant varier les échelles de coupure d'indice  $j_0$

$$j_0 \in [0, \log_2(\epsilon)] \quad (4.57)$$



et pour chacune de ces géométries, on détermine le nombre  $M_B$  de coefficients nécessaires pour obtenir une erreur inférieure à la somme de l'erreur  $E_\epsilon$ , celle en dessous de l'échelle  $\epsilon$ , et de  $\epsilon$  en gardant les plus grands coefficients ainsi que le nombre  $M_G$  de coefficients utilisés pour la géométrie.

On conserve alors l'approximation utilisant le moins de coefficients. L'échelle d'indice  $j_0 = \log_2(\eta)/\alpha$  ayant été testée, on est assuré que le nombre de coefficients de l'approximation conservé satisfait les conditions du théorème. Il reste encore à vérifier que c'est également le cas pour l'erreur.

Pour cela, on vérifie que l'erreur  $E_\epsilon$  est au plus de l'ordre de  $\epsilon$  quelle que soit l'approximation de la géométrie choisie. Ceci nécessite l'hypothèse de différentiabilité bornée de la paramétrisation de la géométrie détectée. En effet cette hypothèse permet d'obtenir le lemme suivant dont la démonstration est repoussée à la section 4B.3.2.

**Lemme 4.5.** *Quelle que soit l'échelle d'approximation choisie pour la géométrie, si la dérivée de la paramétrisation de la géométrie estimée est bornée, l'erreur d'approximation  $E_\epsilon$  de la fonction  $f_s$  faite en éliminant les coefficients en dessous de l'échelle  $\epsilon$  dans le frame de bandelettes satisfait*

$$E_\epsilon \leq K(1 + \#(I)) \sum_j l_{c_j} \max(1, \|D^1 g_i\|) (\|D^1 f\|_{\mathcal{C}}^2 + \|f\|_\infty^2) \epsilon. \quad (4.58)$$

On a donc construit une approximation dont l'erreur sur les coefficients satisfait les conditions du théorème. On conclut en utilisant le fait que les bandelettes forment un frame et que l'erreur sur les coefficients se retrouve sur l'erreur de reconstruction.  $\square$

## 4.3 Détection dans le cas des fonctions étoilées

Les démonstrations précédentes supposent que l'on est capable d'obtenir une détection précise à  $\eta$  près. On présente ici une classe de fonctions, la classe des fonctions étoilées, pour laquelle on peut démontrer que détection est possible avec des techniques simples.

### 4.3.1 Fonctions étoilées

La classe des fonctions étoilées d'ordre  $\alpha$  est une classe de fonctions telles que, en dehors d'une unique courbe fermée dont la dérivée d'ordre  $\alpha$  de la paramétrisation normale est bornée, les dérivées partielles d'ordre  $\alpha$  sont bornées. Cette courbe ne présente en particulier pas de coins et ceci va permettre d'obtenir des résultats théoriques pour l'algorithme de détection.

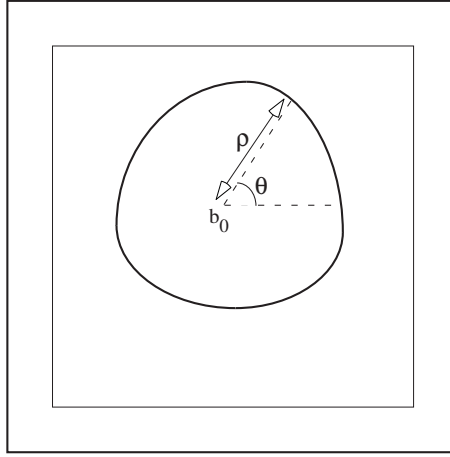


FIGURE 4.8 – Ensemble étoilé :  $b_0$  est point central, le contour est paramétré par  $\rho(\theta)$ .

Donoho [CD99a, Don98, Don99] définit les ensembles étoilés d'ordre  $\alpha$  comme les ensembles  $\Omega$  inclus dans  $[0, 1]^2$  tels qu'il existe un point  $b_0$  et une paramétrisation polaire  $\rho(\theta)$  issue de ce point de la frontière  $\partial\Omega$  satisfaisant

$$\Omega \subset \left[\frac{1}{10}, \frac{9}{10}\right]^2, \quad (4.59)$$

$$\frac{1}{10} \leq \rho(\theta) \leq \frac{1}{2}, \quad (4.60)$$

$$\rho^{(\alpha)} \text{ est bornée.} \quad (4.61)$$

Les fonctions étoilées d'ordre  $\alpha$  sont alors définies comme les fonctions telles que, en dehors d'un ensemble étoilé d'ordre  $\alpha$ , ses dérivées partielles d'ordre  $\alpha$  sont bornées.

Cette classe de fonctions simples est intéressante car Donoho [Don98] montre que la décroissance de l'erreur d'approximation de ces fonctions dans le cadre des décompositions atomiques satisfait au mieux

$$\|f - f_M\|_2^2 \leq KM^{-\alpha}. \quad (4.62)$$

Le résultat de l'approximation en bandelettes est donc en un sens optimal.

On suppose de plus que le long de cette courbe la discontinuité correspond à un saut de hauteur minimale d'une certaine dérivée. Ceci permet de définir un algorithme d'estimation de la géométrie pour les fonctions de cette classe lissée par un noyau de lissage auquel on impose d'être à support dans  $[-1, 1]^2$  et strictement positif sur  $[-1/2, 1/2]^2$ .

On peut alors énoncer le théorème suivant :

**Théorème 4.3.** *Si  $f$  est une fonction étoilée d'ordre  $\alpha$  et si le saut le long de la discontinuité reste majoré par  $\lambda > 0$ , il existe deux constantes  $K_1$  et  $K_2$  ne dépendant que de la fonction  $f$ , du noyau de lissage  $h$  et de l'ondelette  $\psi$  telle que pour tout  $\epsilon$ , on peut déterminer une détection à  $\eta = \inf(\epsilon, s)$  près de la géométrie qui est uniformément dérivable et on peut construire une approximation  $f_{s,\epsilon}$  de  $f_s$  à l'aide de  $M_{s,\epsilon}$  coefficients au total pour la géométrie et le frame de bandelettes où*

$$M_{s,\epsilon} \leq K_1 \epsilon^{-1/\alpha} \quad (4.63)$$

et

$$\|f_s - f_{s,\epsilon}\|_2^2 \leq K_2 \epsilon \quad (4.64)$$

soit

$$\|f_s - f_{s,\epsilon}\|_2^2 \leq K_1^\alpha K_2 M_{s,\epsilon}^{-\alpha} \quad (4.65)$$

où les constantes  $K_1$  et  $K_2$  ne dépendent que de la fonction  $f$ , du noyau de lissage  $h$  et des ondelettes utilisées.

*Démonstration.* Les fonctions étoilées satisfont les conditions du théorème 4.2. Il ne reste donc plus qu'à vérifier que l'on peut obtenir une détection de la géométrie à  $\eta$  près qui est uniformément dérivable, ce qui est fait dans la section suivante.  $\square$

### 4.3.2 Détection

Dans le cas des fonctions étoilées, l'absence de coins permet d'obtenir des résultats théoriques sur un algorithme de détection. Celui-ci est basé sur le calcul du gradient de version lissée de l'image comme dans l'implémentation de la détection du chapitre précédent mais les procédures de chaînage et d'intégration du flot sont différentes de celles décrites dans la section 3.2 dans un cadre discret.

L'algorithme utilisé est le suivant :

1. On calcule le gradient de l'image  $h_\epsilon \star f_s$ .
2. On détermine les maxima locaux sur un voisinage de taille  $d$  sur les lignes verticales (respectivement horizontales) où la norme du gradient est plus grande que  $T$ , où  $T$  est choisi en fonction de la majoration de  $\nabla f$  sur sa partie régulière.
3. On élimine les maxima verticaux (respectivement horizontaux) où le gradient est trop vertical (respectivement trop horizontal) : l'angle de celui-ci avec la verticale (respectivement l'horizontale) est inférieur à  $\pi/12$ .
4. A chacun de ces maxima verticaux, on associe le segment vertical contenant le maximum et de largeur minimale contenant tous les points à une distance inférieure à  $d$  du maxima où le gradient est de norme supérieure à  $T$ .

5. On chaîne alors ces maxima horizontaux en construisant des régions horizontales (respectivement verticales) disjointes.
6. Sur chacune de ces régions, on intègre le flot (la direction orthogonale au gradient du maxima) pour obtenir des courbes restant dans ces régions.

Il nous faut maintenant décrire plus précisément les procédures de chaînage et d'intégration du flot pour montrer qu'elles permettent une détection à  $\eta = \max(\epsilon, s)$  près de la géométrie de la fonction.

#### 4.3.2.1 Chaînage des maxima et construction des régions

On décrit ici cette procédure en détail et on montre qu'elle permet un contrôle sur le nombre des régions ainsi que sur leur largeur.

L'idée centrale de cette procédure est de chaîner les maxima verticaux (respectivement horizontaux) selon la direction horizontale (respectivement verticale) et de leur associer une région dont la largeur correspond à la zone où le gradient reste au dessus de  $T$  au voisinage du maximum. La difficulté de la construction vient du fait que l'on veut obtenir des zones disjointes alors que les maxima horizontaux ou verticaux ont été traités jusque ici indépendamment.

On utilise alors l'algorithme de chaînage suivant :

1. On marque comme strictement horizontaux (respectivement verticaux) les segments verticaux (respectivement horizontaux) où le gradient du maximum est très horizontal (respectivement très vertical) : l'angle de celui-ci avec l'horizontale (respectivement la verticale) est inférieur à  $\pi/12$ .
2. On part du segment strictement orienté de plus haute énergie et on lui associe la région composé de toute la composante connexe de segments de la même orientation dans lesquelles l'orientation du maximum ne franchit pas  $\pi/4$ .
3. Tous les segments rencontrant cette région sont alors éliminés.
4. Si il reste un segment orienté, on retourne à l'étape 2.
5. On reprend alors les zones précédentes dans le même ordre, en rajoutant pour chacune l'éventuelle composante connexe de segments dans laquelle l'orientation franchit  $\pi/4$  une fois de plus dans chaque direction, on élimine les segments rencontrant cette région pour chaque région.
6. Tant qu'il reste des segments. on retourne à l'étape 5.

**Lemme 4.6.** *Les zones ainsi obtenues sont en nombre fini et leur largeur est majorée par  $K\eta$ . Le contour  $\mathcal{C}$  est entièrement recouverte sauf éventuellement aux jonctions entres les domaines et la zone non recouverte est au plus de longueur  $K\eta$ .*

*Démonstration.* On commence par montrer que la largeur de chaque segment est bien majorée par  $K\eta$ . Pour cela on utilise les lemmes 3B.1 et 3B.2 démontrés pour l'estimation de la géométrie et on suppose que  $\eta$  est suffisamment petit pour que la direction du gradient en un maximum satisfasse

$$|\tan(\text{angle}(\nabla(g_\epsilon \star f_s)(x), \mathbf{n}_{\mathcal{C}}(x')))| \leq \tan(\pi/24). \quad (4.66)$$

Pour tout segment vertical, le maximum est un point de haute énergie situé à une distance inférieure à  $K\eta$  de la courbe  $\mathcal{C}$  et dont le gradient fait un angle supérieur à  $\pi/12$

avec l'horizontale. La tangente au point le plus proche de la courbe fait donc un angle supérieur à  $\pi/24$  avec la verticale. Il en résulte que dès que l'on se déplace verticalement à partir du maximum de  $K \frac{4}{\tan(\pi/24)} \eta$ , la distance à ce morceau de la courbe devient plus grande que  $K\eta$ . Or les extrémités du segment sont à une distance inférieure à  $d$  du maximum et sont donc proche de ce morceau de la courbe. On en déduit que la largeur des segments est bien bornée par  $K \frac{4}{\tan(\pi/24)} \eta$ .

On montre ensuite que les zones obtenues comprennent une longueur minimale de la courbe  $\mathcal{C}$ . Celle-ci étant de longueur finie, on en conclut que ces zones sont en nombre fini.

Chaque région a été définie à partir d'un segment strictement orienté. Supposons que cette région soit horizontale, il existe un segment dont le gradient au maximum fait un angle inférieur à  $\pi/12$  avec la verticale. Il existe donc un point de la courbe à distance inférieure à  $\eta$  où la tangente fait un angle inférieur à  $3\pi/24$  avec l'horizontale. Par continuité, cet angle reste inférieur à  $5\pi/24$  sur une longueur minimale  $l_{\min}$ . Si  $\eta$  est suffisamment petit, cela implique que le segment horizontal correspondant à cette tangente est dans la même zone que le segment de départ et que cette zone comprend cette longueur minimale  $l_{\min}$  de la courbe.

Il reste à montrer que les morceaux de la courbe  $\mathcal{C}$  non recouverts par des régions sont en nombre fini et sont de taille de l'ordre de  $\eta$ .

Tout point de la courbe est au départ recouvert par un segment horizontal ou vertical. Les segments éliminés le sont parce qu'ils intersectent un segment dans l'autre direction qui est conservé : ils sont donc en contact avec un segment dans l'autre direction de longueur au plus  $K\eta$ . Un point de la courbe qui n'est pas couvert est donc à une distance inférieure à  $K\eta$  d'une région verticale et à une distance inférieure à  $K\eta$  d'une région horizontale. Le nombre de ces régions étant fini, on a bien le résultat souhaité.  $\square$

#### 4.3.2.2 Intégration du flot

On présente ici la construction des courbes du théorème à l'aide des régions et du flot (la direction orthogonale au gradient) des maxima et on montre qu'elle permet une détection précise à  $K\eta$  près.

La méthode pour les obtenir à partir d'une région horizontale est la suivante :

1. Le long de chaque ligne horizontale on définit le flot comme la direction orthogonale au gradient du maximum de la ligne dans la région.
2. En commençant par la ligne où le maximum est de plus forte énergie, on intègre le flot dans les deux directions tant que l'intervalle des décalages possibles pour que la courbe ne sorte pas de la zone dans la direction verticale est non vide.
3. On choisit alors comme courbe  $\mathcal{C}_i$  un de ces représentants possibles.
4. Tant que la région n'est pas couverte, on reprend à l'étape 2.

**Lemme 4.7.** *L'erreur entre la position des courbes obtenues et les vraies courbes est bornée par  $K\eta$ , la dérivée de la paramétrisation horizontale ou verticale des courbes obtenues est bornée ainsi que la dérivée de la paramétrisation des vraies courbes. Elles sont de plus en nombre fini.*

*Démonstration.* Il suffit de montrer ce résultat pour chaque zone pour obtenir le résultat pour l'ensemble de celles-ci.

La construction des courbes intégrales à l'intérieur des zones assure que la précision sur la position est bien bornée par  $K\eta$  et que la dérivée de leur paramétrisation est bornée,

puisque leur tangente est contrôlée, il ne reste donc plus qu'à vérifier les deux dernières propriétés.

Pour ceci, on rappelle que l'erreur sur la direction du gradient pour un maximum est bornée par

$$|\tan(\text{angle}(\nabla(g_\eta \star f_s)(x), \mathbf{n}_C(x')))| \leq K\eta. \quad (4.67)$$

comme on l'a vérifié dans la section 3B.2 de l'annexe 3B.

On en déduit alors que la dérivée de la paramétrisation des vraies courbes est bornée puisque la tangente est sous contrôle.

On montre maintenant que ces courbes ont une longueur minimale, ce qui assure qu'elles seront en nombre fini.

Si on intègre le flot sur une distance horizontale de  $l$ , l'erreur verticale par rapport au vrai flot est bornée par  $K\eta l$  du fait de la borne obtenue en (4.67). On sait de plus que les zones ont une largeur supérieure à  $K\eta$ , ce qui implique que les courbes ont bien une longueur minimale.  $\square$

On en déduit alors immédiatement que

**Corollaire 4.8.** *La détection ainsi obtenue est précise à  $K \max(\epsilon, s)$  près et les dérivées sont bornées.*

---

## Annexe 4A

### Démonstrations : Géométrie des domaines

---

4A.1 Grass-fire et domaines . . . . .	144
4A.2 Lemmes de géométrie . . . . .	149

L'objectif de cette annexe est la démonstration du lemme suivant :

**Lemme 4.1.** *Si la détection de la géométrie d'une fonction du modèle est précise à  $\eta$  près alors les domaines obtenus par le grass-fire sont à la fois confinés à  $\eta$  près et isolés à  $\eta$  près.*

Ce lemme joue un rôle important dans les théorèmes d'approximations puisque c'est lui qui assure que l'on obtient des domaines confinés et isolés à l'aide du grass-fire de la section 4.1.2 initialisé par les courbes. La démonstration de ce lemme est longue. Elle utilise de manière intensive les conditions sur la géométrie imposées par le modèle : régularité des contours, contrôle des angles de jonctions et contrôle des tangentes.

On note toujours  $K$  les constantes apparaissant dans les différentes estimations. Par souci de simplicité, on se permet de faire varier la constante  $K$  d'une ligne à l'autre tant que cette variation n'est pas essentielle.

## 4A.1 Grass-fire et domaines

Pour démontrer le lemme 4.1, on va en fait démontrer le lemme plus fort suivant :

**Lemme 4A.1.** *Si la vraie géométrie peut se décrire avec un nombre fini de courbes  $C_i$  dont les dérivées secondes des paramétrisations normales sont bornées et dont les paramétrisations  $c_i$ , soit verticales soit horizontales, sont telles que  $\|c'_i\|_\infty \leq M$ , si leurs jonctions se font avec des angles plus grands que  $\theta_0$  et telles que sauf aux jonctions les courbes restent à une distance non nulle les unes des autres et si la détection est précise à  $\eta$  près alors le grass-fire permet d'obtenir des domaines satisfaisant les propriétés suivantes :*

*Il existe  $s_0, d_0, K$  et  $C$  tels que si  $\eta \leq s_0$  alors les domaines obtenus à partir du grass-fire sur la géométrie estimée restent proches de ceux obtenus par le grass-fire sur la vraie géométrie*

*Pour un domaine correspondant à une zone horizontale, on a la propriété suivante où  $x_0$  est la coordonnée d'une jonction :*

- *Si  $|x_1 - x_0| \leq K\eta$ , la distance entre  $(x, c(x))$  et la frontière du domaine est borné par  $K\eta$ .*
- *Dès que  $K\eta \leq |x_1 - x_0| \leq d_0$ , la distance entre  $(x, c(x))$  et la frontière reste supérieure à  $C(x_1 - x_0)$ .*
- *Sinon la distance entre la frontière et la courbe reste supérieure à  $Cd_0$ .*

*De plus dès que la distance à la courbe estimée la plus proche est supérieure à  $3\eta$ , la distance à la vraie courbe la plus proche est supérieure à  $\eta$ .*

*Démonstration.* L'idée de la démonstration est de montrer que l'on a un résultat similaire si le grass-fire est initialisé par les vraies courbes et que le résultat de ce grass-fire n'est pas très différent du résultat obtenu à partir des courbes détectées.

**Lemme 4A.2.** *Si la vraie géométrie peut se décrire avec un nombre fini de courbes  $C_i$  dont les dérivées secondes des paramétrisations normales sont bornées et dont les paramétrisations  $c_i$ , soit verticales soit horizontales, sont telles que  $\|c'_i\|_\infty \leq M$ , si leurs jonctions se font avec des angles plus grands que  $\theta_0$  et telles que sauf aux jonctions les courbes restent à une distance non nulle les unes des autres et si la détection est précise à  $\eta$  près alors le grass-fire permet d'obtenir des domaines tels que il existe  $d_0$  et  $d'_0 \leq d_0$  satisfaisant les conditions suivantes*



- Le domaine  $\Omega_i$  associé à la courbe  $\mathcal{C}_i$  par le grass-fire contient le cône de demi angle  $\theta_0/4$  autour de la tangente tant que la distance à la jonction est inférieure à  $d_0$ .
- Un point du cône à une distance  $\lambda \leq d_0$  du coin est à une distance supérieure à  $\sin(\theta_0/8)\lambda$  de la courbe  $\mathcal{C}_i$ .
- Pour tout point de la frontière du domaine, si la distance dans la direction de la tangente est plus grande que  $d_0 \sin(\theta_0/4)$  alors la distance à la courbe  $\mathcal{C}_i$  est plus grande que  $\sin(\theta_0/8) \sin(\theta_0/4) d_0$ .
- Pour chaque courbe  $c_i$  horizontale, la distance verticale entre  $(x_1, c_i(x_1))$  et le bord du domaine reste plus grande que  $\sin(\theta_0/8) / \cos(\arctan(M) + \theta_0/4)(x - x_0)$  si  $|x_1 - x_0| \leq d'_0$  et cette distance est supérieure à  $\sin(\theta_0/8) / \cos(\arctan(M) + \theta_0/4) d'_0$  sinon.

*Démonstration.* Pour démontrer ce lemme, on utilise trois lemmes sur la géométrie dont les démonstrations sont repoussées dans la section 4A.2.

Le premier lemme montre que si  $\mathcal{C}$  est une courbe dont la dérivée d'ordre  $\alpha$  de la paramétrisation normale sont bornées alors il en est de même pour les dérivées des paramétrisations horizontales ou verticales sous certaines conditions sur la dérivée première de celles-ci.

**Lemme 4A.3.** *Si  $\mathcal{C}$  est une courbe dont la paramétrisation normale  $C(s) = (x_1(s), x_2(s))$  satisfait*

$$\forall s, \forall \beta \leq \alpha, \quad |C^{(\beta)}(s)| \leq M \quad (4A.1)$$

*et si  $x'_1(s_0) \geq m$ , alors  $\mathcal{C}$  peut être paramétrée horizontalement tant que  $x'_1(s) \neq 0$  par  $c(x_1)$  et les dérivées de  $c$  sont bornées par*

$$\forall \beta \leq \alpha, \quad |c^{(\beta)}(x)| \leq K(\beta, m, M) \quad (4A.2)$$

*tant que  $x'_1(s) \geq m$ .*

Il permet d'assurer l'existence d'une distance  $d$  telle que si on reste à une distance inférieure à  $d$  de la jonction, les courbes peuvent être paramétrées dans la direction de tangente avec une borne sur la dérivée seconde

Le second lemme précise la position d'une courbe  $\mathcal{C}$  avec sa tangente et une demi-droite issue du même point.

**Lemme 4A.4.** *Si  $\mathcal{C}$  est une courbe paramétrée horizontalement par  $c(x_1)$  au voisinage de  $x_0$  telle que*

$$c''(x'_1) \leq K, \quad \forall x_0 \leq x'_1 \leq x_1 \quad (4A.3)$$

*alors*

$$c(x_1) \leq c(x_0) + c'(x_0)(x_1 - x_0) + (K/2)(x_1 - x_0)^2. \quad (4A.4)$$

*Si  $a > c'(x_0)$  alors la demi-droite  $\mathcal{D}$  définie par  $c(x_0) + a(x_1 - x_0)$  reste au dessus de  $\mathcal{C}$  tant que  $x_0 \leq x_1 \leq x_0 + 2 \frac{a - c'(x_0)}{K}$ .*

*De plus pour tout  $b \in (0, a - c'(x_0))$  tant que  $x_0 \leq x_1 \leq x_0 + 2 \frac{a - c'(x_0) - b}{K}$*

$$c(x_0) + a(x_1 - x_0) - c(x) \geq b(x_1 - x_0) \quad (4A.5)$$

et

$$d((x_1, c(x_1)), \mathcal{D}) \geq \cos(\arctan(a))b(x_1 - x_0) . \quad (4A.6)$$

Finalemment tant que  $x_0 \leq x_1 \leq x_0 + \frac{b}{1 - \sin(\arctan(a)) \cos(\arctan(a))b}$

$$d(\mathcal{C}, \mathcal{D}(x_1)) \geq \frac{\cos(\arctan(a))b}{1 - \sin(\arctan(a)) \cos(\arctan(a))b}(x_1 - x_0) . \quad (4A.7)$$

On définit alors en un point de jonction entre les courbes  $\mathcal{C}_i$  et  $\mathcal{C}_j$ , la demi-droite  $\Gamma_i$  dont l'angle avec la tangente à  $\mathcal{C}_i$  au point de jonction est de  $\theta_0/4$  et l'angle avec la tangente à  $\mathcal{C}_j$  au point de jonction est minimal (supérieur à  $3\theta_0/4$ ). Lorsqu'on applique le lemme précédent à  $\mathcal{C}_i$  avec  $a = \tan(\theta_0/4)$ ,  $c'(x_0) = 0$  et  $b = \sin(\theta_0/8)$ , il donne une distance  $d' \leq d$  telle que la distance de la courbe  $\mathcal{C}_i$  au  $\Gamma_i$  correspondant satisfait les hypothèses du lemme.

Le dernier lemme précise la position relative de deux courbes au voisinage de leur point de jonction.

**Lemme 4A.5.** *Si  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_2$  sont deux courbes dont les dérivées secondes des paramétrisations normales sont bornées telles qu'elles se rencontrent avec un angle supérieur à  $\theta_0$  avec des tangentes respectives  $\mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{D}_2$  alors il existe une distance  $d_1$  telle que si  $\Gamma$  est une demi-droite dont l'angle avec  $\mathcal{D}_1$  est  $\theta_0/4$  et l'angle avec  $\mathcal{D}_2$  est minimal (supérieur à  $3\theta_0/4$ ) alors*

$$\forall x \in \Gamma, d(x, c_0) \leq d_1 \implies d(x, \mathcal{C}_1) \leq \frac{\sin(\theta_0/2) + \sin(\theta_0/4)}{2 \sin(\theta_0/2)} d(x, \mathcal{C}_2) \quad (4A.8)$$

où

$$\frac{\sin(\theta_0/2) + \sin(\theta_0/4)}{2 \sin(\theta_0/2)} < 1 . \quad (4A.9)$$

Il permet d'assurer que les demi-droites  $\Gamma_i$  sont dans les ensemble  $\Omega_i$  correspondant. Les deux premières conditions du lemme sont donc satisfaites.

La troisième condition est satisfaite si si l'on choisit  $d_0$  suffisamment petit : soit  $\epsilon$  la distance minimale entre deux courbes à une distance supérieure à  $d'$  des jonctions, la distance entre la frontière et la courbe sera plus grande que  $\epsilon/2$  dès qu'on s'éloigne de la jonction. On choisit donc  $d_0 \leq d'$  tel que  $\sin(\theta_0/8) \sin(\theta_0/4) d_0 \leq \epsilon/2$  pour obtenir le résultat voulu.

En notant  $\lambda(x)$  la distance de la jonction au point d'abscisse  $x$  le long de la droite  $\Gamma_i$ , on vérifie que

$$\lambda(x) \leq (x - x_0) / \cos(\arctan(M) + \theta_0/4) . \quad (4A.10)$$

On utilise alors le fait que  $\arctan(M) + \theta_0/4 < \pi/2$  pour conclure. En effet en se plaçant le long de la tangente et en utilisant la minoration précédente, on obtient

$$d(\Gamma(x), c) \geq \sin(\theta_0/8) \lambda(x) \quad (4A.11)$$

$$\geq \sin(\theta_0/8) \frac{x - x_0}{\cos(\arctan(M) + \theta_0/4)} \quad (4A.12)$$

$$d(\Gamma(x), c) \geq \frac{\sin(\theta_0/8)}{\cos(\arctan(M) + \theta_0/4)} (x - x_0) \quad (4A.13)$$

tant que  $\lambda(x) \leq d_0$  ou  $(x - x_0) \leq d_0 \times \cos(\arctan(M) + \theta_0/4)$ . Ceci donne

$$d(\Gamma(x), c(x)) \geq \frac{\sin(\theta_0/8)}{\cos(\arctan(M) + \theta_0/4)} (x - x_0) \quad (4A.14)$$

tant que  $(x - x_0) \leq d_0 \cos(\arctan(M) + \theta_0/4)$  d'où  $d'_0 = d_0 \cos(\arctan(M) + \theta_0/4)$ .  $\square$

On vérifie que ceci signifie que les domaines obtenus par le grass-fire initialisé par les vraies courbes sont bien confinés. Par inégalité triangulaire, on obtient le fait que ces domaines sont également bien isolés.

On suppose dorénavant que la précision sur la géométrie  $\eta$  est telle que la distance  $\sin(\theta_0/8) \sin(\theta_0/4) d_0$  obtenue dans le lemme 4A.2 pour la vraie géométrie est grande devant  $\eta$ . Dans le cas contraire, on peut considérer que le lissage est large.

On vérifie alors que les domaines modifiés incluent encore les demi-droites  $\Gamma_i$  sur un voisinage des jonctions sauf lorsqu'on est trop près de celles-ci.

**Lemme 4A.6.** *Si  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_2$  sont deux courbes dont les dérivées secondes des paramétrisations normales sont bornées et telles que leurs tangentes respectives  $\mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{D}_2$ , se rencontrent avec un angle plus grand que  $\theta_0$ , si  $\Gamma$  est une demi droite telle que*

- l'angle entre les droites  $\Gamma$  et  $\mathcal{D}_1$  est supérieur  $\theta_0/4$
- et l'angle entre  $\Gamma$  et  $\mathcal{D}_1$  est supérieur à  $3\theta_0/4$

et si  $\tilde{\mathcal{C}}_1$  et  $\tilde{\mathcal{C}}_2$  sont deux estimations des courbes  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_2$  telles que

$$\forall x \in \mathcal{C}_1, \exists y \in \tilde{\mathcal{C}}_1, d(x, y) \leq \eta \quad (4A.15)$$

$$\forall x \in \tilde{\mathcal{C}}_1, \exists y \in \mathcal{C}_1, d(x, y) \leq \eta \quad (4A.16)$$

$$\forall x \in \mathcal{C}_2, \exists y \in \tilde{\mathcal{C}}_2, d(x, y) \leq \eta \quad (4A.17)$$

$$\forall x \in \tilde{\mathcal{C}}_2, \exists y \in \mathcal{C}_2, d(x, y) \leq \eta \quad (4A.18)$$

alors il existe  $d_1$  tel que dès que  $d_1 \geq d(x, c_0) \geq 4\eta/(\sin(\theta_0/2) - \sin(\theta_0/4))$

$$x \in \Gamma \implies d(x, \tilde{\mathcal{C}}_1) \leq d(x, \tilde{\mathcal{C}}_2) . \quad (4A.19)$$

*Démonstration.* Soit  $x \in \Gamma$  avec  $x \leq d_1$  où  $d_1$  est défini comme dans le lemme 4A.5

$$d(x, \tilde{\mathcal{C}}_1) - d(x, \tilde{\mathcal{C}}_2) \leq (d(x, \mathcal{C}_1) + \eta) - (d(x, \mathcal{C}_2) - \eta) \quad (4A.20)$$

$$\leq (d(x, \mathcal{C}_1) - d(x, \mathcal{C}_2)) + 2\eta \quad (4A.21)$$

$$d(x, \tilde{\mathcal{C}}_1) - d(x, \tilde{\mathcal{C}}_2) \leq -\frac{\sin(\theta_0/2) - \sin(\theta_0/4)}{2} d(x, c_0) + 2\eta \quad (4A.22)$$

qui est négatif dès que

$$d(x, c_0) \geq \frac{4\eta}{\sin(\theta_0/2) - \sin(\theta_0/4)} . \quad (4A.23)$$

$\square$

Près des jonctions, la position relative des deux courbes est mal contrôlée mais elles ne peuvent s'éloigner trop des courbes initiales :

**Lemme 4A.7.** *A une distance inférieure à  $K\eta$  des extrémités de chaque courbe  $\mathcal{C}$ , il existe une prolongation régulière horizontale ou verticale  $\tilde{\mathcal{C}}$  de la courbe telle que la distance verticale/horizontale à la courbe soit bornée par  $K(M/m + 1)\eta$ .*

*Démonstration.* On se place dans le cas d'une courbe horizontale. A une distance supérieure à  $K\eta$  de la jonction, la courbe  $\mathcal{C}$  reste à une distance verticale d'au plus  $(M/m+1)\eta$  de la courbe détectée puisque la pente de  $\mathcal{C}$  est bornée par  $M/m$ .

À une distance de  $K\eta$  de l'extrémité, on introduit  $\tilde{\mathcal{C}}$  la prolongation de  $\mathcal{C}$  par le polynôme de Taylor associé à sa paramétrisation. Tout point à une distance inférieure à  $K\eta$  de la jonction est situé à une distance verticale inférieure à  $K(M/m+1)\eta$  de  $\tilde{\mathcal{C}}$ .

Comme la courbe détectée  $\tilde{\mathcal{C}}$  reste dans cette zone, on a la propriété voulue.  $\square$

On obtient alors le lemme suivant

**Lemme 4A.8.** *Si  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_2$  sont deux courbes dont les dérivées secondes des paramétrisations normales sont bornées et dont la jonction se fait avec un angle supérieur à  $\theta_0$  et si la distance entre ces deux courbes reste non nulle à l'exclusion de cette jonction, alors il existe une distance  $d_0$  telle que dès que*

$$\eta < \sin(\theta_0/8)/(8 \cos(\arctan(M) + \theta_0/4))d_0, \quad (4A.24)$$

la géométrie détectée  $\tilde{\mathcal{C}}_1$  satisfait les propriétés suivantes :

– La constante  $K$

$$K = \max\left(2 \frac{\cos(\arctan(M) + \theta_0/4)}{\sin(\theta_0/8)}, \frac{4}{\sin(\theta_0/2) - \sin(\theta_0/4)}\right) \quad (4A.25)$$

est telle qu'à une distance plus petite que  $K\eta$  de la jonction, la géométrie détectée reste à une distance verticale inférieure à  $K(M/m+1)\eta$  de l'éventuelle extension de  $\mathcal{C}$  par son polynôme de Taylor.

- À une distance horizontale  $d_H$  supérieure à  $K\eta$  de la jonction mais inférieure à  $d_0$ , la frontière du domaine obtenu par grass-fire reste à une distance verticale de la courbe originale plus grande que  $\frac{\sin(\theta_0/8)}{2 \cos(\arctan(M) + \theta_0/4)}d_H$ .
- Sinon la frontière reste à une distance plus grande que  $\frac{\sin(\theta_0/8)}{2}d_0$  de la courbe.

*Démonstration.* La précision  $\eta$  doit être suffisamment petite pour assurer que la largeur obtenue dans le lemme 4A.2 sur la vraie géométrie  $\sin(\theta_0/8) \sin(\theta_0/4)d_0$  soit au moins 4 fois plus grande que  $\eta$ .

Pour tout  $K$ , le lemme 4A.7 donne la première propriété.

La seconde propriété est une conséquence du lemme 4A.6 concernant l'ensemble  $\Gamma$  et du lemme 4A.2 concernant la distance de la courbe à une demi-droite On a en effet

$$d(\mathcal{C}, \Gamma(x)) \geq \frac{\sin(\theta_0/8)}{\cos(\arctan(M) + \theta_0/4)}(x - x_0) \quad (4A.26)$$

d'où

$$d(\tilde{\mathcal{C}}, \Gamma(x)) \geq \frac{\sin(\theta_0/8)}{\cos(\arctan(M) + \theta_0/4)}(x - x_0) - \eta \quad (4A.27)$$

et donc dès que  $(x - x_0) \geq 2 \frac{\cos(\arctan(M) + \theta_0/4)}{\sin(\theta_0/8)}\eta$

$$d(\tilde{\mathcal{C}}, \Gamma(x)) \geq \frac{\sin(\theta_0/8)}{2 \cos(\arctan(M) + \theta_0/4)}(x - x_0) \quad (4A.28)$$

si  $(x - x_0) \leq d'_0$  où  $d'_0$  est obtenu dans le lemme 4A.2 concernant la vraie géométrie

Soit maintenant  $\epsilon$  la distance minimale entre les courbes à une distance supérieure à  $d$  des jonctions, on peut choisir  $d_0 \leq d'_0$  tel que

$$\epsilon \geq \frac{\sin(\theta_0/8)}{2 \cos(\arctan(M) + \theta_0/4)} d_0 . \quad (4A.29)$$

La dernière limite provient de  $\eta$ , le résultat précédent est valable si

$$\frac{\sin(\theta_0/8)}{2 \cos(\arctan(M) + \theta_0/4)} d_0 \geq 2\eta \quad (4A.30)$$

ce qui est assuré si

$$\eta \leq \frac{\sin(\theta_0/8)}{8 \cos(\arctan(M) + \theta_0/4)} d_0 . \quad (4A.31)$$

□

Le première partie du lemme de départ est alors la conséquence de ce dernier lemme tandis que la seconde s'obtient à l'aide d'une inégalité triangulaire entre les courbes détectées et les vraies courbes. □

## 4A.2 Lemmes de géométrie

On démontre ici les lemmes non démontrés de la section précédente.

Le premier lemme concerne la régularité des courbes.

**Lemme 4A.3.** *Si  $\mathcal{C}$  est une courbe dont la paramétrisation normale  $C(s) = (x_1(s), x_2(s))$  satisfait*

$$\forall s, \forall \beta \leq \alpha, \quad |C^{(\beta)}(s)| \leq M \quad (4A.32)$$

*et si  $x'_1(s_0) \geq m$ , alors  $\mathcal{C}$  peut être paramétrée horizontalement tant que  $x'_1(s) \neq 0$  par  $c(x_1)$  et les dérivées de  $c$  sont bornées par*

$$\forall \beta \leq \alpha, \quad |c^{(\beta)}(x)| \leq K(\beta, m, M) \quad (4A.33)$$

*tant que  $x'_1(s) \geq m$ .*

*Démonstration.* Tant que  $x'_1(s) > 0$ , on peut paramétrer  $\mathcal{C}$  par  $(t, x_2(x_1^{-1}(t)))$  où  $x_1^{-1}$  est l'inverse de  $X_1(s)$ . Ceci implique que  $c = x_2 \circ x_1^{-1}$ .

Si  $x'_1(s) \geq m$ ,  $x_1^{-1}$  est défini et

$$(x_1^{-1})' = 1/(x'_1 \circ x_1^{-1}) \quad (4A.34)$$

$$(x_1^{-1})' \leq 1/m . \quad (4A.35)$$

On veut alors borner les dérivées successives de  $(x'_1 \circ x_1^{-1})$  pour utiliser le lemme suivant :

**Lemme 4A.9.** Si  $f$  est une fonction telle que

$$f(x) \geq m \quad (4A.36)$$

$$|f^{(\beta)}(x)| \leq M \quad \forall \beta \leq \alpha \quad (4A.37)$$

alors  $F(x) = 1/f(x)$  vérifie

$$|F^{(\beta)}(x)| \leq 2^{\beta(\beta+1)/2+1} (M/m)^\beta (1/m) . \quad (4A.38)$$

*Démonstration.* On utilise la relation

$$1 = F(x)f(x) . \quad (4A.39)$$

En dérivant cette égalité, on obtient

$$0 = \sum_{0 \leq \kappa \leq \beta} \binom{\kappa}{\beta} F^{(\kappa)}(x) f^{(\beta-\kappa)}(x) \quad (4A.40)$$

qui se réécrit

$$F^{(\beta)}(x)f(x) = - \sum_{0 \leq \kappa < \beta} \binom{\kappa}{\beta} F^{(\kappa)}(x) f^{(\beta-\kappa)}(x) . \quad (4A.41)$$

On utilise alors la non nullité de  $f$

$$F^{(\beta)}(x) = -1/f(x) \sum_{0 \leq \kappa < \beta} \binom{\kappa}{\beta} F^{(\kappa)}(x) f^{(\beta-\kappa)}(x) . \quad (4A.42)$$

Soit l'hypothèse de récurrence suivante sur  $\kappa$

$$|F^{(\kappa)}(x)| \leq 2^{\kappa(\kappa+1)/2+1} (M/m)^\kappa (1/m) \quad (4A.43)$$

qui est vérifiée pour  $\kappa = 0$ .

On suppose qu'elle est vraie pour  $\kappa < \beta$  et on l'insère dans l'égalité précédente :

$$|F^{(\beta)}(x)| = |1/f(x) \sum_{0 \leq \kappa < \beta} \binom{\kappa}{\beta} F^{(\kappa)}(x) f^{(\beta-\kappa)}(x)| \quad (4A.44)$$

$$\leq (1/m) \sum_{0 \leq \kappa < \beta} \binom{\kappa}{\beta} 2^{\kappa(\kappa+1)/2+1} (M/m)^\kappa (1/m) M \quad (4A.45)$$

$$\leq (1/m) 2^\beta 2^{(\beta-1)\beta/2+1} (M/n)^{\beta-1} (1/m) M \quad (4A.46)$$

$$|F^{(\beta)}(x)| \leq 2^{\beta(\beta+1)/2+1} (M/m)^\beta (1/m) \quad (4A.47)$$

et ceci donne donc le résultat par récurrence.  $\square$

Supposons que l'on ait une borne sur toutes les dérivées de  $x_1$  pour  $1 \leq \kappa < \beta$  :

$$(x_1^{-1})^{(\kappa)} \leq K , \quad (4A.48)$$

on cherche à contrôler les dérivées de  $(x_1' \circ x_1^{-1})$ . Pour cela, on utilise le lemme suivant :

**Lemme 4A.10.** *Si  $f$  et  $g$  sont des fonctions  $\mathbf{C}^\kappa$  telles que*

$$\|g^{(\beta)}\|_\infty \leq M\eta^{1-\beta/\kappa} \quad (4A.49)$$

alors

$$(f \circ g)^{(\beta)} = \sum_{i=1}^{\beta} \theta_i^\beta f^{(i)} \circ g \quad (4A.50)$$

avec

$$\|(\theta_i^k)^{(l)}\|_\infty \leq C_k M \eta^{i-(k+l)/\kappa} . \quad (4A.51)$$

*Démonstration.* Ce lemme se prouve par récurrence.

On remarque tout d'abord que

$$(f \circ g)^{(1)} = g^{(1)} f \circ g \quad (4A.52)$$

donc  $\theta_1^1 = g^{(1)}$ . Il satisfait l'hypothèse de récurrence puisque

$$(\theta_1^1)^{(l)} = g^{(l+1)} \quad (4A.53)$$

et donc

$$\|(\theta_1^1)^{(l)}\|_\infty \leq M\eta^{1-(l+1)/\kappa} . \quad (4A.54)$$

La récurrence est donc initialisée. On suppose qu'elle est vraie pour  $k$  et on remarque

$$\theta_i^{k+1} = (\theta_i^k)^{(1)} + g^{(1)}(\theta_{i-1}^k) . \quad (4A.55)$$

Ce qui implique

$$(\theta_i^{k+1})^{(l)} = (\theta_i^k)^{(l+1)} + \sum_{n=0}^l \binom{n}{l} g^{(n+1)} (\theta_{i-1}^k)^{(l-n)} \quad (4A.56)$$

$$\leq C_k M \eta^{i-(k+l+1)/\kappa} + \sum_{n=0}^l \binom{n}{l} \eta^{1-(n+1)/\kappa} C_k \eta^{(i-1)-(k+l-n)/\kappa} \quad (4A.57)$$

$$\leq C_k (M + 2^l M) \eta^{i-(k+l+1)/\kappa} \quad (4A.58)$$

$$(\theta_i^{k+1})^{(l)} \leq C_{k+1} M \eta^{i-((k+1)+l)/\kappa} \quad (4A.59)$$

et donc la propriété est vraie pour  $k+1$ .  $\square$

On a donc ici

$$(x'_1 \circ x_1^{-1})^{(\beta-1)} \leq (\beta-1) C_{\beta-1} M K . \quad (4A.60)$$

On applique alors le lemme 4A.9 avec  $f = (x'_1 \circ x_1^{-1})$  donc  $F = (x_1^{-1})'$  et on obtient

$$(x_1^{-1})^{(\beta)} \leq 2^{(\beta-1)\beta/2+1} ((\beta-1) C_{\beta-1} M K / m)^{\beta-1} (1/m) . \quad (4A.61)$$

On a donc une majoration sur la dérivée de  $X_1^{-1}$  pour  $1 \leq \kappa \leq \beta$  :

$$(x_1^{-1})^{(\kappa)} \leq K . \quad (4A.62)$$

Cette propriété est vraie pour  $\beta = 1$  avec  $(x_1^{-1})' \geq 1/m$  et donc par récurrence on a pour tout  $1 \leq \kappa \leq \alpha$  :

$$(x^{-1})^{(\kappa)} \leq K . \quad (4A.63)$$

Finalement  $c = x_2 \circ x_1^{-1}$  est régulière puisque  $x_2$  et  $x_1^{-1}$  le sont et le lemme 4A.10 précise que

$$(x_2 \circ x_1^{-1})^{(\beta-1)} \leq (\beta-1)C_{\beta-1}MK \quad (4A.64)$$

$$c^{(\beta-1)} \leq (\beta-1)C_{\beta-1}MK. \quad (4A.65)$$

Ce qui est le résultat souhaité. .  $\square$

Le second lemme précise la position de la courbe  $\mathcal{C}$  avec sa tangente et une demi-droite issue du même point.

**Lemme 4A.4.** *Si  $\mathcal{C}$  est une courbe paramétrée horizontalement par  $c(x_1)$  au voisinage de  $x_0$  telle que*

$$c''(x'_1) \leq K, \quad \forall x_0 \leq x'_1 \leq x_1 \quad (4A.66)$$

alors

$$c(x_1) \leq c(x_0) + c'(x_0)(x_1 - x_0) + (K/2)(x_1 - x_0)^2 . \quad (4A.67)$$

Si  $a > c'(x_0)$  alors la demi-droite  $\mathcal{D}$  définie par  $c(x_0) + a(x_1 - x_0)$  reste au dessus de  $\mathcal{C}$  tant que  $x_0 \leq x_1 \leq x_0 + 2\frac{a - c'(x_0)}{K}$ .

De plus pour tout  $b \in (0, a - c'(x_0))$  tant que  $x_0 \leq x_1 \leq x_0 + 2\frac{a - c'(x_0) - b}{K}$

$$c(x_0) + a(x_1 - x_0) - c(x) \geq b(x_1 - x_0) \quad (4A.68)$$

et

$$d((x_1, c(x_1)), \mathcal{D}) \geq \cos(\arctan(a))b(x_1 - x_0) . \quad (4A.69)$$

Finalement tant que  $x_0 \leq x_1 \leq x_0 + \frac{b}{1 - \sin(\arctan(a)) \cos(\arctan(a))b}$

$$d(\mathcal{C}, \mathcal{D}(x_1)) \geq \frac{\cos(\arctan(a))b}{1 - \sin(\arctan(a)) \cos(\arctan(a))b}(x_1 - x_0) . \quad (4A.70)$$

*Démonstration.* En utilisant le polynôme de Taylor au voisinage de  $x_0$ , on a

$$c(x_1) \leq c(x_0) + c'(x_0)(x_1 - x_0) + (K/2)(x_1 - x_0)^2 \quad (4A.71)$$



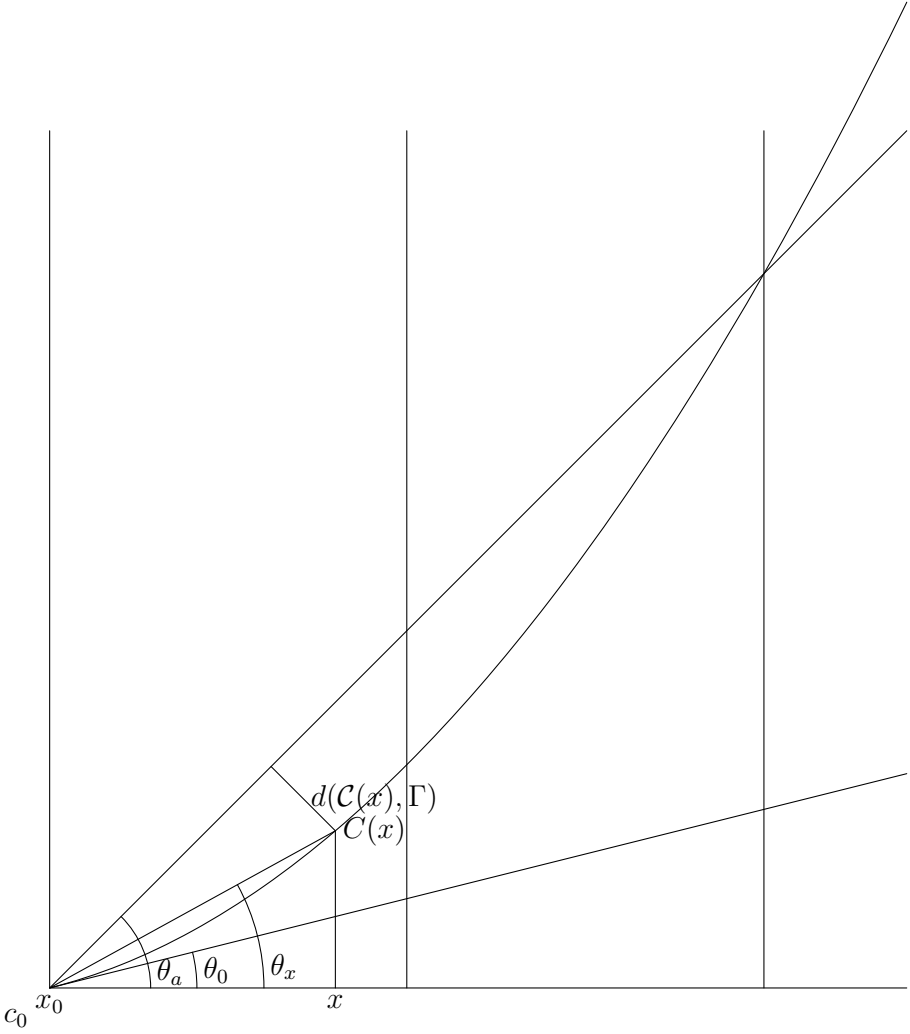


FIGURE 4A.1 – Géométrie autour de la courbe

donc

$$c(x_0) + a(x_1 - x_0) - c(x_1) \geq (a - c'(x_0))(x_1 - x_0) - (K/2)(x_1 - x_0)^2 \quad (4A.72)$$

$$c(x_0) + a(x_1 - x_0) - c(x_1) \geq (a - c'(x_0))(x_1 - x_0) \left(1 - \frac{K}{(2(a - c'(x_0)))(x_1 - x_0)}\right). \quad (4A.73)$$

Ceci implique que tant que  $x_1 \leq x_0 + 2\frac{a - c'(x_0)}{K}$ ,

$$c(x_0) + a(x_1 - x_0) - c(x_1) \geq 0 \quad (4A.74)$$

et pour tout  $b \in (0, a - c'(x_0))$  tant que  $x_1 \leq x_0 + 2\frac{a - c'(x_0) - b}{K}$

$$c(x_0) + a(x_1 - x_0) - c(x_1) \geq b(x_1 - x_0). \quad (4A.75)$$

Si l'on note  $\theta_a = \arctan(a)$  l'angle de la demi-droite  $\mathcal{D}$  avec l'horizontale et  $\theta_x$  l'angle de la demi-droite issue de  $(x_0, c(x_0))$  et passant par  $(x_1, c(x_1))$  avec l'horizontale, on a

$$\sin(\theta_a - \theta_x) = \frac{d((x_1, c(x_1)), \mathcal{D})}{\text{Hypoténuse}} \quad (4A.76)$$

$$\sin(\theta_x) = \frac{c(x_1) - c(x_0)}{\text{Hypoténuse}} \quad (4A.77)$$

$$\cos(\theta_x) = \frac{x_1 - x_0}{\text{Hypoténuse}}. \quad (4A.78)$$

On utilise alors la formule

$$\sin(\theta_a - \theta_x) = \sin(\theta_a) \cos(\theta_x) - \cos(\theta_a) \sin(\theta_x) \quad (4A.79)$$

qui donne

$$\frac{d((x_1, c(x_1)), \mathcal{D})}{\text{Hypoténuse}} = \sin(\theta_a) \frac{x_1 - x_0}{\text{Hypoténuse}} - \cos(\theta_a) \frac{c(x_1) - c(x_0)}{\text{Hypoténuse}} \quad (4A.80)$$

donc

$$d((x_1, c(x_1)), \mathcal{D}) = \sin(\theta_a)(x_1 - x_0) - \cos(\theta_a)(c(x_1) - c(x_0)) \quad (4A.81)$$

$$d((x_1, c(x_1)), \mathcal{D}) = \cos(\theta_a)(a(x_1 - x_0) - (c(x_1) - c(x_0))) \quad (4A.82)$$

$$d((x_1, c(x_1)), \mathcal{D}) = \cos(\theta_a)(c(x_0) + a(x_1 - x_0) - c(x_1)). \quad (4A.83)$$

On insère alors la majoration précédente lorsque  $x_1 \leq x_0 + 2(a - c'(x_0) - b)/K$

$$d((x_1, c(x_1)), \mathcal{D}) \geq \cos(\theta_a)b(x_1 - x_0) \quad (4A.84)$$

$$d((x_1, c(x_1)), \mathcal{D}) \geq \cos(\arctan(a))b(x_1 - x_0). \quad (4A.85)$$

De manière similaire, on étudie  $d(\mathcal{C}, \mathcal{D}(x_1))$ . Si l'on note  $x'_1$  la première coordonnée du point de la courbe  $\mathcal{C}$  le plus proche de  $\mathcal{D}(x_1)$ , on obtient

$$\sin(\theta_a) = (x'_1 - x_1)/d(c(x'_1), \mathcal{D}(x_1)) \quad (4A.86)$$

d'où

$$(x_1 - x_0) = (x'_1 - x_0) - d(c(x'_1), \mathcal{D}(x_1)) \sin(\theta_a) \quad (4A.87)$$

$$(x_1 - x_0) \leq (1 - \sin(\theta_a) \cos(\theta_a)b)(x'_1 - x_0) . \quad (4A.88)$$

Ceci implique

$$(x'_1 - x_0) \geq (x_1 - x_0)/(1 - \sin(\theta_a) \cos(\theta_a)b) \quad (4A.89)$$

et finalement

$$d(\mathcal{C}, \mathcal{D}(x_1)) \geq \frac{\cos(\theta_a)b}{1 - \sin(\theta_a) \cos(\theta_a)b} (x_1 - x_0) \quad (4A.90)$$

$$d(\mathcal{C}, \mathcal{D}(x_1)) \geq \frac{\cos(\arctan(a))b}{1 - \sin(\arctan(a)) \cos(\arctan(a))b} (x_1 - x_0) . \quad (4A.91)$$

Si l'on note  $\lambda = d((x_0, c(x_0), \mathcal{D}(x_1)))$ , ceci se réécrit

$$d(\mathcal{C}, \mathcal{D}(x_1)) \geq \frac{\sin(\theta_a) \cos(\theta_a)b}{1 - \sin(\theta_a) \cos(\theta_a)b} \lambda \quad (4A.92)$$

$$d(\mathcal{C}, \mathcal{D}(x_1)) \geq \frac{\sin(\arctan(a)) \cos(\arctan(a))b}{1 - \sin(\arctan(a)) \cos(\arctan(a))b} \lambda \quad (4A.93)$$

puisque

$$(x_1 - x_0) = \lambda \sin(\arctan(a)) . \quad (4A.94)$$

□

Le dernier lemme concerne la position relative de deux courbes au voisinage de leur point de jonction.

**Lemme 4A.5.** *Si  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_2$  sont deux courbes dont les dérivées secondes des paramétrisations normales sont bornées telles qu'elles se rencontrent avec un angle supérieur à  $\theta_0$  avec des tangentes respectives  $\mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{D}_2$  alors il existe une distance  $d_1$  telle que si  $\Gamma$  est une demi-droite dont l'angle avec  $\mathcal{D}_1$  est  $\theta_0/4$  et l'angle avec  $\mathcal{D}_2$  est minimal (supérieur à  $3\theta_0/4$ ) alors*

$$\forall x \in \Gamma, d(x, c_0) \leq d_1 \implies d(x, \mathcal{C}_1) \leq \frac{\sin(\theta_0/2) + \sin(\theta_0/4)}{2 \sin(\theta_0/2)} d(x, \mathcal{C}_2) \quad (4A.95)$$

où

$$\frac{\sin(\theta_0/2) + \sin(\theta_0/4)}{2 \sin(\theta_0/2)} < 1 . \quad (4A.96)$$

*Démonstration.* On introduit la demi-droite  $\Gamma'$  définie de manière similaire à  $\Gamma$  par son angle de  $\theta_0/4$  avec  $\mathcal{D}_2$  et son angle supérieur à  $3\theta_0/4$  avec  $\mathcal{D}_1$ .

En utilisant les lemmes précédents, on sait qu'il existe une distance  $d_1$  telle que la distance entre  $x \in \Gamma$  et  $\mathcal{C}_2$  est bornée par la distance entre  $x$  et  $\Gamma'$  tant que la distance entre  $x$  et le coin  $c_0$  est plus petite que  $d_1$ .

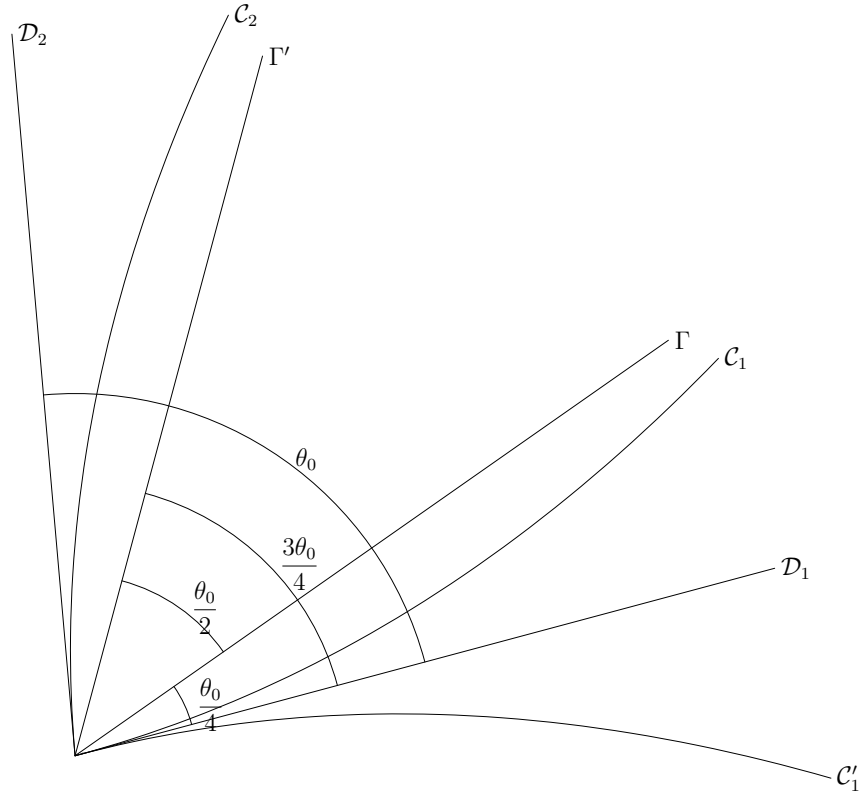


FIGURE 4A.2 – Géométrie au niveau d'une jonction

Si on note  $\lambda(x) = d(x, c_0)$ , on peut assurer que

$$d(x, C_2) \geq d(x, \Gamma') \quad (4A.97)$$

$$d(x, C_2) \geq \lambda(x) \sin(\theta_0/2) . \quad (4A.98)$$

Par la technique précédemment utilisée du polynôme de Taylor, on obtient

$$d(x, C_1) \leq d(x, h \in \mathcal{D}_1) + d(h, C_1) \quad (4A.99)$$

soit en choisissant  $h$  comme le projeté orthogonal de  $x$  sur  $\mathcal{D}_1$

$$d(x, C_1) \leq \lambda(x) \sin(\theta_0/4) + K/2(\lambda(x) \cos(\theta_0/4))^2 \quad (4A.100)$$

$$d(x, C_1) \leq \lambda(x) \sin(\theta_0/4) + K/2 \cos^2(\theta_0/4) \lambda(x)^2 . \quad (4A.101)$$

Donc tant que

$$\lambda(x) \leq \frac{\sin(\theta_0/2) - \sin(\theta_0/4)}{K \cos^2(\theta_0/4)} \quad (4A.102)$$

on a

$$d(x, C_1) \leq \lambda(x) \sin(\theta_0/4) + K/2 \cos^2(\theta_0/4) \lambda^2 \quad (4A.103)$$

$$\leq \lambda(x) \sin(\theta_0/4) + \frac{\sin(\theta_0/2) - \sin(\theta_0/4)}{2} \lambda(x) \quad (4A.104)$$

$$d(x, C_1) \leq \lambda(x) \frac{\sin(\theta_0/2) + \sin(\theta_0/4)}{2} . \quad (4A.105)$$

Finalement on obtient

$$d(x, \mathcal{C}_1) \leq \lambda(x) \frac{\sin(\theta_0/2) + \sin(\theta_0/4)}{2} \quad (4A.106)$$

$$\leq \lambda(x) \sin(\theta_0/2) \frac{\sin(\theta_0/2) + \sin(\theta_0/4)}{2 \sin(\theta_0/2)} \quad (4A.107)$$

$$d(x, \mathcal{C}_1) \leq \frac{\sin(\theta_0/2) + \sin(\theta_0/4)}{2 \sin(\theta_0/2)} d(x, \mathcal{C}_2) . \quad (4A.108)$$

□



---

# Annexe 4B

## Démonstrations : Approximation

---

<b>4B.1 Approximation linéaire de la géométrie</b>	<b>160</b>
<b>4B.2 Approximation non-linéaire sur un domaine <math>\Omega</math></b>	<b>163</b>
4B.2.1 Les trois tableaux	163
4B.2.2 Le cas des grandes échelles de lissage $s \geq s_0$	165
4B.2.2.1 Les ondelettes isotropes ne rencontrant pas $\mathcal{C}_s$	166
4B.2.2.2 Ondelettes isotropes rencontrant $\mathcal{C}_s$	167
4B.2.3 Échelle minimale pour les bandelettes	170
4B.2.4 Ondelettes déformées	175
4B.2.4.1 Ondelettes déformées ne rencontrant pas $\mathcal{C}_s$	175
4B.2.4.2 Ondelettes déformées rencontrant $\mathcal{C}_s$	176
4B.2.5 Bandelettes intérieures	179
4B.2.5.1 Bandelettes intérieures ne rencontrant pas $\mathcal{C}_s$	180
4B.2.5.2 Bandelettes intérieures rencontrant $\mathcal{C}_s$ avec $j_2 \geq \log_2(s)$	183
4B.2.5.3 Bandelettes intérieures rencontrant $\mathcal{C}_s$ avec $j_2 \leq \log_2(s)$	191
4B.2.6 Bandelettes de bord	198
4B.2.6.1 Bandelettes de bord ne rencontrant pas $\mathcal{C}_s$	198
4B.2.6.2 Bandelettes de bord rencontrant $\mathcal{C}_s$ avec $j_1 \geq j_2$	199
4B.2.6.3 Bandelettes de bord rencontrant $\mathcal{C}_s$ avec $j_2 \geq j_1$	200
<b>4B.3 Approximation non-linéaire</b>	<b>208</b>
4B.3.1 Les trois tableaux	208
4B.3.1.1 Cas du lissage large ( $s \geq s_0$ )	210
4B.3.1.2 Échelle minimale dans le frame de bandelettes	211
4B.3.1.3 Ondelettes isotropes extérieures	212
4B.3.1.4 Dans les domaines	213
4B.3.2 Erreur en dessous de l'échelle $\epsilon$	214

On présente ici les démonstrations de propriétés d'approximations de la géométrie ou des différentes catégories de fonctions du frame de bandelettes précédent. Elles permettent de compléter les démonstrations du chapitre précédent.

On rappelle que on note  $K$  les constantes apparaissant dans les différentes estimations. Par souci de simplicité, on se permet de faire varier la constante  $K$  d'une ligne à l'autre tant que cette variation n'est pas essentielle.

## 4B.1 Approximation linéaire de la géométrie

On cherche ici à montrer que l'approximation en ondelettes à l'échelle  $2^{j_0}$ ,  $P_{V_{j_0}}g$ , de la paramétrisation  $g$  de la courbe estimée  $\mathcal{G}$  ne s'éloigne pas trop de la paramétrisation du contour  $\mathcal{C}$  pourvu que l'échelle d'approximation soit bien choisie.

**Lemme 4.4.** *Si  $c$  est telle que sa dérivée d'ordre  $\alpha$  est bornée sur  $[0, l]$ , il existe une constante  $C$  telle que pour tout  $\eta > 0$ , si  $g$  satisfait  $\|c - g\|_\infty \leq \eta$  alors pour l'échelle d'indice  $j_0 = \lceil \log_2(\eta)/\alpha \rceil$ , on a*

$$\|(P_{V_{j_0}}g - c)^{(\kappa)}\|_\infty \leq K\eta^{(1-\kappa/\alpha)} \quad \forall \kappa \leq \alpha. \quad (4B.1)$$

*Démonstration.* Par définition, on a

$$\|c^{(\kappa)}\|_\infty \leq \|D^\alpha c\|_\infty, \quad \forall \kappa \leq \alpha \quad (4B.2)$$

et donc par le lemme 4.3

$$|\langle c, \psi_{j,k} \rangle| \leq \|D^\alpha c\|_\infty 2^{(\alpha+1/2)j} \|\psi^{[\alpha]}\|_1. \quad (4B.3)$$

D'autre part

$$\|g - c\|_\infty \leq \eta \quad (4B.4)$$

et le même lemme 4.3 nous donne

$$|\langle g - c, \phi_{j,k} \rangle| \leq \eta 2^{j/2} \|\phi\|_1. \quad (4B.5)$$

On a

$$P_{V_{j_0}}g - c = P_{V_{j_0}}(g - c) + (P_{V_{j_0}}c - c) \quad (4B.6)$$

et donc pour les dérivées

$$(P_{V_{j_0}}g - c)^{(\beta)} = (P_{V_{j_0}}(g - c))^{(\beta)} + (P_{V_{j_0}}c - c)^{(\beta)}. \quad (4B.7)$$

Le premier terme se majore avec la décomposition de  $P_{V_{j_0}}(g - c)$  sur les fonctions d'échelle

$$P_{V_{j_0}}(g - c) = \sum_k \langle g - c, \phi_{j_0,k} \rangle \phi_{j_0,k} \quad (4B.8)$$



d'où

$$(P_{V_{j_0}}(g - c))^{(\beta)} = \sum_k \langle g - c, \phi_{j_0, k} \rangle (\phi_{j_0, k})^{(\beta)} \quad (4B.9)$$

et

$$|(P_{V_{j_0}}(g - c))^{(\beta)}(x)| \leq \sum_k |\langle g - c, \phi_{j_0, k} \rangle| |(\phi_{j_0, k})^{(\beta)}(x)| \quad (4B.10)$$

$$|(P_{V_{j_0}}(g - c))^{(\beta)}(x)| \leq \sum_k \eta 2^{j/2} \|\phi\|_1 |(\phi_{j_0, k})^{(\beta)}(x)|. \quad (4B.11)$$

Comme le support de  $\phi$ ,  $\mathcal{S}(\phi)$ , est inclus dans  $[0, 2p + 1]$ , cette somme se réduit à

$$|(P_{V_{j_0}}(g - c))^{(\beta)}| \leq (2p + 1) \eta 2^{j_0/2} \|\phi\|_1 \|(\phi_{j_0, k})^{(\beta)}\|_\infty \quad (4B.12)$$

$$\leq (2p + 1) \eta 2^{j_0/2} \|\phi\|_1 2^{-\beta j_0} 2^{-j_0/2} \|\phi^{(\beta)}\|_\infty \quad (4B.13)$$

$$\leq K \eta 2^{-\beta j_0} \quad (4B.14)$$

$$|(P_{V_{j_0}}(g - c))^{(\beta)}| \leq K \eta^{1-\beta/\alpha}. \quad (4B.15)$$

L'autre terme se borne de manière similaire si  $\beta < \alpha$

$$P_{V_{j_0}} c - c = - \sum_{k < j_0} \langle c, \psi_{j, k} \rangle \psi_{j, k} \quad (4B.16)$$

d'où

$$(P_{V_{j_0}} c - c)^{(\beta)} = - \sum_{j < j_0} \sum_k \langle c, \psi_{j, k} \rangle (\psi_{j, k})^{(\beta)} \quad (4B.17)$$

et

$$|(P_{V_{j_0}} c - c)^{(\beta)}(x)| \leq \sum_{j < j_0} \sum_k |\langle c, \psi_{j, k} \rangle| |(\psi_{j, k})^{(\beta)}(x)| \quad (4B.18)$$

$$|(P_{V_{j_0}} c - c)^{(\beta)}(x)| \leq \sum_{j < j_0} \sum_k \|D^\alpha c\|_\infty 2^{(\alpha+1/2)j} \|\psi^{[\alpha]}\|_1 |(\psi_{j, k})^{(\beta)}(x)|. \quad (4B.19)$$

Comme  $\mathcal{S}(\psi) \subset [0, 2p + 1]$ , cette somme se réduit à

$$|(P_{V_{j_0}} c - c)^{(\beta)}(x)| \leq \sum_{j < j_0} (2p + 1) \|D^\alpha c\|_\infty 2^{(\alpha+1/2)j} \|\psi^{[\alpha]}\|_1 |(\psi_{j, k})^{(\beta)}(x)| \quad (4B.20)$$

$$\leq \sum_{j < j_0} (2p + 1) \|D^\alpha c\|_\infty 2^{(\alpha+1/2)j} \|\psi^{[\alpha]}\|_1 2^{-\beta j} 2^{-1/2j} \|\psi^{(\beta)}\|_\infty \quad (4B.21)$$

$$\leq \sum_{j < j_0} (2p + 1) \|D^\alpha c\|_\infty 2^{(\alpha-\beta)j} \|\psi^{[\alpha]}\|_1 \|\psi^{(\beta)}\|_\infty \quad (4B.22)$$

$$\leq 2AK \|D^\alpha c\|_\infty 2^{(\alpha-\beta)j_0} \|\psi^{[\alpha]}\|_1 \|\psi^{(\beta)}\|_\infty \quad (4B.23)$$

$$\leq K \|D^\alpha c\|_\infty 2^{(\alpha-\beta)j_0} \quad (4B.24)$$

$$|(P_{V_{j_0}} c - c)^{(\beta)}(x)| \leq K \|D^\alpha c\|_\infty \eta^{1-\beta/\alpha}. \quad (4B.25)$$

Pour borner la dérivée d'ordre  $\alpha$ , il faut utiliser une autre technique.

Soit  $x \in [0, l]$  et  $\pi_x c$  le polynôme de Taylor de degré  $\alpha - 1$  de  $c$  en  $x$ . Comme  $c$  est dérivable  $\alpha$  fois et cette dérivée est bornée par  $\|D^\alpha c\|_\infty$ ,

$$|c(x_1) - \pi_x(x_1)| \leq \|D^\alpha c\|_\infty |x_1 - x|^\alpha. \quad (4B.26)$$

De plus  $P_{V_{j_0}} \pi_x = \pi_x$  puisque le degré de  $\pi_x$  est inférieur à  $\alpha - 1$ . On a donc

$$P_{V_{j_0}} c - c = P_{V_{j_0}}(\pi_x) + P_{V_{j_0}}(c - \pi_x) - c \quad (4B.27)$$

$$= \pi_x + P_{V_{j_0}}(c - \pi_x) - c. \quad (4B.28)$$

Maintenant comme  $\pi_x$  est un polynôme de degré  $\alpha - 1$

$$\pi_x^{(\alpha)}(x) = 0. \quad (4B.29)$$

Le dernier terme est majoré par  $\|D^\alpha c\|_\infty$  grâce à la régularité de  $c$ .

Pour le terme restant,

$$|(P_{V_{j_0}}(c - \pi_x))^{(\alpha)}(x)| = \left| \sum_k \langle c - \pi_x, \phi_{j_0, k} \rangle (\phi_{j_0, k})^{(\alpha)}(x) \right| \quad (4B.30)$$

$$\leq \sum_k |\langle c - \pi_x, \phi_{j_0, k} \rangle| |(\phi_{j_0, k})^{(\alpha)}(x)| \quad (4B.31)$$

comme  $\mathcal{S}(\phi) \subset [0, 2p + 1]$

$$\leq \sum_{k, |k - 2^{-j}x| \leq (2p+1)} |\langle c - \pi_x, \phi_{j_0, k} \rangle| |(\phi_{j_0, k})^{(\alpha)}(x)|. \quad (4B.32)$$

On utilise alors la borne  $|c(x_1) - \pi_x(x_1)| \leq C|x_1 - x|^\alpha$  et le lemme 4.3

$$\leq \sum_{k, |k - 2^{-j}x| \leq (2p+1)} \|D^\alpha c\|_\infty ((2p + 1)2^{j_0})^\alpha 2^{j_0/2} \|\phi\|_\infty |(\phi_{j_0, k})^{(\alpha)}(x)| \quad (4B.33)$$

$$\leq \sum_{k, |k - 2^{-j}x| \leq (2p+1)} \|D^\alpha c\|_\infty ((2p + 1)2^{j_0})^\alpha 2^{j_0/2} \times \|\phi\|_\infty 2^{-\alpha j_0} 2^{-j_0/2} \|\phi^{(\alpha)}\|_\infty \quad (4B.34)$$

$$\leq (2p + 1)K((2p + 1))^\alpha \|\phi\|_\infty \|\phi^{(\alpha)}\|_\infty \|D^\alpha c\|_\infty \quad (4B.35)$$

$$|(P_{V_{j_0}}(c - \pi_x))^{(\alpha)}(x)| \leq K \|D^\alpha c\|_\infty. \quad (4B.36)$$

On en déduit donc

$$|(P_{V_{j_0}} c - c)^\alpha(x)| \leq K \|D^\alpha c\|_\infty. \quad (4B.37)$$

Finalement, on a bien obtenu

$$(P_{V_{j_0}} g - c)^{(\beta)} \leq K \max(1, \|D^\alpha c\|_\infty) \eta^{1-\beta/\alpha} \quad (4B.38)$$

et le nombre de coefficients non nuls de  $P_{V_{j_0}}$  est majoré par  $l 2^{-j_0} \leq 2l \eta^{-1/\alpha}$ .  $\square$

Pour simplifier les notations, on notera  $g$  à la place de  $P_{v_0^1} g$  et la majoration du lemme devient

$$\|(g - c)^{(\beta)}\|_\infty \leq K \max(1, \|D^\alpha c\|_\infty) \eta^{(1-\beta/\alpha)} \quad \forall \beta \leq \alpha. \quad (4B.39)$$

On notera  $\mathcal{C}_s$  l'ensemble des points à distance inférieure à  $s$  de  $\mathcal{C}$

$$\mathcal{C}_s = \{x \in [0, 1]^2, d(x, \mathcal{C}) \leq s\}. \quad (4B.40)$$

## 4B.2 Approximation non-linéaire sur un domaine $\Omega$

L'objectif de la série de lemmes de cette section est la justification des tableaux de la démonstration du théorème 4.1.

### 4B.2.1 Les trois tableaux

Les tableaux donnent pour chacune des catégories de coefficients décrites dans la démonstration le nombre de coefficients conservés ainsi que l'erreur résultante due aux coefficients abandonnés. Ils sont au nombre de trois.

Le premier tableau correspond au cas du lissage large,  $s \geq s_0$ , où l'on utilise uniquement des ondelettes isotropes :

$k$	$M_k$	$E_k$
Échelle minimale		
$\epsilon$	0	$(\ D^\alpha f\ _{\mathcal{C}}^2 + \ f\ _\infty^2)\epsilon$
0	0	$(\ D^\alpha f\ _{\mathcal{C}}^2 + \ f\ _\infty^2)\xi$
Ondelettes isotropes		
1	$l \xi^{-1/\alpha}$	$l \ D^\alpha f\ _{\mathcal{C}}^2 \xi$
2	$l s_0^{-1} (1 + s_0^{1/\alpha} \xi^{-1/\alpha})$	$l \ f\ _\infty^2 \xi$
3	$\emptyset$	
Ondelettes déformées		
4	$\emptyset$	
5	$\emptyset$	
6	$\emptyset$	
Bandelettes intérieures		
7	$\emptyset$	
8	$\emptyset$	
9	$\emptyset$	
10	$\emptyset$	
11	$\emptyset$	
Bandelettes de bord		
12	$\emptyset$	
13	$\emptyset$	
14	$\emptyset$	
15	$\emptyset$	
16	$\emptyset$	

Le deuxième tableau correspond au cas du lissage faible,  $s \leq \epsilon$ , où la fonction se comporte comme si elle n'était pas lissée. On utilise alors la famille orthonormée de bandelettes : ondelettes isotropes déformées, bandelettes intérieures et bandelettes de bord.

$k$	$M_k$	$E_k$
Échelle minimale		
$\epsilon$	0	$l \max(1, \ D^\alpha c\ ^{2\alpha})$ $\times (\ D^\alpha f\ _{\mathcal{C}}^2 + \ f\ _\infty^2) \epsilon$
0	0	$l \max(1, \ D^\alpha c\ ^{2\alpha})$ $\times (\ D^\alpha f\ _{\mathcal{C}}^2 + \ f\ _\infty^2) \xi$
Ondelettes isotropes		
1	$\emptyset$	
2	$\emptyset$	
3	$\emptyset$	
Ondelettes déformées		
4	$l \xi^{-1/(2\alpha+1)}$	$l \max(1, \ D^\alpha c\ ^{2\alpha}) \ D^\alpha f\ _{\mathcal{C}}^2 \xi$
5	$\min( \log_2(\xi) /2,  \log_2(\epsilon) , \xi^{-1/(2\alpha+1)})$	$\max(1, \ D^\alpha c\ ^{2\alpha}) \ f\ _\infty^2 \xi$
6	$l s_0^{-1}$	0
Bandelettes intérieures		
7	$l \xi^{-1/\alpha}$	$l \max(1, \ D^\alpha c\ ^{2\alpha+2}) \ D^\alpha f\ _{\mathcal{C}}^2 \xi$
8	$l \xi^{-1/(2\alpha)} \epsilon^{-1/(2\alpha)}$	$l \max(1, \ D^\alpha c\ ^{2\alpha+2}) \ f\ _\infty^2 \xi$
9	$\begin{cases} 0 & \text{si } s \leq \xi \\ \xi^{-1/(2\alpha)} & \text{sinon} \end{cases}$	0
10	$\emptyset$	
11	$\emptyset$	
Bandelettes de bord		
12	$l \xi^{-1/\alpha}$	$l \max(1, \ D^\alpha c\ ^{2\alpha+2}) \ D^\alpha f\ _{\mathcal{C}}^2 \xi$
13	$( \log_2(\max(\xi, \epsilon)) )^2$	0
14	$l \xi^{-1/(2(\alpha-1))}$	$l \max(1, \ D^\alpha c\ ^{2\alpha+2}) \ D^\alpha f\ _{\mathcal{C}}^2 \xi$
15	$\begin{cases} 0 & \text{si } \xi \geq s^2 \\ l \xi^{-1/\alpha} & \text{si } \xi \leq s^2 \end{cases}$	$l \max(1, \ D^\alpha c\ ^{2\alpha+2}) \ D^\alpha f\ _{\mathcal{C}}^2 \xi$
16	$ \log_2(\max(\xi, \epsilon)) ^2$	0

Le troisième et dernier tableau correspond au cas du lissage intermédiaire,  $s_0 \geq s \geq \epsilon$ , où l'on utilise les propriétés du noyau de lissage. Pour représenter la fonction sur le domaine, on utilise la famille orthonormée de bandelettes : ondelettes isotropes déformées, bandelettes intérieures et bandelettes de bord.

$k$	$M_k$	$E_k$
		Échelle minimale
$\epsilon$	0	$l \max(1, \ D^\alpha c\ ^{2\alpha}) \times (\ D^\alpha f\ _{\mathcal{C}}^2 + \ f\ _\infty^2) \epsilon$
0	0	$l \max(1, \ D^\alpha c\ ^{2\alpha}) \times (\ D^\alpha f\ _{\mathcal{C}}^2 + \ f\ _\infty^2) \xi$
		Ondelettes isotropes
1	$\emptyset$	
2	$\emptyset$	
3	$\emptyset$	
		Ondelettes déformées
4	$l \xi^{-1/(2\alpha+1)}$	$l \max(1, \ D^\alpha c\ ^{2\alpha}) \ D^\alpha f\ _{\mathcal{C}}^2 \xi$
5	$\min( \log_2(\xi) /2,  \log_2(\epsilon) , \xi^{-1/(2\alpha+1)})$	$\max(1, \ D^\alpha c\ ^{2\alpha}) \ f\ _\infty^2 \xi$
6	$l s_0^{-1}$	0
		Bandelettes intérieures
7	$l \xi^{-1/\alpha}$	$l \max(1, \ D^\alpha c\ ^{2\alpha+2}) \ D^\alpha f\ _{\mathcal{C}}^2 \xi$
8	$l \xi^{-1/(2\alpha)} \epsilon^{-1/(2\alpha)}$	$l \max(1, \ D^\alpha c\ ^{2\alpha+2}) \ f\ _\infty^2 \xi$
9	$\begin{cases} 0 & \text{si } s \leq \xi \\ \xi^{-1/(2\alpha)} & \text{sinon} \end{cases}$	0
10	$l \xi^{-1/\alpha}$	$l \max(1, \ D^\alpha c\ ^{2\alpha+2}) \ D^\alpha f\ _{\mathcal{C}}^2 \xi$
11	$\begin{cases} \xi^{-1/\alpha} & \text{si } s \leq \xi \\ (\xi^{-1/(2\alpha)} +  \log_2(\epsilon) ) & \text{sinon} \end{cases}$	$\max(1, \ D^\alpha c\ ^{2\alpha+2}) \ f\ _\infty^2 \xi$
		Bandelettes de bord
12	$l \xi^{-1/\alpha}$	$l \max(1, \ D^\alpha c\ ^{2\alpha+2}) \ D^\alpha f\ _{\mathcal{C}}^2 \xi$
13	$( \log_2(\xi) )^2 + \xi^{-1/\alpha}$	0
14	$l \xi^{-1/(2(\alpha-1))}$	$l \max(1, \ D^\alpha c\ ^{2\alpha+2}) \ D^\alpha f\ _{\mathcal{C}}^2 \xi$
15	$\begin{cases} 0 & \text{si } \xi \geq s^2 \\ l \xi^{-1/\alpha} & \text{si } \xi \leq s^2 \end{cases}$	$l \max(1, \ D^\alpha c\ ^{2\alpha+2}) \ D^\alpha f\ _{\mathcal{C}}^2 \xi$
16	$\begin{cases}  \log_2(\xi) ^2 & \text{si } \xi \geq s \\ \xi^{-1/\alpha} & \text{sinon} \end{cases}$	0

Le reste de cette section est consacrée à la démonstration de ces tableaux. Pour chacune des catégories, on précise l'échelle de coupure choisie et la technique utilisée pour obtenir la décroissance des coefficients

### 4B.2.2 Le cas des grandes échelles de lissage $s \geq s_0$

Si le lissage est très grand,  $f_s$  est déjà très régulière. De plus l'influence de la singularité peut traverser tout le domaine et en particulier ses bords. On se contentera donc dans ce cas d'utiliser les ondelettes isotropes normales qui rencontrent ce domaine pour représenter la fonction : elles permettent dans ce cas d'obtenir la décroissance souhaitée.

On fera cependant les démonstrations sans restrictions sur  $s$  afin de pouvoir réutiliser les résultats.

### 4B.2.2.1 Les ondelettes isotropes ne rencontrant pas $\mathcal{C}_s$

**Lemme 4B.1.** *Parmi les ondelettes isotropes qui ne rencontrent pas  $\mathcal{C}_s$ , si on conserve seulement celle au dessus de l'échelle d'indice  $j_0 = \log_2(\xi)/(2\alpha)$ , le nombre  $M_1$  de coefficients conservés satisfait*

$$M_1 \leq Kl \xi^{-1/\alpha}$$

et l'erreur résultante  $E_1$  satisfait

$$E_1 \leq Kl \|D^\alpha f\|_{\bar{\mathcal{C}}}^2 \xi .$$

*Démonstration.* Si l'ondelette ne rencontre pas  $\mathcal{C}_s$ , on utilise la régularité de  $f$  pour estimer celle de  $f_s = f \star h_s$ .

Pour tout  $x \notin \mathcal{C}_s$ , dans  $f_s(x) = f \star h_s(x)$ , la fonction  $f$  est utilisé uniquement en dehors de  $\mathcal{C}$ . Comme ses dérivées partielles d'ordre  $\alpha$  sont alors bornées, on obtient pour tout  $\beta$  tel que  $|\beta| \leq \alpha$

$$\frac{\partial^\beta}{\partial x^\beta} f_s(x) = \left( \frac{\partial^\beta}{\partial x^\beta} f \right) \star h_s(x) \quad \forall x \notin \mathcal{C}_s \quad (4B.41)$$

et

$$\left| \frac{\partial^\beta}{\partial x^\beta} f_s(x) \right| \leq \sup_{u \notin \mathcal{C}} \left| \frac{\partial^\beta}{\partial x^\beta} f(u) \right| \|h_s\|_1 \quad \forall x \notin \mathcal{C}_s \quad (4B.42)$$

puis comme  $\|h_s\|_1 = 1$

$$\left| \frac{\partial^\beta}{\partial x^\beta} f_s(x) \right| \leq \sup_{u \notin \mathcal{C}} \left| \frac{\partial^\beta}{\partial x^\beta} f(u) \right| \quad \forall x \notin \mathcal{C}_s . \quad (4B.43)$$

En particulier,

$$\left| \frac{\partial^\alpha}{\partial x_i^\alpha} f_s(x) \right| \leq \sup_{u \notin \mathcal{C}} \left| \frac{\partial^\alpha}{\partial x_i^\alpha} f(u) \right| \quad \forall x \notin \mathcal{C}_s \quad (4B.44)$$

$$\left| \frac{\partial^\alpha}{\partial x_i^\alpha} f_s(x) \right| \leq \|D^\alpha f\|_{\bar{\mathcal{C}}} \quad (4B.45)$$

et donc par le lemme 4.3

$$|\langle f_s, \psi_{j,k}^I \rangle| \leq K \|D^\alpha f\|_{\bar{\mathcal{C}}} 2^{(\alpha+1)j} . \quad (4B.46)$$

De plus, à chaque échelle  $2^j$  le nombre d'ondelettes qui ne rencontrent pas  $\mathcal{C}_s$  est borné par  $l 2^{-2j}$ .

On obtient donc la borne suivante pour  $M_1$

$$M_1 = \sum_{j \geq j_0} \sum_{k, \mathcal{S}(\psi_{j,k}^I) \cap \mathcal{C}_s = \emptyset} \quad (4B.47)$$

$$M_1 = \sum_{j \geq j_0} \# (k, \mathcal{S}(\psi_{j,k}^I) \cap \mathcal{C}_s = \emptyset) . \quad (4B.48)$$

On utilise alors l'estimation du nombre de ces ondelettes à chaque échelle

$$M_1 \leq \sum_{j \geq j_0} l 2^{-2j} \quad (4B.49)$$

$$\leq Kl 2^{-2j_0} \quad (4B.50)$$

$$M_1 \leq Kl \xi^{-1/\alpha} . \quad (4B.51)$$

L'erreur résultante  $E_1$  est alors bornée par

$$E_1 = \sum_{j < j_0} \sum_{k, \mathcal{S}(\psi_{j,k}^I) \cap \mathcal{C}_s = \emptyset} |\langle f_s, \psi_{j,k}^I \rangle|^2 . \quad (4B.52)$$

Si on insère l'estimation du produit scalaire obtenue en (4B.46)

$$E_1 \leq \sum_{j < j_0} \sum_{k, \mathcal{S}(\psi_{j,k}^I) \cap \mathcal{C}_s = \emptyset} K^2 \|D^\alpha f\|_{\mathcal{C}}^2 2^{2(\alpha+1)j} \quad (4B.53)$$

$$\leq \sum_{j < j_0} \#(k, \mathcal{S}(\psi_{j,k}^I) \cap \mathcal{C}_s = \emptyset) K^2 \|D^\alpha f\|_{\mathcal{C}}^2 2^{2(\alpha+1)j} \quad (4B.54)$$

et l'estimation du nombre de ces ondelettes

$$\leq \sum_{j < j_0} Kl 2^{-2j} \|D^\alpha f\|_{\mathcal{C}}^2 2^{2(\alpha+1)j} \quad (4B.55)$$

$$\leq \sum_{j < j_0} Kl \|D^\alpha f\|_{\mathcal{C}}^2 2^{2\alpha j} \quad (4B.56)$$

$$\leq Kl \|D^\alpha f\|_{\mathcal{C}}^2 2^{2\alpha j_0} \quad (4B.57)$$

$$E_1 \leq Kl \|D^\alpha f\|_{\mathcal{C}}^2 \xi . \quad (4B.58)$$

□

#### 4B.2.2.2 Ondelettes isotropes rencontrant $\mathcal{C}_s$

**Lemme 4B.2.** Parmi les ondelettes isotropes qui rencontrent  $\mathcal{C}_s$ , si on conserve les ondelettes au dessus de l'échelle d'indice

$$j_0 = \max(\log_2(\xi), \log_2(s) + \min(\log_2(\xi) - \log_2(s))/(2\alpha)) , \quad (4B.59)$$

le nombre  $M_2$  de coefficients conservés satisfait

$$M_2 \leq \begin{cases} Ks^{-1}(1 + s^{1/\alpha}\xi^{-1/\alpha}) & \text{if } \xi < s \\ Kl\xi^{-1} & \text{if } \xi \geq s \end{cases} \quad (4B.60)$$

et l'erreur  $E_2$  satisfait

$$E_2 \leq Kl \|f\|_{\infty}^2 \xi . \quad (4B.61)$$

**Corollaire 4B.3.** Si  $s \geq s_0$ , le nombre de coefficients conservés  $M_2$  est majoré par

$$M_2 \leq Kl s_0^{-1} (1 + s_0^{1/\alpha} \xi^{-1/\alpha}) . \quad (4B.62)$$

*Démonstration.* Lorsque l'ondelette rencontre  $\mathcal{C}_s$  à une échelle large ( $j > \log_2(s)$ ), on utilise uniquement la borne sur la norme uniforme de  $f_s$

$$\|f_s\|_\infty \leq \|f\|_\infty \|h_s\|_1 \quad (4B.63)$$

$$\|f_s\|_\infty \leq \|f\|_\infty \quad (4B.64)$$

qui donne par le lemme 4.3

$$|\langle f_s, \psi_{j,k}^I \rangle| \leq K \|f\|_\infty 2^j . \quad (4B.65)$$

Si l'ondelette rencontre  $\mathcal{C}_s$  à une échelle fine ( $j < \log_2(s)$ ), on utilise la régularité de  $h_s$  pour estimer celle de  $f_s = f \star h_s$ .

$$\frac{\partial^\beta}{\partial x^\beta} f_s = f \star \frac{\partial^\beta}{\partial x^\beta} h_s \quad (4B.66)$$

mais  $\frac{\partial^\beta}{\partial x^\beta} h_s = s^{-|\beta|} (\frac{\partial^\beta}{\partial x^\beta} h)_s$  donc

$$\frac{\partial^\beta}{\partial x^\beta} f_s = f \star s^{-|\beta|} (\frac{\partial^\beta}{\partial x^\beta} h)_s \quad (4B.67)$$

$$= s^{-|\beta|} f \star (\frac{\partial^\beta}{\partial x^\beta} h)_s . \quad (4B.68)$$

On en déduit

$$\|\frac{\partial^\beta}{\partial x^\beta} f_s\|_\infty \leq s^{-|\beta|} \|f\|_\infty \| (D^\alpha x h)_s \|_1 \quad (4B.69)$$

$$\|\frac{\partial^\beta}{\partial x^\beta} f_s\|_\infty \leq s^{-|\beta|} \|f\|_\infty \|D^\alpha x h\|_1 . \quad (4B.70)$$

En particulier

$$\|\frac{\partial^\alpha}{\partial x_i^\alpha} f_s\|_\infty \leq s^{-\alpha} \|f\|_\infty \|D^\alpha h\|_1 \quad (4B.71)$$

qui donne par le lemme 4.3

$$|\langle f_s, \psi_{j,k}^I \rangle| \leq K s^{-\alpha} \|f\|_\infty \|D^\alpha h\|_1 2^{(\alpha+1)j} \quad (4B.72)$$

$$|\langle f_s, \psi_{j,k}^I \rangle| \leq K \|f\|_\infty 2^{\alpha(j-\log_2(s))} 2^j . \quad (4B.73)$$

Le nombre d'ondelettes isotropes rencontrant  $\mathcal{C}_s$  est borné par  $Kl 2^{-j}$  à chaque échelle  $2^j \geq s$  et par  $Kls 2^{-2j}$  à chaque échelle  $2^j \leq s$ .

Si  $\xi \geq s$ , on a  $2^{j_0} = \xi \geq s$ . Le nombre de coefficients  $M_2$  est alors majoré par

$$M_2 \leq \sum_{j \geq j_0} \sum_{k, \mathcal{S}(\psi_{j,k}^I) \cap \mathcal{C}_s \neq \emptyset} \quad (4B.74)$$

$$M_2 \leq \sum_{j \geq j_0} \# (k, \mathcal{S}(\psi_{j,k}^I) \cap \mathcal{C}_s \neq \emptyset) . \quad (4B.75)$$



On insère le nombre de coefficients par échelle

$$M_2 \leq \sum_{j \geq \log_2(\xi)} Kl 2^{-j} \quad (4B.76)$$

$$M_2 \leq Kl \xi^{-1} . \quad (4B.77)$$

L'erreur  $E_2$  est bornée par

$$E_2 \leq \sum_{j_0 > j} \sum_{k, \mathcal{S}(\psi_{j,k}^I) \cap C_s \neq \emptyset} |\langle f_s, \psi_{j,k}^I \rangle|^2 \quad (4B.78)$$

$$\leq \sum_{j_0 > j \geq \log_2(s)} \sum_{k, \mathcal{S}(\psi_{j,k}^I) \cap C_s \neq \emptyset} |\langle f_s, \psi_{j,k}^I \rangle|^2 + \sum_{\log_2(s) > j} \sum_{k, \mathcal{S}(\psi_{j,k}^I) \cap C_s \neq \emptyset} |\langle f_s, \psi_{j,k}^I \rangle|^2 \quad (4B.79)$$

$$E_2 \leq \sum_{j_0 > j \geq \log_2(s)} \#(k, \mathcal{S}(\psi_{j,k}^I) \cap C_s \neq \emptyset) |\langle f_s, \psi_{j,k}^I \rangle|^2 \quad (4B.80)$$

$$+ \sum_{\log_2(s) > j} \#(k, \mathcal{S}(\psi_{j,k}^I) \cap C_s \neq \emptyset) |\langle f_s, \psi_{j,k}^I \rangle|^2 .$$

On utilise alors les majorations des produits scalaires obtenues dans (4B.65) et (4B.73)

$$E_2 \leq \sum_{j_0 > j \geq \log_2(s)} \sum_{k, \mathcal{S}(\psi_{j,k}^I) \cap C_s \neq \emptyset} K^2 \|f\|_\infty^2 2^{2j} \quad (4B.81)$$

$$+ \sum_{\log_2(s) > j} \sum_{k, \mathcal{S}(\psi_{j,k}^I) \cap C_s \neq \emptyset} K^2 \|f\|_\infty^2 2^{2\alpha(j - \log_2(s))} 2^{2j}$$

et on insère le nombre de coefficients par échelle

$$\leq \sum_{j_0 > j \geq \log_2(s)} Kl 2^{-j} \|f\|_\infty^2 2^{2j} + \sum_{\log_2(s) > j} Kls 2^{-2j} \|f\|_\infty^2 2^{2\alpha(j - \log_2(s))} 2^{2j} \quad (4B.82)$$

$$\leq \sum_{j_0 > j \geq \log_2(s)} Kl \|f\|_\infty^2 2^j + \sum_{\log_2(s) > j} Kls \|f\|_\infty^2 2^{2\alpha(j - \log_2(s))} \quad (4B.83)$$

$$\leq Kl \|f\|_\infty^2 2^{j_0} + Kls \|f\|_\infty^2 \quad (4B.84)$$

$$E_2 \leq Kl \|f\|_\infty^2 \xi . \quad (4B.85)$$

Si  $\xi < s$ ,  $j_0 = \log_2(s) + (\log_2(\xi) - \log_2(s))/(2\alpha) < \log_2(s)$  et donc le nombre  $M_2$  de coefficients conservés est borné par

$$M_2 \leq \sum_{j \geq j_0} \sum_{k, \mathcal{S}(\psi_{j,k}^I) \cap C_s \neq \emptyset} \quad (4B.86)$$

$$\leq \sum_{j \geq \log_2(s)} \sum_{k, \mathcal{S}(\psi_{j,k}^I) \cap C_s \neq \emptyset} + \sum_{\log_2(s) \geq j \geq j_0} \sum_{k, \mathcal{S}(\psi_{j,k}^I) \cap C_s \neq \emptyset} \quad (4B.87)$$

$$\leq \sum_{j \geq \log_2(s)} \#(k, \mathcal{S}(\psi_{j,k}^I) \cap C_s \neq \emptyset) + \sum_{\log_2(s) \geq j \geq j_0} \#(k, \mathcal{S}(\psi_{j,k}^I) \cap C_s \neq \emptyset) \quad (4B.88)$$

$$\leq \sum_{j \geq \log_2(s)} Kl 2^{-j} + \sum_{\log_2(s) \geq j \geq j_0} Kls 2^{-2j} \quad (4B.89)$$

$$\leq Kls^{-1} + Kls 2^{-2j_0} \quad (4B.90)$$

$$M_2 \leq Kls^{-1} (1 + s^{1/\alpha} \xi^{-1/\alpha}) . \quad (4B.91)$$

L'erreur résultante  $E_2$  est bornée par

$$E_2 \leq \sum_{j < j_0} \sum_{k, \mathcal{S}(\psi_{j,k}^I) \cap C_s \neq \emptyset} |\langle f_s, \psi_{j,k}^I \rangle|^2. \quad (4B.92)$$

On insère l'estimation des produits scalaires de (4B.73)

$$(4B.93)$$

$$E_2 \leq \sum_{j < j_0} \sum_{k, \mathcal{S}(\psi_{j,k}^I) \cap C_s \neq \emptyset} K^2 \|f\|_\infty^2 2^{2\alpha(j - \log_2(s))} 2^{2j} \quad (4B.94)$$

$$\leq \sum_{j < j_0} \#(k, \mathcal{S}(\psi_{j,k}^I) \cap C_s \neq \emptyset) K^2 \|f\|_\infty^2 2^{2\alpha(j - \log_2(s))} 2^{2j} \quad (4B.95)$$

et avec l'estimation du nombre d'ondelettes

$$\leq \sum_{j < j_0} Kl s 2^{-2j} \|f\|_\infty^2 2^{2\alpha(j - \log_2(s))} 2^{2j} \quad (4B.96)$$

$$\leq \sum_{j < j_0} Kl s \|f\|_\infty^2 2^{2\alpha(j - \log_2(s))} \quad (4B.97)$$

$$\leq Kl s \|f\|_\infty^2 2^{2\alpha(j_0 - \log_2(s))} \quad (4B.98)$$

$$E_2 \leq Kl \|f\|_\infty^2 \xi. \quad (4B.99)$$

□

### 4B.2.3 Échelle minimale pour les bandelettes

Dans les autres cas, on utilise la famille orthonormée de bandelettes associée au domaine et on montre l'existence d'une échelle minimale pour celle-ci. Les bandelettes sont construites à partir des ondelettes isotropes déformées, il suffit donc de montrer ce résultat pour ces ondelettes déformées.

**Lemme 4B.4.** *L'énergie  $E_0$  des ondelettes isotropes déformées en dessous de l'échelle d'indice  $j_*$  définie par*

$$j_* = \max(\log_2(\xi), \log_2(s) + (\log_2(\xi) - \log_2(s))/(2\alpha)), \quad (4B.100)$$

qui est supérieure à  $\log_2(\xi)$ , satisfait

$$E_0 \leq Kl \max(1, \|D^\alpha c\|^{2\alpha}) (\|D^\alpha f\|_{\mathcal{C}}^2 + \|f\|_\infty^2) \xi. \quad (4B.101)$$

**Corollaire 4B.5.** *L'énergie  $E_\epsilon$  des ondelettes isotropes déformées dont l'échelle  $2^j$  est inférieure à  $\epsilon$  satisfait*

$$E_\epsilon \leq Kl \max(1, \|D^\alpha c\|^{2\alpha}) (\|D^\alpha f\|_{\mathcal{C}}^2 + \|f\|_\infty^2) \epsilon. \quad (4B.102)$$

*Démonstration.* Les ondelettes déformées  $W^* \psi_{j,k}^I$  ont des produits scalaires avec  $f$  similaires à ceux obtenus avec les ondelettes isotropes  $\psi_{j,k}^I$ . En effet

$$\langle f_s, W^* \psi_{j,k}^I \rangle = \langle W f_s, \psi_{j,k}^I \rangle \quad (4B.103)$$

et la régularité de  $Wf_s$  est la même que celle de  $f_s$  elle-même. Selon  $x_2$ , on a en effet

$$\frac{\partial^\alpha}{\partial x_2^\alpha}(Wf_s)(x) = \frac{\partial^\alpha}{\partial x_2^\alpha}(f_s(x_1, x_2 - g(x_1))) \quad (4B.104)$$

$$= \frac{\partial^\alpha}{\partial x_2^\alpha} f_s(x_1, x_2 - g(x_1)) \quad (4B.105)$$

$$\frac{\partial^\alpha}{\partial x_2^\alpha}(Wf_s)(x) = W\left(\frac{\partial^\alpha}{\partial x_2^\alpha} f_s\right)(x) . \quad (4B.106)$$

La situation est un peu plus complexe selon  $x_1$ .

$$\frac{\partial^\alpha}{\partial x_1^\alpha}(Wf_s)(x) = \frac{\partial^\alpha}{\partial x_1^\alpha}(f_s(x_1, x_2 - g(x_1))) \quad (4B.107)$$

et on utilise alors un lemme sur les dérivées de ce type de fonctions pour obtenir

$$\left| \frac{\partial^\alpha}{\partial x_1^\alpha}(Wf_s)(x) \right| \leq K \max(1, \|D^\alpha c\|^\alpha) |W(D^\alpha f_s)(x)| . \quad (4B.108)$$

Ce lemme est le suivant

**Lemme 4B.6.** *Soit  $f$  et  $g$  des fonction  $\mathbf{C}^\alpha$  telles que*

$$\left| \left( \frac{\partial^\beta}{\partial x^\beta} f \right) (x_1, x_2 - g(x_1)) \right| \leq M_1 \quad \text{si } |\beta| \leq \alpha \quad (4B.109)$$

$$|g^{(\beta)}(x_1)| \leq M_2 \quad \text{si } \beta \leq \alpha \quad (4B.110)$$

alors

$$\left| \frac{\partial^\alpha}{\partial x_1^\alpha}(f(x_1, x_2 - g(x_1))) \right| \leq (2 + 2^\alpha)^\alpha M_1 \max(M_2^\alpha, 1) . \quad (4B.111)$$

*Démonstration.* Ceci se démontre par récurrence. On vérifie que la dérivée  $\kappa \leq \alpha$  selon  $x_1$  de cette fonction peut s'écrire en fonction des dérivées de  $f$  :

$$\frac{\partial^\kappa}{\partial x_1^\kappa}(f(x_1, x_2 - g(x_1))) = \sum_{|\beta| \leq \kappa} \theta_\beta^\kappa(x_1) \left( \frac{\partial^\beta}{\partial x_1^\beta} f \right) (x_1, x_2 - g(x_1)) \quad (4B.112)$$

où les  $\theta_\beta^\kappa$  sont des fonctions de  $x_1$  que l'on va étudier. On va démontrer que les  $\theta_\beta^\kappa(x_1)$  sont des fonctions  $\alpha - \kappa$  dérivables dont les dérivées satisfont

$$\frac{\partial^\nu}{\partial x_1^\nu}(\theta_\beta^\kappa)(x_1) \leq (2 + 2^\alpha)^\kappa \max(M_2^\kappa, 1) \quad \forall \nu \leq \alpha - \kappa . \quad (4B.113)$$

On initialise le procédé avec  $\kappa = 1$  :

$$\frac{\partial^1}{\partial x_1^1}(f(x_1, x_2 - g(x_1))) = \frac{\partial}{\partial x_1}(f(x_1, x_2 - g(x_1))) \quad (4B.114)$$

$$\frac{\partial^1}{\partial x_1^1}(f(x_1, x_2 - g(x_1))) = \left( \frac{\partial^{(1,0)}}{\partial x^{(1,0)}} f \right) (x_1, x_2 - g(x_1)) - g'(x_1) (D^{(0,1)} f)(x_1, x_2 - g(x_1)) . \quad (4B.115)$$

On a donc bien une décomposition de cette dérivée de la bonne forme et les fonctions  $\theta_\beta^1$  sont définies par

$$\theta_{(1,0)}^1 = 1 \quad (4B.116)$$

$$\theta_{(0,1)}^1 = g'(x_1) \quad (4B.117)$$

$$\theta_\beta^1 = 0 \quad \text{si } \beta \neq (1,0) \text{ et } \beta \neq (0,1) \quad (4B.118)$$

de sorte qu'on a bien

$$\frac{\partial^\nu}{\partial x_1^\nu} (\theta_\beta^1)(x_1) \leq (2 + 2^\alpha) \max(M_2, 1) \quad \forall \nu \leq \alpha - 1. \quad (4B.119)$$

On suppose dorénavant cette propriété vraie pour  $\kappa < \alpha$ .

$$\frac{\partial^{\kappa+1}}{\partial x_1^{\kappa+1}} (f(x_1, x_2 - g(x_1))) = \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{\partial^\kappa}{\partial x_1^\kappa} (f(x_1, x_2 - g(x_1))) \right) \quad (4B.120)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \sum_{|\beta| \leq \kappa} \theta_\beta^\kappa(x_1) \left( \frac{\partial^\beta}{\partial x^\beta} f \right)(x_1, x_2 - g(x_1)) \right) \quad (4B.121)$$

$$= \sum_{|\beta| \leq \kappa} \frac{\partial}{\partial x_1} (\theta_\beta^\kappa(x_1)) \left( \frac{\partial^\beta}{\partial x^\beta} f \right)(x_1, x_2 - g(x_1)) \quad (4B.122)$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{|\beta| \leq \kappa} \frac{\partial}{\partial x_1} \theta_\beta^\kappa(x_1) \left( \frac{\partial^\beta}{\partial x^\beta} f \right)(x_1, x_2 - g(x_1)) \\ &\quad + \sum_{|\beta| \leq \kappa} \theta_\beta^\kappa(x_1) \left( \frac{\partial^{\beta+(1,0)}}{\partial x^{\beta+(1,0)}} f \right)(x_1, x_2 - g(x_1)) \\ &\quad - \sum_{|\beta| \leq \kappa} \theta_\beta^\kappa(x_1) g'(x_1) \left( \frac{\partial^{\beta+(0,1)}}{\partial x^{\beta+(0,1)}} f \right)(x_1, x_2 - g(x_1)) \end{aligned} \quad (4B.123)$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{|\beta| \leq \kappa} \frac{\partial}{\partial x_1} \theta_\beta^\kappa(x_1) \left( \frac{\partial^\beta}{\partial x^\beta} f \right)(x_1, x_2 - g(x_1)) \\ &\quad + \sum_{|\beta-(1,0)| \leq \kappa} \theta_{\beta-(1,0)}^\kappa(x_1) \left( \frac{\partial^\beta}{\partial x^\beta} f \right)(x_1, x_2 - g(x_1)) \\ &\quad - \sum_{|\beta-(0,1)| \leq \kappa} \theta_{\beta-(0,1)}^\kappa(x_1) g'(x_1) \left( \frac{\partial^\beta}{\partial x^\beta} f \right)(x_1, x_2 - g(x_1)) \end{aligned} \quad (4B.124)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{\kappa+1}}{\partial x_1^{\kappa+1}} (f(x_1, x_2 - g(x_1))) &= \sum_{|\beta| \leq \kappa+1} \left( \frac{\partial}{\partial x_1} \theta_\beta^\kappa(x_1) + \theta_{\beta-(1,0)}^\kappa(x_1) - \theta_{\beta-(0,1)}^\kappa(x_1) g'(x_1) \right) \\ &\quad \times \left( \frac{\partial^\beta}{\partial x^\beta} f \right)(x_1, x_2 - g(x_1)). \end{aligned} \quad (4B.125)$$

Il en résulte que la dérivée est de la bonne forme et que les  $\theta_\beta^{\kappa+1}$  satisfont :

$$\theta_\beta^{\kappa+1}(x_1) = \frac{\partial}{\partial x_1} \theta_\beta^\kappa(x_1) + \theta_{\beta-(1,0)}^\kappa(x_1) - \theta_{\beta-(0,1)}^\kappa(x_1) g'(x_1). \quad (4B.126)$$

On en déduit

$$\begin{aligned} \frac{\partial^\nu}{\partial x_1^\nu} \theta_\beta^{\kappa+1}(x_1) &= \frac{\partial^{\nu+1}}{\partial x_1^{\nu+1}} \theta_\beta^\kappa(x_1) + \frac{\partial^\nu}{\partial x_1^\nu} \theta_{\beta-(1,0)}^\kappa(x_1) \\ &\quad - \sum_{0 \leq \mu \leq \nu} \binom{\mu}{\nu} \frac{\partial^\mu}{\partial x_1^\mu} \theta_{\beta-(0,1)}^\kappa(x_1) \frac{\partial^{\nu-\mu+1}}{\partial x_1^{\nu-\mu+1}} g(x_1) \end{aligned} \quad (4B.127)$$

et donc pour  $\nu \leq \alpha - \kappa - 1$

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial^{\nu-\kappa+1}}{\partial x_1^{\nu-\kappa+1}} \theta_\beta^{\kappa+1}(x_1) \right| &\leq \left| \frac{\partial^{\nu+1}}{\partial x_1^{\nu+1}} \theta_\beta^\kappa(x_1) \right| + \left| \frac{\partial^\nu}{\partial x_1^\nu} \theta_{\beta-(1,0)}^\kappa(x_1) \right| \\ &\quad + \sum_{0 \leq \mu \leq \nu} \binom{\mu}{\nu} \left| \frac{\partial^\mu}{\partial x_1^\mu} \theta_{\beta-(0,1)}^\kappa(x_1) \right| \left| \frac{\partial^{\nu-\mu+1}}{\partial x_1^{\nu-\mu+1}} g(x_1) \right| \end{aligned} \quad (4B.128)$$

$$\begin{aligned} &\leq (2 + 2^\alpha)^\kappa \max(M_2^\kappa, 1) + (2 + 2^\alpha)^\kappa \max(M_2^\kappa, 1) \\ &\quad + \sum_{0 \leq \mu \leq \nu} \binom{\mu}{\nu} (2 + 2^\alpha)^\kappa \max(M_2^\kappa, 1) \max(M_2, 1) \end{aligned} \quad (4B.129)$$

$$\leq (2 + 2^\nu)(2 + 2^\alpha)^\kappa \max(M_2^{\kappa+1}, 1) \quad (4B.130)$$

$$\left| \frac{\partial^\nu}{\partial x_1^\nu} \theta_\beta^{\kappa+1}(x_1) \right| \leq (2 + 2^\alpha)^{\kappa+1} \max(M_2^{\kappa+1}, 1). \quad (4B.131)$$

On a donc obtenu le résultat pour  $\kappa + 1$  et la récurrence est bien initialisée.  $\square$

On recherche maintenant des majorations pour les produits scalaires

$$|\langle f_s, W^* \psi_{j,k}^I \rangle| = |\langle W f_s, \psi_{j,k}^I \rangle|. \quad (4B.132)$$

La régularité de  $f$  en dehors de  $\mathcal{C}_s$  peut être utilisée dès que  $\mathcal{S}(\psi_{j,k}^I)$  ne rencontre pas  $w(\mathcal{C}_s)$ . Si  $x \notin w(\mathcal{C}_s)$

$$\left| \frac{\partial^\alpha}{\partial x_2^\alpha} (W f_s)(x) \right| \leq \|D^\alpha f\|_{\overline{\mathcal{C}}} \quad (4B.133)$$

et

$$\left| \frac{\partial^\alpha}{\partial x_1^\alpha} (W f_s)(x) \right| \leq K \max(1, \|D^\alpha c\|^\alpha) \|D^\alpha f\|_{\overline{\mathcal{C}}} \quad (4B.134)$$

qui donne par le lemme 4.3

$$|\langle W f_s, \psi_{j,k}^I \rangle| \leq K \max(1, \|D^\alpha c\|^\alpha) \|D^\alpha f\|_{\overline{\mathcal{C}}} 2^{(\alpha+1)j} \quad \text{si } \mathcal{S}(\psi_{j,k}^I) \cap w(\mathcal{C}_s) = \emptyset. \quad (4B.135)$$

On peut également utiliser le fait que la norme infinie de  $f_s$  est finie

$$\|W f_s\|_\infty = \|f_s\|_\infty \quad (4B.136)$$

$$\|W f_s\|_\infty \leq \|f\|_\infty \quad (4B.137)$$

qui donne par le lemme 4.3

$$|\langle W f_s, \psi_{j,k}^I \rangle| \leq K \|f\|_\infty 2^j. \quad (4B.138)$$

Finalement, on peut utiliser également la régularité de  $h_s$

$$\left| \frac{\partial^\alpha}{\partial x_2^\alpha} (W f_s)(x) \right| \leq K s^{-\alpha} \|f\|_\infty \quad (4B.139)$$

et

$$\left| \frac{\partial^\alpha}{\partial x_1^\alpha} (W f_s)(x) \right| \leq K \max(1, \|D^\alpha c\|^\alpha) s^{-\alpha} \|f\|_\infty \quad (4B.140)$$

pour obtenir par le lemme 4.3

$$|\langle W f_s, \psi_{j,k}^I \rangle| \leq K \max(1, \|D^\alpha c\|^\alpha) \|f\|_\infty 2^{\alpha(j - \log s)} 2^j . \quad (4B.141)$$

On a donc les mêmes décroissances pour les coefficients d'ondelettes déformées que pour les ondelettes isotropes avec juste des constantes différentes.

L'erreur  $E_0$  due à l'élimination des ondelettes isotropes en dessous de l'échelle d'indice  $j_*$  est donc bornée à l'aide des lemmes précédents :

$$E_0 \leq Kl \max(1, \|D^\alpha c\|^{2\alpha}) (\|D^\alpha f\|_{\mathcal{C}}^2 + \|f\|_\infty^2) \xi . \quad (4B.142)$$

□

L'échelle minimale que l'on utilise par la suite est l'échelle d'indice  $j_*$  définie par

$$j_* = \max(\log_2(\epsilon), j_*) \quad (4B.143)$$

telle que l'erreur  $E_0$  en dessous de cette échelle est bornée par

$$E_0 \leq Kl \max(1, \|D^\alpha c\|^{2\alpha}) (\|D^\alpha f\|_{\mathcal{C}}^2 + \|f\|_\infty^2) \max(\xi, \epsilon) . \quad (4B.144)$$

On ne considère donc pour la suite que les coefficients dont l'échelle est supérieure à  $2^{j_*}$ . Ces coefficients sont en particulier au dessus de l'échelle  $\epsilon$ .

## 4B.2.4 Ondelettes déformées

Les ondelettes déformées sont localisées au bord du domaine, leur nombre est donc petit et on les contrôle bien.

### 4B.2.4.1 Ondelettes déformées ne rencontrant pas $\mathcal{C}_s$

**Lemme 4B.7.** *Parmi les ondelettes déformées qui ne rencontrent pas  $\mathcal{C}_s$ , si on conserve les ondelettes déformées au dessus de l'échelle d'indice  $j_0 = \max(\log_2(\xi)/(2\alpha + 1), j_*)$ , le nombre  $M_4$  de coefficients conservés satisfait*

$$M_4 \leq Kl \xi^{-1/(2\alpha+1)} \quad (4B.145)$$

et l'erreur  $E_4$  sur les coefficients au dessus de l'échelle  $2^{j_*}$  satisfait

$$E_4 \leq Kl \max(1, \|D^\alpha c\|^{2\alpha}) \|D^\alpha f\|_{\bar{\mathcal{C}}}^2 \xi \quad (4B.146)$$

*Démonstration.* Le nombre d'ondelettes déformées à chaque échelle d'indice  $j$  est borné par  $Kl 2^{-j}$ . Pour ces ondelettes qui ne rencontrent pas  $\mathcal{C}_s$ , on utilise la régularité de  $f$  pour obtenir

$$|\langle f_s, W^* \psi_{j,k}^I \rangle| \leq K \max(1, \|D^\alpha c\|^\alpha) \|D^\alpha f\|_{\bar{\mathcal{C}}} 2^{(\alpha+1)j}. \quad (4B.147)$$

Si on conserve les ondelettes au dessus de l'échelle  $2^{j_0} \geq \xi^{1/(2\alpha+1)}$ , le nombre  $M_4$  de coefficients est borné par

$$M_4 \leq \sum_{j \geq j_0} \sum_{k, \mathcal{S}(W^* \psi_{j,k}^I) \cap \mathcal{C}_s = \emptyset} \quad (4B.148)$$

$$\leq \sum_{j \geq j_0} \#(k, \mathcal{S}(W^* \psi_{j,k}^I) \cap \mathcal{C}_s = \emptyset) \quad (4B.149)$$

$$\leq \sum_{j \geq j_0} Kl 2^{-j} \quad (4B.150)$$

$$\leq Kl 2^{-j_0} \quad (4B.151)$$

$$M_4 \leq Kl \xi^{-1/(2\alpha+1)}. \quad (4B.152)$$

Si  $j_0 = j_*$ , l'erreur  $E_4$  est nulle, sinon  $j_0 = \log_2(\xi)/(2\alpha + 1)$  et l'erreur  $E_4$  est majorée par

$$E_4 \leq \sum_{j_* < j < j_0} \sum_{k, \mathcal{S}(W^* \psi_{j,k}^I) \cap \mathcal{C}_s = \emptyset} |\langle f_s, W^* \psi_{j,k}^I \rangle|^2 \quad (4B.153)$$

$$\leq \sum_{j_* < j < j_0} \sum_{k, \mathcal{S}(W^* \psi_{j,k}^I) \cap \mathcal{C}_s = \emptyset} K^2 \max(1, \|D^\alpha c\|^{2\alpha})^2 \|D^\alpha f\|_{\bar{\mathcal{C}}}^2 2^{(\alpha+1)j} \quad (4B.154)$$

$$\leq \sum_{j_* < j < j_0} \#(k, \mathcal{S}(W^* \psi_{j,k}^I) \cap \mathcal{C}_s = \emptyset) K^2 \max(1, \|D^\alpha c\|^{2\alpha}) \|D^\alpha f\|_{\bar{\mathcal{C}}}^2 2^{2(\alpha+1)j} \quad (4B.155)$$

$$\leq \sum_{j_* < j < j_0} Kl 2^{-j} \max(1, \|D^\alpha c\|^{2\alpha}) \|D^\alpha f\|_{\bar{\mathcal{C}}}^2 2^{2(\alpha+1)j} \quad (4B.156)$$

$$\leq \sum_{j_* < j < j_0} Kl \max(1, \|D^\alpha c\|^{2\alpha}) \|D^\alpha f\|_{\bar{\mathcal{C}}}^2 2^{(2\alpha+1)j} \quad (4B.157)$$

$$\leq Kl \max(1, \|D^\alpha c\|^{2\alpha}) \|D^\alpha f\|_{\bar{\mathcal{C}}}^2 2^{(2\alpha+1)j_0} \quad (4B.158)$$

$$E_4 \leq Kl \max(1, \|D^\alpha c\|^{2\alpha}) \|D^\alpha f\|_{\bar{\mathcal{C}}}^2 \xi. \quad (4B.159)$$

□

#### 4B.2.4.2 Ondelettes déformées rencontrant $\mathcal{C}_s$

Deux types d'ondelettes déformées rencontrent  $\mathcal{C}_s$  : les ondelettes déformées proches des extrémités et les ondelettes très larges telles que  $j \geq s_0$ .

**Lemme 4B.8.** *Parmi les ondelettes déformées situées près des extrémités de  $\mathcal{C}$  et qui rencontrent  $\mathcal{C}_s$  avec  $j \leq s_0$ , si on conserve toutes les ondelettes au dessus de l'échelle d'indice  $j_0 = \max(\log_2(\xi)/2, \log_2(s) + (\log_2(s) - 2\log_2(\xi))/(2\alpha + 1), j_*)$ , le nombre  $M_5$  de ces ondelettes satisfait*

$$M_5 \leq K \min(|\log_2(\xi)|/2, |\log_2(\epsilon)|, \xi^{-1/(2\alpha+1)}) \quad (4B.160)$$

et l'erreur  $E_5$  au dessus de l'échelle  $2^{j_*}$  satisfait

$$E_5 \leq K \max(1, \|D^\alpha c\|^{2\alpha}) \|f\|_\infty^2 \xi. \quad (4B.161)$$

*Démonstration.* Le nombre de ces ondelettes situées près des extrémités de  $\mathcal{C}$  et qui rencontrent  $\mathcal{C}_s$  avec  $s \leq s_0$  est petit. Il est plus petit qu'une constante  $K$  si  $2^j \geq \eta = \max(\epsilon, s)$  où  $\eta$  correspond à la précision de la géométrie et augmente comme  $K \max(\epsilon, s) 2^{-j}$  pour  $2^j < \eta$ . La norme infinie de  $f$  et la régularité de  $h_s$  permettent d'obtenir

$$|\langle f_s, W^* \psi_{j,k}^I \rangle| \leq K \|f\|_\infty 2^j \quad \text{pour } j \geq s \quad (4B.162)$$

$$|\langle f_s, W^* \psi_{j,k}^I \rangle| \leq K \max(1, \|D^\alpha c\|^\alpha) \|f\|_\infty 2^{\alpha(j - \log_2(s))} 2^j \quad \text{pour } j < s. \quad (4B.163)$$

L'indice de l'échelle de coupure  $j_0$  est définie comme

$$j_0 = \max(\log_2(\xi)/2, \log_2(s) + (\log_2(\xi) - 2\log_2(s))/(2\alpha + 1), j_*). \quad (4B.164)$$

On distingue les deux cas  $\log_2(\xi)/2 \geq \log_2(\epsilon)$  et  $\log_2(\xi)/2 < \log_2(\epsilon)$  si  $\epsilon \geq s$  et les deux cas  $\log_2(\xi)/2 \geq \log_2(s)$  et  $\log_2(\xi)/2 < \log_2(s)$  si  $\epsilon \leq s$ .

Lorsque  $\epsilon \geq s$ , la régularité de  $h_s$  n'a pas à être utilisée, la fonction se comporte comme si elle n'était pas lissée.

Si  $\epsilon \geq s$  et  $\log_2(\xi)/2 \geq \log_2(\epsilon)$ ,

$$j_0 = \max(\log_2(\xi)/2, j_*) \quad (4B.165)$$

$$j_0 \geq \max(\log_2(\xi)/2, \log_2(\epsilon)). \quad (4B.166)$$

Le nombre de coefficients conservés  $M_5$  est majoré par

$$M_5 \leq \sum_{j \geq j_0} \sum_{k, \mathcal{S}(W^* \psi_{j,k}^I) \cap \mathcal{C}_s \neq \emptyset, \text{bord}} \quad (4B.167)$$

$$\leq \sum_{j \geq j_0} \#(k, \mathcal{S}(W^* \psi_{j,k}^I) \cap \mathcal{C}_s \neq \emptyset, \text{bord}) \quad (4B.168)$$

$$\leq \sum_{j \geq j_0} K \quad (4B.169)$$

$$M_5 \leq K |\log_2(\xi)|/2. \quad (4B.170)$$

Si  $j_0 = j_*$ , l'erreur  $E_5$  au dessus de l'échelle  $2^{j_*}$  est nulle, sinon  $j_0 = \log_2(\xi)/2$  et l'erreur  $E_5$  est contrôlée par

$$E_5 \leq \sum_{j_* < j < j_0} \sum_{k, \mathcal{S}(W^* \psi_{j,k}^I) \cap \mathcal{C}_s \neq \emptyset, \text{bord}} |\langle f_s, W^* \psi_{j,k}^I \rangle|^2 \quad (4B.171)$$

$$E_5 \leq \sum_{\log_2(\epsilon) \leq j < j_0} \sum_{k, \mathcal{S}(W^* \psi_{j,k}^I) \cap \mathcal{C}_s \neq \emptyset, \text{bord}} |\langle f_s, W^* \psi_{j,k}^I \rangle|^2. \quad (4B.172)$$



On utilise alors la décroissance des produits scalaires

$$E_5 \leq \sum_{\log_2(\epsilon) \leq j < j_0} \sum_{k, \mathcal{S}(W^* \psi_{j,k}^I) \cap C_s \neq \emptyset, \text{bord}} K^2 \|f\|_\infty^2 2^{2j} \quad (4B.173)$$

$$E_5 \leq \sum_{\log_2(\epsilon) \leq j < j_0} \#(k, \mathcal{S}(W^* \psi_{j,k}^I) \cap C_s \neq \emptyset, \text{bord}) K^2 \|f\|_\infty^2 2^{2j} . \quad (4B.174)$$

On insère le nombre de ces ondelettes

$$E_5 \leq \sum_{\log_2(\epsilon) \leq j < j_0} K \|f\|_\infty^2 2^{2j} \quad (4B.175)$$

$$\leq \sum_{\log_2(\epsilon) \leq j < j_0} K \|f\|_\infty^2 2^{2j} \quad (4B.176)$$

$$\leq K \|f\|_\infty^2 2^{2j_0} \quad (4B.177)$$

$$\leq K \|f\|_\infty^2 \xi \quad (4B.178)$$

$$E_5 \leq K \max(1, \|D^\alpha c\|^\alpha)^2 \|f\|_\infty^2 \xi . \quad (4B.179)$$

Si  $\epsilon \geq s$  et  $\log_2(\xi)/2 < \log_2(\epsilon)$ ,  $j_0 = j_\star \geq \log_2(\epsilon)$ . Le nombre de ces coefficients  $M_5$  au dessus de l'échelle d'indice  $j_0 = j_\star$  devient petit :

$$M_5 \leq \sum_{j \geq j_0} \sum_{k, \mathcal{S}(W^* \psi_{j,k}^I) \cap C_s \neq \emptyset, \text{bord}} \quad (4B.180)$$

$$\leq \sum_{j \geq j_0} \#(k, \mathcal{S}(W^* \psi_{j,k}^I) \cap C_s \neq \emptyset, \text{bord}) \quad (4B.181)$$

$$\leq \sum_{j \geq j_0} K \quad (4B.182)$$

$$M_5 \leq K |\log_2(\epsilon)| . \quad (4B.183)$$

L'erreur  $E_5$  est elle nulle puisque  $j_0 = j_\star$ .

On se place maintenant dans le cas où  $\epsilon \leq s$ , on doit donc utiliser des échelles plus fines que  $\eta = s$ .

Si  $\epsilon \leq s$  et  $\log_2(\xi)/2 \geq \log_2(s)$ ,  $j_0 = \log_2(\xi)/2$ . Le nombre de coefficients conservés  $M_5$  est majoré par

$$M_5 \leq \sum_{j \geq j_0} \sum_{k, \mathcal{S}(W^* \psi_{j,k}^I) \cap C_s \neq \emptyset, \text{bord}} \quad (4B.184)$$

$$\leq \sum_{j \geq j_0} \#(k, \mathcal{S}(W^* \psi_{j,k}^I) \cap C_s \neq \emptyset, \text{bord}) \quad (4B.185)$$

$$\leq \sum_{j \geq j_0} K \quad (4B.186)$$

$$M_5 \leq K |\log_2(\xi)|/2 . \quad (4B.187)$$

L'erreur  $E_5$  est contrôlée par

$$E_5 \leq \sum_{j_* < j < j_0} \sum_{k, \mathcal{S}(W^* \psi_{j,k}^I) \cap C_s \neq \emptyset, \text{bord}} |\langle f_s, W^* \psi_{j,k}^I \rangle|^2 \quad (4B.188)$$

$$E_5 \leq \sum_{\log_2(s) \leq j < j_0} \sum_{k, \mathcal{S}(W^* \psi_{j,k}^I) \cap C_s \neq \emptyset, \text{bord}} |\langle f_s, W^* \psi_{j,k}^I \rangle|^2 \\ + \sum_{j_* < j < \log_2(s)} \sum_{k, \mathcal{S}(W^* \psi_{j,k}^I) \cap C_s \neq \emptyset, \text{bord}} |\langle f_s, W^* \psi_{j,k}^I \rangle|^2 . \quad (4B.189)$$

On utilise alors la décroissance des produits scalaires

$$E_5 \leq \sum_{\log_2(s) \leq j < j_0} \sum_{k, \mathcal{S}(W^* \psi_{j,k}^I) \cap C_s \neq \emptyset, \text{bord}} K^2 \|f\|_\infty^2 2^{2j} \\ + \sum_{j_* < j < \log_2(s)} \sum_{k, \mathcal{S}(W^* \psi_{j,k}^I) \cap C_s \neq \emptyset, \text{bord}} K^2 \max(1, \|D^\alpha c\|^{2\alpha}) \|f\|_\infty^2 2^{2\alpha(j - \log_2(s))} 2^{2j} \quad (4B.190)$$

$$E_5 \leq \sum_{\log_2(s) \leq j < j_0} \#(k, \mathcal{S}(W^* \psi_{j,k}^I) \cap C_s \neq \emptyset, \text{bord}) K^2 \|f\|_\infty^2 2^{2j} \\ + \sum_{j < \log_2(s)} \#(k, \mathcal{S}(W^* \psi_{j,k}^I) \cap C_s \neq \emptyset, \text{bord}) \\ \times K^2 \max(1, \|D^\alpha c\|^{2\alpha}) \|f\|_\infty^2 2^{2\alpha(j - \log_2(s))} 2^{2j} . \quad (4B.191)$$

On insère le nombre de ces ondelettes

$$E_5 \leq \sum_{\log_2(s) \leq j < j_0} K \|f\|_\infty^2 2^{2j} \\ + \sum_{j < \log_2(s)} K s 2^{-j} \max(1, \|D^\alpha c\|^{2\alpha}) \|f\|_\infty^2 2^{2\alpha(j - \log_2(s))} 2^{2j} \quad (4B.192)$$

$$\leq \sum_{\log_2(s) \leq j < j_0} K \|f\|_\infty^2 2^{2j} \\ + \sum_{j < \log_2(s)} K \max(1, \|D^\alpha c\|^{2\alpha}) \|f\|_\infty^2 s 2^j 2^{2\alpha(j - \log_2(s))} \quad (4B.193)$$

$$\leq K \|f\|_\infty^2 2^{2j_0} + K s^2 \max(1, \|D^\alpha c\|^{2\alpha}) \|f\|_\infty \quad (4B.194)$$

$$\leq K \max(1, \|D^\alpha c\|^\alpha)^2 \|f\|_\infty^2 (\xi + s^2) \quad (4B.195)$$

$$E_5 \leq K \max(1, \|D^\alpha c\|^{2\alpha}) \|f\|_\infty^2 \xi . \quad (4B.196)$$

Sinon  $\log_2(s) > \log_2(\xi)/2$  et  $j_0 = \max(\log_2(s) + (\log_2(\xi) - 2\log_2(s))/(2\alpha + 1), j_*)$  donc le nombre de coefficients est majoré par

$$M_5 \leq \sum_{j \geq j_0} \sum_{k, \mathcal{S}(W^* \psi_{j,k}^I) \cap C_s \neq \emptyset, \text{bord}} \quad (4B.197)$$

$$\leq \sum_{j \geq \log_2(s)} \sum_{k, \mathcal{S}(W^* \psi_{j,k}^I) \cap C_s \neq \emptyset, \text{bord}} + \sum_{\log_2(s) > j \geq j_0} \sum_{k, \mathcal{S}(W^* \psi_{j,k}^I) \cap C_s \neq \emptyset, \text{bord}} \quad (4B.198)$$

$$\leq \sum_{j \geq \log_2(s)} \#(k, \mathcal{S}(W^* \psi_{j,k}^I) \cap \mathcal{C}_s \neq \emptyset, \text{bord}) \quad (4B.199)$$

$$+ \sum_{\log_2(s) > j \geq j_0} \#(k, \mathcal{S}(W^* \psi_{j,k}^I) \cap \mathcal{C}_s \neq \emptyset, \text{bord}) \quad (4B.200)$$

$$\leq \sum_{j \geq \log_2(s)} K + \sum_{\log_2(s) > j \geq j_0} K s 2^{-j} \quad (4B.201)$$

$$\leq \sum_{j \geq \log_2(s)} K + K s 2^{-j_0} \quad (4B.202)$$

$$\leq K(\log_2(s) + s^{2/(2\alpha+1)} \xi^{-1/(2\alpha+1)}) \quad (4B.203)$$

$$\leq K s^{2/(2\alpha+1)} \xi^{-1/(2\alpha+1)} \quad (4B.204)$$

$$M_5 \leq K \xi^{-1/(2\alpha+1)} . \quad (4B.204)$$

Si  $j_0 = j_*$ , l'erreur  $E_5$  est nulle sinon  $j_0 = \log_2(s) + (\log_2(\xi) - 2 \log_2(s))/(2\alpha + 1)$  et l'erreur est contrôlée par

$$E_5 \leq \sum_{j_* < j < j_0} \sum_{k, \mathcal{S}(W^* \psi_{j,k}^I) \cap \mathcal{C}_s \neq \emptyset, \text{bord}} |\langle f_s, W^* \psi_{j,k}^I \rangle|^2 \quad (4B.205)$$

$$\leq \sum_{j_* < j < j_0} \sum_{k, \mathcal{S}(W^* \psi_{j,k}^I) \cap \mathcal{C}_s \neq \emptyset, \text{bord}} K^2 \max(1, \|D^\alpha c\|^\alpha)^2 \|f\|_\infty^2 2^{2\alpha(j - \log_2(s))} 2^{2j} \quad (4B.206)$$

$$\leq \sum_{j_* < j < j_0} \#(k, \mathcal{S}(W^* \psi_{j,k}^I) \cap \mathcal{C}_s \neq \emptyset, \text{bord}) K^2 \max(1, \|D^\alpha c\|^{2\alpha}) \|f\|_\infty^2 2^{2\alpha(j - \log_2(s))} 2^{2j} \quad (4B.207)$$

$$\leq \sum_{j_* < j < j_0} K 2^{\log_2(s) - j} \max(1, \|D^\alpha c\|^{2\alpha}) \|f\|_\infty^2 2^{2\alpha(j - \log_2(s))} 2^{2j} \quad (4B.208)$$

$$\leq \sum_{j_* < j < j_0} K s^2 \max(1, \|D^\alpha c\|^{2\alpha}) \|f\|_\infty^2 2^{(2\alpha+1)(j - \log_2(s))} \quad (4B.209)$$

$$\leq K s^2 \max(1, \|D^\alpha c\|^{2\alpha}) \|f\|_\infty^2 2^{(2\alpha+1)(j_0 - \log_2(s))} \quad (4B.210)$$

$$E_5 \leq K \max(1, \|D^\alpha c\|^{2\alpha}) \|f\|_\infty^2 \xi . \quad (4B.211)$$

□

**Lemme 4B.9.** Le nombre  $M_6$  d'ondelettes déformées rencontrant  $\mathcal{C}_s$  avec  $2^j \geq s_0$  satisfait

$$M_6 \leq K l s_0^{-1} \quad (4B.212)$$

*Démonstration.* Les ondelettes déformées restantes rencontrant  $\mathcal{C}_s$  avec  $2^j \geq s_0$  sont des ondelettes très larges, elles sont donc en petit nombre. Il y a au plus  $K l 2^{-j}$  ondelettes déformées par échelle et donc au plus  $K l s_0^{-1}$  ondelettes au dessus de l'échelle  $s_0$ . □

## 4B.2.5 Bandelettes intérieures

Les bandelettes intérieures sont séparées en trois grands ensembles. Le premier est celui des bandelettes qui ne rencontrent pas  $\mathcal{C}_s$ , le deuxième celui des bandelettes rencontrant  $\mathcal{C}_s$  avec  $2^{j_2} \geq s$  et le dernier celui des bandelettes rencontrant  $\mathcal{C}_s$  avec  $2^{j_2} < s$ . On utilise la régularité de  $f$  pour le premier. Les deux derniers combinent la régularité de  $g$  le long de la géométrie avec la régularité des ondelettes pour le deuxième et la régularité de  $h_s$  pour le dernier.

#### 4B.2.5.1 Bandelettes intérieures ne rencontrant pas $\mathcal{C}_s$

**Lemme 4B.10.** Parmi les bandelettes intérieures ne rencontrant pas  $\mathcal{C}_s$ , on conserve

- si  $j_1 \geq j_2$ , toutes les bandelettes d'indice d'échelles  $(j_1, j_2)$  telles que

$$j_1 \geq j_0 = \max(\log_2(\xi)/(2\alpha), j_\star) \quad (4B.213)$$

et

$$j_2 \geq \max(j_0 + 1/2(j_1 - j_0), j_\star) \quad (4B.214)$$

- si  $j_2 < j_1$ , toutes les bandelettes d'indice d'échelles  $(j_1, j_2)$  telles que

$$j_2 \geq j_0 = \max(\log_2(\xi)/(2\alpha), j_\star) \quad (4B.215)$$

et

$$j_1 \geq \max(j_0 + 1/2(j_2 - j_0), j_\star) \quad (4B.216)$$

alors le nombre total  $M_7$  de bandelettes conservées satisfait

$$M_7 \leq Kl \xi^{-1/\alpha} \quad (4B.217)$$

et l'erreur  $E_7$  au dessus de l'échelle  $2^{j_\star}$  satisfait

$$E_7 \leq Kl \max(1, \|D^\alpha c\|^{2\alpha}) \|D^\alpha f\|_{\bar{\mathcal{C}}}^2 \xi. \quad (4B.218)$$

*Démonstration.* Les produits scalaires avec les bandelettes satisfont

$$\langle f_s, b_{j,k} \rangle = \langle f_s, b_{j_1, j_2, k} \rangle \quad (4B.219)$$

$$= \langle f_s, W^*(\psi_{j_1, k_1} \otimes \psi_{j_2, k_2}) \rangle \quad (4B.220)$$

$$\langle f_s, b_{j,k} \rangle = \langle W f_s, \psi_{j_1, k_1} \otimes \psi_{j_2, k_2} \rangle \quad (4B.221)$$

On utilise encore l'estimation de la régularité de  $W f_s$

$$\frac{\partial^\alpha}{\partial x_2^\alpha} (W f_s)(x) = W \left( \frac{\partial^\alpha}{\partial x_2^\alpha} f_s \right)(x) \quad (4B.222)$$

et par le lemme 4B.6

$$\left| \frac{\partial^\alpha}{\partial x_1^\alpha} (W f_s)(x) \right| \leq K \|D^\alpha c\| \max_{|\beta| \leq \alpha} |W(D^\beta f_s)(x)| \quad (4B.223)$$

donc si  $x \notin w(\mathcal{C}_s)$

$$\left| \frac{\partial^\alpha}{\partial x_2^\alpha} (W f_s)(x) \right| \leq \|D^\alpha f\|_{\bar{\mathcal{C}}} \quad (4B.224)$$

et

$$\left| \frac{\partial^\alpha}{\partial x_1^\alpha} (W f_s)(x) \right| \leq K \|D^\alpha c\| \|D^\alpha f\|_{\bar{\mathcal{C}}}. \quad (4B.225)$$

Si  $\mathcal{S}(\psi_{j_1, k_1} \otimes \psi_{j_2, k_2}) \cap w(\mathcal{C}_s) = \emptyset$  on applique le lemme 4.3 pour obtenir

$$|\langle Wf_s, \psi_{j_1, k_1} \otimes \psi_{j_2, k_2} \rangle| \leq K \|D^\alpha f\|_{\bar{\mathcal{C}}} 2^{(\alpha+1/2)j_2} 2^{j_1/2} \quad (4B.226)$$

$$|\langle Wf_s, \psi_{j_1, k_1} \otimes \psi_{j_2, k_2} \rangle| \leq K \|D^\alpha c\| \|D^\alpha f\|_{\bar{\mathcal{C}}} 2^{(\alpha+1/2)j_1} 2^{j_2/2} \quad (4B.227)$$

et finalement

$$|\langle Wf_s, \psi_{j_1, k_1} \otimes \psi_{j_2, k_2} \rangle| \leq K \max(1, \|D^\alpha c\|^\alpha) \|D^\alpha f\|_{\bar{\mathcal{C}}} 2^{\alpha \min(j_1, j_2)} 2^{j_1/2} 2^{j_2/2} \quad (4B.228)$$

ce qui implique

$$|\langle f_s, b_{j_1, j_2, k} \rangle| \leq K \max(1, \|D^\alpha c\|^\alpha) \|D^\alpha f\|_{\bar{\mathcal{C}}} 2^{\alpha \min(j_1, j_2)} 2^{j_1/2} 2^{j_2/2} . \quad (4B.229)$$

Pour les bandelettes telles que  $j_1 \geq j_2$ , la règle est de conserver les bandelettes satisfaisant

$$j_1 \geq \max(\log_2(\xi)/(2\alpha), j_\star) \quad (4B.230)$$

$$j_1 \geq j_0 \quad (4B.231)$$

et

$$j_2 \geq \max(j_0 + 1/2(j_1 - j_0), j_\star) \quad (4B.232)$$

$$j_2 \geq j_2(j_1) \quad (4B.233)$$

Le nombre  $M_{7,1}$  de coefficients conservés est majoré par

$$M_{7,1} \leq \sum_{j_1 \geq j_0} \sum_{j_1 \geq j_2 \geq j_2(j_1)} \sum_{k, b_{j_1, j_2, k} \cap \mathcal{C}_s = \emptyset} \quad (4B.234)$$

$$\leq \sum_{j_1 \geq j_0} \sum_{j_2 \geq j_2(j_1)} \sum_{k, b_{j_1, j_2, k} \cap \mathcal{C}_s = \emptyset} \quad (4B.235)$$

$$M_{7,1} \leq \sum_{j_1 \geq j_0} \sum_{j_2 \geq j_2(j_1)} \#(k, b_{j_1, j_2, k} \cap \mathcal{C}_s = \emptyset) . \quad (4B.236)$$

Soit en insérant le nombre de bandelettes par échelle

$$M_{7,1} \leq \sum_{j_1 \geq j_0} \sum_{j_2 \geq j_2(j_1)} Kl 2^{-j_1} 2^{-j_2} \quad (4B.237)$$

$$\leq \sum_{j_1 \geq j_0} Kl 2^{-j_1} 2^{-j_2(j_1)} \quad (4B.238)$$

$$\leq \sum_{j_1 \geq j_0} Kl 2^{-j_1} 2^{-j_0 - 1/2(j_1 - j_0)} \quad (4B.239)$$

$$\leq Kl 2^{-2j_0} \quad (4B.240)$$

$$M_{7,1} \leq Kl \xi^{-1/\alpha} . \quad (4B.241)$$

L'erreur  $E_{7,1}$  est bornée par

$$\begin{aligned} E_{7,1} &\leq \sum_{j_1 \geq j_0} \sum_{j_\star < j_2 < \min(j_2(j_1), j_1)} \sum_{k, b_{j_1, j_2, k} \cap \mathcal{C}_s = \emptyset} |\langle f_s, b_{j_1, j_2, k} \rangle|^2 \\ &+ \sum_{j_\star < j_1 < j_0} \sum_{j_\star < j_2 \leq j_1} \sum_{k, b_{j_1, j_2, k} \cap \mathcal{C}_s = \emptyset} |\langle f_s, b_{j_1, j_2, k} \rangle|^2 . \end{aligned} \quad (4B.242)$$

On insère alors l'estimation des produits scalaires

$$\begin{aligned}
E_{7,1} &\leq \sum_{j_1 \geq j_0} \sum_{j_* < j_2 \leq \min(j_2(j_1), j_1)} \sum_{k, b_{j_1, j_2, k} \cap \mathcal{C}_s = \emptyset} K \max(1, \|D^\alpha c\|^\alpha) \|D^\alpha f\|_{\bar{\mathcal{C}}} 2^{(2\alpha+1)j_2} 2^{j_1} \\
&\quad + \sum_{j_* < j_1 < j_0} \sum_{j_* < j_2 \leq j_1} \sum_{k, b_{j_1, j_2, k} \cap \mathcal{C}_s = \emptyset} K \max(1, \|D^\alpha c\|^\alpha) \|D^\alpha f\|_{\bar{\mathcal{C}}} 2^{(2\alpha+1)j_2} 2^{j_1}
\end{aligned} \tag{4B.243}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \sum_{j_1 \geq j_0} \sum_{j_* < j_2 \leq \min(j_2(j_1), j_1)} \#(k, b_{j_1, j_2, k} \cap \mathcal{C}_s = \emptyset) \\
&\quad \times K \max(1, \|D^\alpha c\|^\alpha) \|D^\alpha f\|_{\bar{\mathcal{C}}} 2^{(2\alpha+1)j_2} 2^{j_1} \\
&\quad + \sum_{j_* < j_1 < j_0} \sum_{j_* < j_2 \leq j_1} \#(k, b_{j_1, j_2, k} \cap \mathcal{C}_s = \emptyset) \\
&\quad \times K \max(1, \|D^\alpha c\|^\alpha) \|D^\alpha f\|_{\bar{\mathcal{C}}} 2^{(2\alpha+1)j_2} 2^{j_1}
\end{aligned} \tag{4B.244}$$

et en insérant le nombre de bandelettes par échelle

$$\begin{aligned}
&\leq \sum_{j_1 \geq j_0} \sum_{j_* < j_2 \leq \min(j_2(j_1), j_1)} Kl 2^{-j_1} 2^{-j_2} \max(1, \|D^\alpha c\|^\alpha) \|D^\alpha f\|_{\bar{\mathcal{C}}} 2^{(2\alpha+1)j_2} 2^{j_1} \\
&\quad + \sum_{j_* < j_1 < j_0} \sum_{j_2 \leq j_1} Kl 2^{-j_1} 2^{-j_2} \max(1, \|D^\alpha c\|^\alpha) \|D^\alpha f\|_{\bar{\mathcal{C}}} 2^{(2\alpha+1)j_2} 2^{j_1}
\end{aligned} \tag{4B.245}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \sum_{j_1 \geq j_0} \sum_{j_* < j_2 \leq \min(j_2(j_1), j_1)} Kl \max(1, \|D^\alpha c\|^\alpha) \|D^\alpha f\|_{\bar{\mathcal{C}}} 2^{2\alpha j_2} \\
&\quad + \sum_{j_* < j_1 < j_0} \sum_{j_* < j_2 \leq j_1} Kl \max(1, \|D^\alpha c\|^\alpha) \|D^\alpha f\|_{\bar{\mathcal{C}}} 2^{2\alpha j_2}
\end{aligned} \tag{4B.246}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \sum_{j_1 \geq j_0, j_2(j_1) > j_*} Kl \max(1, \|D^\alpha c\|^\alpha) \|D^\alpha f\|_{\bar{\mathcal{C}}} 2^{2\alpha j_2(j_1)} \\
&\quad + \sum_{j_* < j_1 < j_0} Kl \max(1, \|D^\alpha c\|^\alpha) \|D^\alpha f\|_{\bar{\mathcal{C}}} 2^{2\alpha j_1}
\end{aligned} \tag{4B.247}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \sum_{j_1 \geq j_0} Kl \max(1, \|D^\alpha c\|^\alpha) \|D^\alpha f\|_{\bar{\mathcal{C}}} 2^{2\alpha(j_0+1/2(j_1-j_0))} \\
&\quad + \sum_{j_1 < j_0} Kl \max(1, \|D^\alpha c\|^\alpha) \|D^\alpha f\|_{\bar{\mathcal{C}}} 2^{2\alpha j_1}
\end{aligned} \tag{4B.248}$$

$$\leq Kl \max(1, \|D^\alpha c\|^\alpha) \|D^\alpha f\|_{\bar{\mathcal{C}}} 2^{2\alpha j_0} + Kl \max(1, \|D^\alpha c\|^\alpha) \|D^\alpha f\|_{\bar{\mathcal{C}}} 2^{2\alpha j_0} \tag{4B.249}$$

$$\leq Kl \max(1, \|D^\alpha c\|^\alpha) \|D^\alpha f\|_{\bar{\mathcal{C}}} 2^{2\alpha j_0} \tag{4B.250}$$

$$E_{7,1} \leq Kl \max(1, \|D^\alpha c\|^\alpha) \|D^\alpha f\|_{\bar{\mathcal{C}}} \xi . \tag{4B.251}$$

Si  $j_1 \leq j_2$ , la situation est la symétrique de la précédente. Les bandelettes conservées sont celles satisfaisant

$$j_2 \geq \max(\log_2(\xi)/(2\alpha), j_*) \tag{4B.252}$$

$$j_2 \geq j_0 \tag{4B.253}$$

et

$$j_1 \geq \max(j_0 + 1/2(j_2 - j_0), j_*) \quad (4B.254)$$

$$j_1 \geq j_1(j_2) . \quad (4B.255)$$

Le nombre  $M_{7,2}$  de bandelettes conservées et l'erreur résultante  $E_{7,2}$  satisfont donc

$$M_{7,2} \leq Kl \xi^{-1/\alpha} \quad (4B.256)$$

$$E_{7,2} \leq Kl \max(1, \|D^\alpha c\|^\alpha) \|D^\alpha f\|_{\overline{C}} \xi . \quad (4B.257)$$

□

#### 4B.2.5.2 Bandelettes intérieures rencontrant $\mathcal{C}_s$ avec $j_2 \geq \log_2(s)$

Lorsque  $2^{j_2} \geq s$ , les bandelettes ne voient pas le lissage et la fonction  $f_s$  se comporte comme une fonction singulière le long de la géométrie. Pour trouver de la régularité, on utilise la régularité du produit scalaire de l'ondelette verticale avec  $f$  au voisinage de la courbe  $C$  qui provient de la régularité de l'ondelette elle-même. Ceci n'est possible que si la bandelette reste à l'intérieur de  $[\eta, l - \eta] \times \mathbb{R}$  où l'on contrôle la forme du domaine et on montre que les bandelettes manquantes sont peu nombreuses.

**Lemme 4B.11.** *Parmi les bandelettes intérieures qui rencontrent  $\mathcal{C}_s$  avec une échelle d'indice  $j_2 \geq \max(\log_2(s), j_*)$  et telle que  $\mathcal{S}(b_{j_1, j_2, k}) \subset [\eta, l - \eta] \times \mathbb{R}$ , si on conserve les bandelettes telles que*

$$j_2 \geq \max(\log_2(s), j_*) = \max(\log_2(s), \log_2(\xi), \log_2(\epsilon)) = j_0 \quad (4B.258)$$

et

$$j_1 \geq \max(\log_2(\xi)/(2\alpha) + (j_2 + j_0)/(4\alpha), j_*) \quad (4B.259)$$

$$(4B.260)$$

le nombre  $M_8$  de coefficients conservés satisfait

$$M_8 \leq Kl \xi^{-1/(2\alpha)} \max(s, \epsilon)^{-1/(2\alpha)} \quad (4B.261)$$

et l'erreur  $E_8$  satisfait

$$E_8 \leq Kl \max(1, \|D^\alpha c\|^\alpha)^2 \|f\|_\infty^2 \xi . \quad (4B.262)$$

*Démonstration.* L'idée centrale de cette démonstration est d'écrire les coefficients de bandelettes comme des doubles produits scalaires de fonctions monodimensionnelles :

$$\langle f_s, b_{j_1, j_2, k} \rangle = \langle W f_s, \psi_{j_1, k_1} \otimes \psi_{j_2, k_2} \rangle \quad (4B.263)$$

$$\langle f_s, b_{j_1, j_2, k} \rangle = \langle \langle W f_s, \psi_{j_2, k_2} \rangle, \psi_{j_1, k_1} \rangle \quad (4B.264)$$

et de montrer que le produit scalaire intérieur  $\langle Wf_s, \psi_{j_2, k_2} \rangle$  est une fonction régulière de  $x_1$ .

$$\langle Wf_s, \psi_{j_2, k_2} \rangle(x_1) = \int_{x_2} Wf_s(x) \psi_{j_2, k_2}(x_2) dx_2 \quad (4B.265)$$

$$= \int_{x_2} f_s(x_1, x_2 - g(x_1)) \psi_{j_2, k_2}(x_2) dx_2 \quad (4B.266)$$

$$= \int_{x_2} \int_u f(x_1 - u_1, x_2 - g(x_1) - u_2) h_s(u) du \psi_{j_2, k_2}(x_2) dx_2 \quad (4B.267)$$

$$\langle Wf_s, \psi_{j_2, k_2} \rangle(x_1) = \int_u h_s(u) \int_{x_2} f(x_1 - u_1, x_2 - g(x_1) - u_2) \psi_{j_2, k_2}(x_2) dx_2 du . \quad (4B.268)$$

Maintenant si  $s \leq x_1 \leq l - s$  on peut décomposer  $g$  en deux parties

$$\begin{aligned} \langle Wf_s, \psi_{j_2, k_2} \rangle(x_1) &= \int_u h_s(u) \int_{x_2} f(x_1 - u_1, x_2 - c(x_1 - u_1) - u_2) \\ &\quad \times \psi_{j_2, k_2}(x_2 - c(x_1 - u_1) + g(x_1)) dx_2 du . \end{aligned} \quad (4B.269)$$

On a donc

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\partial^\alpha}{\partial x_1^\alpha} \langle Wf_s, \psi_{j_2, k_2} \rangle(x_1) \right| \\ &= \frac{\partial^\alpha}{\partial x_1^\alpha} \int_u h_s(u) \int_{x_2} f(x_1 - u_1, x_2 - c(x_1 - u_1) - u_2) \\ &\quad \times \psi_{j_2, k_2}(x_2 - c(x_1 - u_1) + g(x_1)) dx_2 du . \end{aligned} \quad (4B.270)$$

On souhaite maintenant écrire

$$\begin{aligned} &= \int_u h_s(u) \int_{x_2} \frac{\partial^\alpha}{\partial x_1^\alpha} (f(x_1 - u_1, x_2 - c(x_1 - u_1) - u_2) \\ &\quad \times \psi_{j_2, k_2}(x_2 - c(x_1 - u_1) + g(x_1))) dx_2 du . \end{aligned} \quad (4B.271)$$

Ceci suppose que la dérivée d'ordre  $\alpha$  selon de l'intérieur de l'intégrale soit bornée pour obtenir

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\partial^\alpha}{\partial x_1^\alpha} \langle Wf_s, \psi_{j_2, k_2} \rangle(x_1) \right| \\ & \leq \int_u |h_s(u)| \int_{x \in D_{j_2, k_2, x_1}} \left| \frac{\partial^\alpha}{\partial x_1^\alpha} (f(x_1 - u_1, x_2 - c(x_1 - u_1) - u_2) \right. \\ & \quad \left. \times \psi_{j_2, k_2}(x_2 - c(x_1 - u_1) + g(x_1))) \right| dx_2 du \end{aligned} \quad (4B.272)$$

où  $D_{j_2, k_2, x_1, u_1} = \mathcal{S}(\psi_{j_2, k_2}) + c(x_1 - u_1) - g(x_1)$ .

On montre alors que quitte à modifier  $f$  par 0 sur la courbe  $\mathcal{C}$ , un ensemble de mesure nulle, ce qui ne modifiera pas les produits scalaires, les dérivées selon  $x_1$  de la fonction à



l'intérieur de l'intégrale peuvent être bornées pour tout  $u$ ,  $|u| < s$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^\alpha}{\partial x_1^\alpha} (f(x_1 - u_1, x_2 - c(x_1 - u_1) - u_2) \psi_{j_2, k_2}(x_2 - c(x_1 - u_1) + g(x_1))) \\ &= \sum_{\beta=0}^{\alpha} \binom{\beta}{\alpha} \frac{\partial^{\alpha-\beta}}{\partial x_1^{\alpha-\beta}} (f(x_1 - u_1, x_2 - c(x_1 - u_1) - u_2)) \\ & \quad \times \frac{\partial^\beta}{\partial x_1^\beta} (\psi_{j_2, k_2}(x_2 - c(x_1 - u_1) + g(x_1))) . \end{aligned} \quad (4B.273)$$

On montre que le premier facteur de chaque terme est majoré par

$$\left| \frac{\partial^{\alpha-\beta}}{\partial x_1^{\alpha-\beta}} (f(x_1 - u_1, x_2 - c(x_1 - u_1) - u_2)) \right| \leq K \max(1, \|D^\alpha c\|^\alpha) \|D^\alpha f\|_{\bar{\mathcal{C}}} \quad (4B.274)$$

si l'on modifie  $f$  sur la courbe  $\mathcal{C}$  par

$$f(x_1, c(x_1)) = 0 . \quad (4B.275)$$

En effet, on a déjà vérifié par le lemme 4B.6 que la fonction  $f(x_1 - u_1, x_2 - c(x_1 - u_1) - u_2)$  est dérivable jusqu'à l'ordre  $\alpha$  en dehors l'axe  $x_2 = c(u_1)$  et que ses dérivées partielles sont bornées :

$$\left| \frac{\partial^{\alpha-\beta}}{\partial x_1^{\alpha-\beta}} (f(x_1 - u_1, x_2 - c(x_1 - u_1) - u_2)) \right| \leq K \max(1, \|D^\alpha c\|^\alpha) \|D^\alpha f\|_{\bar{\mathcal{C}}} . \quad (4B.276)$$

Il ne reste donc plus à le vérifier que sur cet axe. La fonction  $f$  a été modifiée pour que la valeur de  $f(x_1 - u_1, x_2 - c(x_1 - u_1) - u_2)$  soit nulle dès que  $x_2 = u_2$  donc dans ce cas

$$\frac{\partial^{\alpha-\beta}}{\partial x_1^{\alpha-\beta}} (f(x_1 - u_1, x_2 - c(x_1 - u_1) - u_2)) = \frac{\partial^{\alpha-\beta}}{\partial x_1^{\alpha-\beta}} (f(x_1 - u_1, c(x_1 - u_1))) \quad (4B.277)$$

$$= \frac{\partial^{\alpha-\beta}}{\partial x_1^{\alpha-\beta}} (0) \quad (4B.278)$$

$$\frac{\partial^{\alpha-\beta}}{\partial x_1^{\alpha-\beta}} (f(x_1 - u_1, x_2 - c(x_1 - u_1) - u_2)) = 0 \quad (4B.279)$$

et

$$\left| \frac{\partial^{\alpha-\beta}}{\partial x_1^{\alpha-\beta}} (f(x_1 - u_1, x_2 - c(x_1 - u_1) - u_2)) \right| \leq K \max(1, \|D^\alpha c\|^\alpha) \|D^\alpha f\|_{\bar{\mathcal{C}}} . \quad (4B.280)$$

Le second facteur est majoré en utilisant la régularité de  $c$ , de  $g - c$  et de l'ondelette  $\psi_{j_2, k_2}$  elle-même ainsi que du corollaire suivant du lemme 4A.10 démontré dans l'annexe 4A.

**Corollaire 4B.12.** *Si  $f$  et  $g$  sont des fonctions  $\mathbf{C}^\kappa$  telles que*

$$\|g^{(\beta)}\|_\infty \leq M \eta^{(1-\beta/\kappa)} \quad (4B.281)$$

et

$$f^{(k)} \leq C_f 2^{-kj} \quad (4B.282)$$

alors

$$\|(f \circ g)^{(\beta)}\|_\infty \leq C_\beta M C_f \sum_{i=1}^{\beta} \eta^{-(\beta/\kappa)} 2^{-i(j - \log_2(\eta))} . \quad (4B.283)$$

Le contrôle sur  $g(x_1) - c(x_1 - u_1)$  et ses dérivées se fait à l'aide de la relation suivante :

$$g(x_1) - c(x_1 - u_1) = (g(x_1) - c(x_1)) + (c(x_1) - c(x_1 - u_1)) \quad (4B.284)$$

$$\frac{\partial^\beta}{\partial x_1^\beta}(g(x_1) - c(x_1 - u_1)) = \frac{\partial^\beta}{\partial x_1^\beta}(g(x_1) - c(x_1)) + \frac{\partial^\beta}{\partial x_1^\beta}(c(x_1) - c(x_1 - u_1)) \quad (4B.285)$$

qui implique

$$\left\| \frac{\partial^\beta}{\partial x_1^\beta}(g(x_1) - c(x_1 - u_1)) \right\|_\infty \leq \left\| \frac{\partial^\beta}{\partial x_1^\beta}(g(x_1) - c(x_1)) \right\|_\infty + \left\| \frac{\partial^\beta}{\partial x_1^\beta}(c(x_1) - c(x_1 - u_1)) \right\|_\infty. \quad (4B.286)$$

La précision sur la géométrie est de  $\eta = \max(\epsilon, s)$ , donc la partie sur l'approximation de la géométrie nous assure pour le premier terme

$$\left\| \frac{\partial^\beta}{\partial x_1^\beta}(g(x_1) - c(x_1)) \right\|_\infty = \|(g - c)^{(\beta)}\|_\infty \quad (4B.287)$$

$$\left\| \frac{\partial^\beta}{\partial x_1^\beta}(g(x_1) - c(x_1)) \right\|_\infty \leq K \max(1, \|D^\alpha c\|) \max(\epsilon, s)^{1-\beta/\alpha}. \quad (4B.288)$$

Pour le second terme, on utilise la régularité de  $c$

$$\left\| \frac{\partial^\beta}{\partial x_1^\beta}(c(x_1) - c(x_1 - u_1)) \right\|_\infty \leq \begin{cases} \|c^{(\beta+1)}\|_\infty |u_1| & \text{si } \beta < \alpha \\ 2\|c^{(\alpha)}\|_\infty & \text{si } \beta = \alpha \end{cases} \quad (4B.289)$$

$$\left\| \frac{\partial^\beta}{\partial x_1^\beta}(c(x_1) - c(x_1 - u_1)) \right\|_\infty \leq \begin{cases} \|D^\alpha c\|_\infty s & \text{si } \beta < \alpha \\ 2\|D^\alpha c\|_\infty & \text{si } \beta = \alpha \end{cases} \quad (4B.290)$$

d'où

$$\left\| \frac{\partial^\beta}{\partial x_1^\beta}(g(x_1) - c(x_1 - u_1)) \right\|_\infty \leq \left\| \frac{\partial^\beta}{\partial x_1^\beta}(g(x_1) - c(x_1)) \right\|_\infty + \left\| \frac{\partial^\beta}{\partial x_1^\beta}(c(x_1) - c(x_1 - u_1)) \right\|_\infty \quad (4B.291)$$

$$\leq \begin{cases} K \max(1, \|D^\alpha c\|) \max(\epsilon, s)^{1-\beta/\alpha} \\ \quad + K \|D^\alpha c\|_\infty s & \text{si } \beta < \alpha \\ K \max(1, \|D^\alpha c\|) + 2\|D^\alpha c\|_\infty & \text{si } \beta = \alpha \end{cases} \quad (4B.292)$$

$$\left\| \frac{\partial^\beta}{\partial x_1^\beta}(g(x_1) - c(x_1 - u_1)) \right\|_\infty \leq K \max(1, \|D^\alpha c\|) \max(\epsilon, s)^{1-\beta/\alpha}. \quad (4B.293)$$

On vérifie que

$$(\psi_{j_2, k_2})^{(\beta)}(x) = 2^{-\beta j_2} (\psi^{(\beta)})_{j_2, k_2}(x) \quad (4B.294)$$

ce qui implique

$$\|(\psi_{j_2, k_2})^{(\beta)}\|_\infty \leq 2^{-\beta j_2} 2^{-j_2/2} \|\psi^{(\beta)}\|_\infty \quad (4B.295)$$

$$\|(\psi_{j_2, k_2})^{(\beta)}\|_\infty \leq K 2^{-\beta j_2} 2^{-j_2/2}. \quad (4B.296)$$

On utilise alors le corollaire 4B.12 du lemme 4A.10 pour obtenir

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{\partial^\beta}{\partial x_1^\beta} (\psi_{j_2, k_2}(x_2 - c(x_1 - u_1) + g(x_1))) \right\|_\infty \\ & \leq K \max(1, \|D^\alpha c\|) \times \sum_{\kappa=1}^{\beta} \max(\epsilon, s)^{-\beta/\alpha} 2^{-\kappa(j_2 - \max(\log_2(s), \log_2(\epsilon)))} 2^{-j_2/2}. \end{aligned} \quad (4B.297)$$

On a donc finalement la majoration

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{\partial^\alpha}{\partial x_1^\alpha} (f(x_1 - u_1, x_2 - c(x_1 - u_1) - u_2) \psi_{j_2, k_2}(x_2 - c(x_1 - u_1) + g(x_1))) \right\|_\infty \\ & = \left\| \sum_{\beta=0}^{\alpha} \binom{\beta}{\alpha} \frac{\partial^{\alpha-\beta}}{\partial x_1^{\alpha-\beta}} (f(x_1 - u_1, x_2 - c(x_1 - u_1) - u_2)) \right. \end{aligned} \quad (4B.298)$$

$$\begin{aligned} & \left. \frac{\partial^\beta}{\partial x_1^\beta} (\psi_{j_2, k_2}(x_2 - c(x_1 - u_1) + g(x_1))) \right\|_\infty \\ & \leq \sum_{\beta=0}^{\alpha} \binom{\beta}{\alpha} \left\| \frac{\partial^{\alpha-\beta}}{\partial x_1^{\alpha-\beta}} (f(x_1 - u_1, x_2 - c(x_1 - u_1) - u_2)) \right\|_\infty \end{aligned} \quad (4B.299)$$

$$\times \left\| \frac{\partial^\beta}{\partial x_1^\beta} (\psi_{j_2, k_2}(x_2 - c(x_1 - u_1) + g(x_1))) \right\|_\infty$$

et en introduisant les majorations précédentes

$$\begin{aligned} & \leq K \|f\|_\infty 2^{-j_2/2} \\ & \quad + \sum_{\beta=1}^{\alpha} \binom{\beta}{\alpha} K \max(1, \|D^\alpha c\|^{2\alpha}) \max(1, \|D^\alpha c\|^\alpha) \|D^\alpha f\|_{\bar{\mathcal{C}}} \end{aligned} \quad (4B.300)$$

$$\times \sum_{\kappa=1}^{\beta} \max(\epsilon, s)^{-\beta/\alpha} 2^{-\kappa(j_2 - \max(\log_2(s), \log_2(\epsilon)))} 2^{-j_2/2}$$

$$\begin{aligned} & \leq K \|f\|_\infty 2^{-j_2/2} \\ & \quad + K \max(1, \|D^\alpha c\|^{\alpha+1}) \|D^\alpha f\|_{\bar{\mathcal{C}}} \sum_{\kappa=1}^{\alpha} 2^{-\kappa(j_2 - \max(\log_2(s), \log_2(\epsilon)))} 2^{-j_2/2} \end{aligned} \quad (4B.301)$$

$$\times \sum_{\beta=\kappa}^{\alpha} \binom{\beta}{\alpha} \max(\epsilon, s)^{-\beta/\alpha}$$

$$\begin{aligned} & \leq K \|f\|_\infty 2^{-j_2/2} \\ & \quad + K \max(1, \|D^\alpha c\|^{\alpha+1}) \|D^\alpha f\|_{\bar{\mathcal{C}}} \sum_{\kappa=1}^{\alpha} 2^{-\kappa(j_2 - \max(\log_2(s), \log_2(\epsilon)))} 2^{-j_2/2} \end{aligned} \quad (4B.302)$$

$$\times 2^\alpha \max(\epsilon, s)^{-1}$$

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{\partial^\alpha}{\partial x_1^\alpha} (f(x_1 - u_1, x_2 - c(x_1 - u_1) - u_2) \psi_{j_2, k_2}(x_2 - c(x_1 - u_1) + g(x_1))) \right\|_\infty \\ & \leq K \|f\|_\infty 2^{-j_2/2} \\ & \quad + K \max(1, \|D^\alpha c\|^{\alpha+1}) \|D^\alpha f\|_{\bar{\mathcal{C}}} \max(\epsilon, s)^{-1} \sum_{\kappa=1}^{\alpha} 2^{-\kappa(j_2 - \max(\log_2(s), \log_2(\epsilon)))} 2^{-j_2/2}. \end{aligned} \quad (4B.303)$$

Ici  $j_2 \geq \max(\log_2(s), \log_2(\epsilon))$  donc ceci se simplifie

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{\partial^\alpha}{\partial x_1^\alpha} (f(x_1 - u_1, x_2 - c(x_1 - u_1) - u_2) \psi_{j_2, k_2}(x_2 - c(x_1 - u_1) + g(x_1))) \right\|_\infty \\ & \leq K \|f\|_\infty 2^{-j_2/2} \\ & \quad + K \max(1, \|D^\alpha c\|^{\alpha+1}) \|D^\alpha f\|_{\bar{c}} \max(\epsilon, s)^{-1} \alpha 2^{-1(j_2 - \max(\log_2(s), \log_2(\epsilon)))} 2^{-j_2/2} \end{aligned} \quad (4B.304)$$

$$\leq K \|f\|_\infty 2^{-j_2/2} + K \max(1, \|D^\alpha c\|^{2\alpha+1}) \|D^\alpha f\|_{\bar{c}} 2^{-j_2} 2^{-j_2/2} \quad (4B.305)$$

$$\leq K (\|f\|_\infty + \max(1, \|D^\alpha c\|^{\alpha+1}) \|D^\alpha f\|_{\bar{c}}) 2^{-j_2} 2^{-j_2/2} \quad (4B.306)$$

et donc

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{\partial^\alpha}{\partial x_1^\alpha} (f(x_1 - u_1, x_2 - c(x_1 - u_1) - u_2) \psi_{j_2, k_2}(x_2 - c(x_1 - u_1) + g(x_1))) \right\|_\infty \\ & \leq K \max(1, \|D^\alpha c\|^{\alpha+1}) \|D^\alpha f\|_{\bar{c}} 2^{-j_2} 2^{-j_2/2} \end{aligned} \quad (4B.307)$$

Ceci permet d'obtenir la majoration suivante

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^\alpha}{\partial x_1^\alpha} \langle W f_s, \psi_{j_2, k_2} \rangle(x_1) \\ & \leq \int_u |h_s(u)| \int_{D_{j_2, k_2, x_1, u_1}} \left| \frac{\partial^\alpha}{\partial x_1^\alpha} (f(x_1 - u_1, x_2 - c(x_1 - u_1) - u_2) \right. \\ & \quad \left. \times \psi_{j_2, k_2}(x_2 - c(x_1 - u_1) + g(x_1))) \right| dx_2 du \end{aligned} \quad (4B.308)$$

$$\leq \|h_s\|_1 K \max(1, \|D^\alpha c\|^{\alpha+1}) \|D^\alpha f\|_{\bar{c}} 2^{-j_2} 2^{j_2/2} \quad (4B.309)$$

$$\leq K \max(1, \|D^\alpha c\|^{\alpha+1}) \|D^\alpha f\|_{\bar{c}} 2^{-j_2/2} \quad (4B.310)$$

où  $D_{j_2, k_2, x_1, u_1} = \mathcal{S}(\psi_{j_2, k_2}) + c(x_1 - u_1) - g(x_1)$ . On utilise encore le lemme 4.3 pour obtenir

$$|\langle f_s, b_{j_1, j_2, k} \rangle| = |\langle \langle W f_s, \psi_{j_2, k_2} \rangle, \psi_{j_1, k_1} \rangle| \quad (4B.311)$$

$$\leq K \max(1, \|D^\alpha c\|^{\alpha+1}) \|D^\alpha f\|_{\bar{c}} 2^{-j_2/2} 2^{(\alpha+1/2)j_1} . \quad (4B.312)$$

On conserve les bandelettes telles que

$$j_2 \geq \max(s, j_*) \quad (4B.313)$$

$$j_2 \geq \max(s, \log_2(\xi), \log_2(\epsilon)) \quad (4B.314)$$

$$j_2 \geq j_0 \quad (4B.315)$$

et

$$j_1 \geq \log_2(\xi)/(2\alpha) + (j_2 + j_0)/(4\alpha) \quad (4B.316)$$

$$j_1 \geq j_1(j_2) . \quad (4B.317)$$

Pour chaque échelle d'indices  $(j_1, j_2)$  où  $2^{j_2} \geq \max(s, \epsilon)$ , il y a au plus  $Kl2^{-j_1}$  bandelettes

qui rencontrent  $\mathcal{C}_s$ . Le nombre  $M_8$  de bandelettes conservées est donc majoré par

$$M_8 \leq \sum_{j_2 \geq j_0} \sum_{j_1 \geq j_1(j_2)} \sum_{k, b_{j_1, j_2, k} \cap \mathcal{C}_s \neq \emptyset, \mathcal{S}(b_{j_1, j_2, k}) \subset [s, l-s] \times \mathbb{R}} \quad (4B.318)$$

$$\leq \sum_{j_2 \geq j_0} \sum_{j_1 \geq j_1(j_2)} \#(k, b_{j_1, j_2, k} \cap \mathcal{C}_s \neq \emptyset, \mathcal{S}(b_{j_1, j_2, k}) \subset [s, l-s] \times \mathbb{R}) \quad (4B.319)$$

$$\leq \sum_{j_2 \geq j_0} \sum_{j_1 \geq j_1(j_2)} Kl 2^{-j_1} \quad (4B.320)$$

$$\leq \sum_{j_2 \geq j_0} Kl 2^{-j_1(j_2)} \quad (4B.321)$$

$$\leq \sum_{j_2 \geq j_0} Kl 2^{-\log_2(\xi)/(2\alpha) - (j_2 + j_0)/(4\alpha)} \quad (4B.322)$$

$$\leq Kl 2^{-\log_2(\xi)/(2\alpha)} 2^{-j_0/(2\alpha)} \quad (4B.323)$$

$$M_8 \leq Kl \xi^{-1/(2\alpha)} \max(s, \epsilon, \xi)^{-1/(2\alpha)}. \quad (4B.324)$$

L'erreur  $E_8$  correspondante est bornée par

$$E_8 \leq \sum_{j_2 \geq j_0} \sum_{j_1 < j_1(j_2)} \sum_{k, b_{j_1, j_2, k} \cap \mathcal{C}_s \neq \emptyset, \mathcal{S}(b_{j_1, j_2, k}) \subset [s, l-s] \times \mathbb{R}} |\langle f_s, b_{j_1, j_2, k} \rangle|^2 \quad (4B.325)$$

$$\leq \sum_{j_2 \geq j_0} \sum_{j_1 < j_1(j_2)} \sum_{k, b_{j_1, j_2, k} \cap \mathcal{C}_s \neq \emptyset, \mathcal{S}(b_{j_1, j_2, k}) \subset [s, l-s] \times \mathbb{R}} K \max(1, \|D^\alpha c\|^{\alpha+1})^2 \quad (4B.326)$$

$$\times \|D^\alpha f\|_{\mathcal{C}}^2 2^{-j_2} 2^{(2\alpha+1)j_1}$$

$$\leq \sum_{j_2 \geq j_0} \sum_{j_1 < j_1(j_2)} \#(k, b_{j_1, j_2, k} \cap \mathcal{C}_s \neq \emptyset, \mathcal{S}(b_{j_1, j_2, k}) \subset [s, l-s] \times \mathbb{R}) \quad (4B.327)$$

$$\times K \max(1, \|D^\alpha c\|^{\alpha+1})^2 \|D^\alpha f\|_{\mathcal{C}}^2 2^{-j_2} 2^{(2\alpha+1)j_1}$$

$$\leq \sum_{j_2 \geq j_0} \sum_{j_1 < j_1(j_2)} Kl 2^{-j_1} \max(1, \|D^\alpha c\|^{2\alpha+2}) \|D^\alpha f\|_{\mathcal{C}}^2 2^{-j_2} 2^{(2\alpha+1)j_1} \quad (4B.328)$$

$$\leq \sum_{j_2 \geq j_0} \sum_{j_1 < j_1(j_2)} Kl \max(1, \|D^\alpha c\|^{2\alpha+2}) \|D^\alpha f\|_{\mathcal{C}}^2 2^{-j_2} 2^{2\alpha j_1} \quad (4B.329)$$

$$\leq \sum_{j_2 \geq j_0} Kl \max(1, \|D^\alpha c\|^{2\alpha+2}) \|D^\alpha f\|_{\mathcal{C}}^2 2^{-j_2} 2^{2\alpha j_1(j_2)} \quad (4B.330)$$

$$\leq \sum_{j_2 \geq j_0} Kl \max(1, \|D^\alpha c\|^{2\alpha+2}) \|D^\alpha f\|_{\mathcal{C}}^2 2^{-j_2} 2^{\log_2(\xi)+1/2(j_2+j_0)} \quad (4B.331)$$

$$\leq \sum_{j_2 \geq j_0} Kl \max(1, \|D^\alpha c\|^{2\alpha+2}) \|D^\alpha f\|_{\mathcal{C}}^2 \xi 2^{-1/2(j_2-j_0)} \quad (4B.332)$$

$$E_8 \leq Kl \max(1, \|D^\alpha c\|^{2\alpha+2}) \|D^\alpha f\|_{\mathcal{C}}^2 \xi \quad (4B.333)$$

□

**Lemme 4B.13.** *Le nombre de bandelettes intérieures restantes rencontrant  $\mathcal{C}_s$  telles que  $j_2 \geq s$  au dessus de l'échelle d'indice  $j_*$  est majoré par*

$$M_9 \leq \begin{cases} 0 & \text{if } \xi \geq s \\ K \xi^{-1/(2\alpha)} & \text{if } \xi \leq s. \end{cases} \quad (4B.334)$$

*Démonstration.* Les bandelettes telles que  $j_2 \geq s$  qui n'ont pas été traitées dans le cas précédent sont celles telles que  $\mathcal{S}(b_{j_1, j_2, k}) \not\subset [\eta, l - \eta] \times \mathbb{R}$ . Ces bandelettes sont situées sur les bords gauche et droit du domaine.

On distingue encore une fois les cas  $\epsilon \geq s$  et  $\epsilon \leq s$ .

Dans le premier cas  $\eta = \epsilon$ , on ne s'intéresse qu'aux bandelettes dont l'échelle est supérieure à  $\epsilon$ . A chaque échelle d'indices  $(j_1, j_2)$ , ces bandelettes sont au plus un nombre fini  $K$ . L'indice de l'échelle de coupure est alors  $j_* = \max(\log_2(\epsilon), \log_2(\xi))$ . Le nombre  $M_9$  de bandelettes au dessus de cette échelle est majoré par

$$M_9 \leq \sum_{j_1 \geq j_*} \sum_{j_2 \geq j_*} \sum_{k, b_{j_1, j_2, k} \cap \mathcal{C}_s \neq \emptyset, \mathcal{S}(b_{j_1, j_2, k}) \not\subset [s, l-s] \times \mathbb{R}} \quad (4B.335)$$

$$\leq \sum_{j_1 \geq j_*} \sum_{j_2 \geq j_*} K \quad (4B.336)$$

$$\leq j_*^2 K \quad (4B.337)$$

$$M_9 \leq K \max(\log_2(\epsilon), \log_2(\xi))^2. \quad (4B.338)$$

Dans le second cas  $\eta = s$ , le nombre de ces bandelettes par échelle d'indices  $(j_1, j_2)$  est majoré par  $K$  pour  $j_1 \geq \log_2(s)$  et par  $Ks2^{-j_1}$  pour  $j_1 \leq \log_2(s)$ .

Si  $\xi > s$ ,  $j_* = \log_2(\xi) > \log_2(s)$  et le nombre de bandelette  $M_9$  au dessus de l'échelle d'indice  $j_*$  est borné par

$$M_9 \leq \sum_{j_1 \geq j_*} \sum_{j_2 \geq j_*} \sum_{k, b_{j_1, j_2, k} \cap \mathcal{C}_s \neq \emptyset, \mathcal{S}(b_{j_1, j_2, k}) \not\subset [s, l-s] \times \mathbb{R}} \quad (4B.339)$$

$$\leq \sum_{j_1 \geq j_*} \sum_{j_2 \geq j_*} K \quad (4B.340)$$

$$\leq j_*^2 K \quad (4B.341)$$

$$M_9 \leq K \max(\log_2(\epsilon), \log_2(\xi))^2. \quad (4B.342)$$

Si  $\xi \leq s$  et  $j_* = \log_2(s) + (\log_2(\xi) - \log_2(s))/(2\alpha) < \log_2(s)$ , le nombre  $M_9$  de ces bandelettes est alors majoré par

$$M_9 \leq \sum_{j_1 \geq j_*} \sum_{j_2 \geq \log_2(s)} \sum_{k, b_{j_1, j_2, k} \cap \mathcal{C}_s \neq \emptyset, \mathcal{S}(b_{j_1, j_2, k}) \not\subset [s, l-s] \times \mathbb{R}} \quad (4B.343)$$

$$\leq \sum_{j_1 \geq \log_2(s)} \sum_{j_2 \geq \log_2(s)} \sum_{k, b_{j_1, j_2, k} \cap \mathcal{C}_s \neq \emptyset, \mathcal{S}(b_{j_1, j_2, k}) \not\subset [s, l-s] \times \mathbb{R}} \quad (4B.344)$$

$$+ \sum_{\log_2(s) \geq j_1 \geq j_*} \sum_{j_2 \geq \log_2(s)} \sum_{k, b_{j_1, j_2, k} \cap \mathcal{C}_s \neq \emptyset, \mathcal{S}(b_{j_1, j_2, k}) \not\subset [s, l-s] \times \mathbb{R}}$$

$$\leq \sum_{j_1 \geq \log_2(s)} \sum_{j_2 \geq \log_2(s)} \#(k, b_{j_1, j_2, k} \cap \mathcal{C}_s \neq \emptyset, \mathcal{S}(b_{j_1, j_2, k}) \not\subset [s, l-s] \times \mathbb{R})$$

$$+ \sum_{\log_2(s) \geq j_1 \geq j_*} \sum_{j_2 \geq \log_2(s)} \#(k, b_{j_1, j_2, k} \cap \mathcal{C}_s \neq \emptyset, \mathcal{S}(b_{j_1, j_2, k}) \not\subset [s, l-s] \times \mathbb{R})$$

$$(4B.345)$$

$$\leq \sum_{j_1 \geq \log_2(s)} \sum_{j_2 \geq \log_2(s)} K \sum_{\log_2(s) \geq j_1 \geq j_*} \sum_{j_2 \geq \log_2(s)} Ks2^{-j_1} \quad (4B.346)$$

$$\leq \sum_{j_1 \geq j_*} |\log_2(s)| Ks2^{-j_1} \quad (4B.347)$$

$$\leq K |\log_2(\cdot)|s)^2 + K |\log_2(s)| 2^{\log_2(s)-j_*} \quad (4B.348)$$

$$\leq K |\log_2(\cdot)|s)^2 + K |\log_2(s)| s^{1/(2\alpha)} \xi^{-1/(2\alpha)} \quad (4B.349)$$

$$M_9 \leq K \xi^{-1/(2\alpha)} . \quad (4B.350)$$

□

#### 4B.2.5.3 Bandelettes intérieures rencontrant $\mathcal{C}_s$ avec $j_2 \leq \log_2(s)$

On remarque que si  $\epsilon > s$ , alors  $j_* \geq \log_2(\epsilon) > \log_2(s)$ . Ceci signifie que si  $\epsilon > s$ , aucune bandelette n'est à considérer dans cette catégorie. On suppose donc par la suite  $s \geq \epsilon$ .

De plus, les bandelettes d'échelle  $2^{j_2} < \xi$  ont également été éliminées de sorte que pour les bandelettes considérées  $s \geq j_2 \geq \max(\log_2(\xi), \log_2(\epsilon))$ .

Lorsque  $j_2 < s$ ,  $f_s$  se comporte du fait du lissage comme une fonction régulière le long de  $\mathcal{C}$ . On ne pourra utiliser ceci que pour les bandelettes qui restent dans  $[\eta, l - \eta] \times \mathbb{R}$  et on montre que les bandelettes restantes sont peu nombreuse.

**Lemme 4B.14.** *Parmi les bandelettes intérieures qui rencontrent  $\mathcal{C}_s$  avec une échelle d'indice  $s \geq j_2 \geq j_*$  et telles que  $\mathcal{S}(b_{j_1, j_2, k}) \subset [\eta, l - \eta] \times \mathbb{R}$ , si on conserve les bandelettes telles que*

$$j_2 \geq j_* \quad (4B.351)$$

$$j_2 \leq s \quad (4B.352)$$

et

$$j_1 \geq (\log_2(\xi) + \log_2(s))/(2\alpha) - (j_2 - j_*)/(2\alpha) \quad (4B.353)$$

$$j_1 \geq j_1(j_2) \quad (4B.354)$$

le nombre  $M_{10}$  de coefficients conservés satisfait

$$M_{10} \leq Kl \xi^{-1/\alpha} \quad (4B.355)$$

et l'erreur  $E_{10}$  satisfait

$$E_{10} \leq Kl \max(1, \|D^\alpha c\|^{2\alpha+2}) \|D^\alpha f\|_{\mathcal{C}}^2 \xi . \quad (4B.356)$$

*Démonstration.* La régularité de  $f_s$  utilisée ici est une combinaison de la régularité de  $f$  et de celle de  $h_s$ . Comme

$$\langle f_s, b_{j_1, j_2, k} \rangle = \langle Wf_s, \psi_{j_1, k_1} \otimes \psi_{j_2, k_2} \rangle , \quad (4B.357)$$

on montre que  $Wf_s$  est régulière selon  $x_1$ .

$$Wf_s(x) = f_s(x_1, x_2 - g(x_1)) \quad (4B.358)$$

$$Wf_s(x) = \int_u f(x_1 - u_1, x_2 - g(x_1) - u_2) h_s(u_1, u_2) du \quad (4B.359)$$

et si  $x_1 \in [s, l - s]$

$$Wf_s(x) = \int_u f(x_1 - u_1, x_2 - c(x_1 - u_1) - u_2) h_s(u_1, u_2 - g(x_1) + c(x_1 - u_1)) du \quad (4B.360)$$

et donc

$$\frac{\partial^\alpha}{\partial x_i^\alpha} (Wf_s)(x) = \frac{\partial^\alpha}{\partial x_i^\alpha} \int_u f(x_1 - u_1, x_2 - c(x_1 - u_1) - u_2) \times h_s(u_1, u_2 - g(x_1) + c(x_1 - u_1)) du \quad (4B.361)$$

$$\frac{\partial^\alpha}{\partial x_i^\alpha} (Wf_s)(x) = \int_u \frac{\partial^\alpha}{\partial x_i^\alpha} (f(x_1 - u_1, x_2 - c(x_1 - u_1) - u_2) \times h_s(u_1, u_2 - g(x_1) + c(x_1 - u_1))) du . \quad (4B.362)$$

Pour majorer la dérivée selon  $x_1$  à l'intérieur de l'intégrale, on utilise une technique similaire à celle employée pour le cas  $j_2 \geq s$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^\alpha}{\partial x_1^\alpha} (f(x_1 - u_1, y_1 - c(x_1 - u_1) - u_2) h_s(u_1, u_2 - g(x_1) + c(x_1 - u_1))) \\ &= \sum_{\beta=0}^{\alpha} \binom{\beta}{\kappa} \frac{\partial^{\alpha-\beta}}{\partial x_1^{\alpha-\beta}} (f(x_1 - u_1, y_1 - c(x_1 - u_1) - u_2)) \\ & \quad \times \frac{\partial^\beta}{\partial x_1^\beta} (h_s(u_1, u_2 - g(x_1) + c(x_1 - u_1))) . \end{aligned} \quad (4B.363)$$

Le premier facteur de chaque terme est borné par

$$\left| \frac{\partial^{\alpha-\beta}}{\partial x_1^{\alpha-\beta}} (f(x_1 - u_1, x_2 - c(x_1 - u_1) - u_2)) \right| \leq K \max(1, \|D^\alpha c\|^{\alpha+1}) \|D^\alpha f\|_{\bar{\mathcal{C}}} \quad (4B.364)$$

par définition de  $c$  et puisque les dérivées partielles de  $f$  d'ordre  $\beta \leq a$  sont bornées sur  $\bar{\mathcal{C}}$ . Le second facteur est majoré en utilisant la régularité de  $c$ , celle de  $g - c$  et enfin celle  $h_s$  lui-même.

Le contrôle sur  $g(x_1) - c(x_1 - u_1)$  et ses dérivées a déjà été démontré et donne

$$\left\| \frac{\partial^\beta}{\partial x_1^\beta} (g(x_1) - c(x_1 - u_1)) \right\|_\infty \leq K \max(1, \|D^\alpha c\|^\alpha) \max(\epsilon, s)^{1-\beta/\alpha} . \quad (4B.365)$$

On a maintenant

$$\frac{\partial^\beta}{\partial x_2^\beta} (h_s)(x) = s^{-\beta} \left( \frac{\partial^\beta}{\partial x_2^\beta} h \right)_s(x) \quad (4B.366)$$

donc

$$\left\| \frac{\partial^\beta}{\partial x_2^\beta} (h_s) \right\|_\infty = s^{-\beta} s^{-2} \left\| \frac{\partial^\beta}{\partial x_2^\beta} h \right\|_\infty \quad (4B.367)$$

$$\left\| \frac{\partial^\beta}{\partial x_2^\beta} (h_s) \right\|_\infty \leq K s^{-\beta} s^{-2} . \quad (4B.368)$$



Le corollaire 4B.12 du lemme 4A.10 et les bornes précédentes nous assurent

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{\partial^\beta}{\partial x_1^\beta} (h_s(x_2 - c(x_1 - u_1)) + g(x_1)) \right\|_\infty \\ & \leq K \max(1, \|D^\alpha c\|) \sum_{\kappa=1}^{\beta} \max(\epsilon, s)^{-\beta/\alpha} 2^{-\kappa(\log_2(s) - \max(s, \log_2(\epsilon)))} s^{-2} . \end{aligned} \quad (4B.369)$$

Ici  $s > \epsilon$  donc

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{\partial^\beta}{\partial x_1^\beta} (h_s(x_2 - c(x_1 - u_1)) + g(x_1)) \right\|_\infty \\ & \leq K \max(1, \|D^\alpha c\|) \sum_{\kappa=1}^{\beta} s^{-\beta/\alpha} 2^{-\kappa(\log_2(s) - \log_2(s))} s^{-2} \end{aligned} \quad (4B.370)$$

$$\leq K \max(1, \|D^\alpha c\|) \sum_{\kappa=1}^{\beta} s^{-\beta/\alpha} 2^{-\kappa(\log_2(s) - \log_2(s))} s^{-2} \quad (4B.371)$$

$$\leq K \max(1, \|D^\alpha c\|) \sum_{\kappa=1}^{\beta} s^{-\beta/\alpha} s^{-2} \quad (4B.372)$$

$$\leq K \max(1, \|D^\alpha c\|) \beta s^{-\beta/\alpha} s^{-2} \quad (4B.373)$$

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{\partial^\beta}{\partial x_1^\beta} (h_s(x_2 - c(x_1 - u_1)) + g(x_1)) \right\|_\infty \\ & \leq K \max(1, \|D^\alpha c\|) s^{-\beta/\alpha} s^{-2} . \end{aligned} \quad (4B.374)$$

Ceci nous donne

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\partial^\alpha}{\partial x_1^\alpha} (f(x_1 - u_1, y_1 - c(x_1 - u_1) - u_2) h_s(u_1, u_2 - g(x_1) + c(x_1 - u_1))) \right| \\ & = \left| \sum_{\beta=0}^{\alpha} \binom{\beta}{\kappa} \frac{\partial^{\alpha-\beta}}{\partial x_1^{\alpha-\beta}} (f(x_1 - u_1, y_1 - c(x_1 - u_1) - u_2)) \right. \end{aligned} \quad (4B.375)$$

$$\left. \times \frac{\partial^\beta}{\partial x_1^\beta} (h_s(u_1, u_2 - g(x_1) + c(x_1 - u_1))) \right|$$

$$\leq \sum_{\beta=0}^{\alpha} \binom{\beta}{\kappa} \left| \frac{\partial^{\alpha-\beta}}{\partial x_1^{\alpha-\beta}} (f(x_1 - u_1, y_1 - c(x_1 - u_1) - u_2)) \right| \quad (4B.376)$$

$$\times \left| \frac{\partial^\beta}{\partial x_1^\beta} (h_s(u_1, u_2 - g(x_1) + c(x_1 - u_1))) \right|$$

$$\leq K \max(1, \|D^\alpha c\|^\alpha) \|D^\alpha f\|_{\bar{c}} s^{-2} + \sum_{\beta=1}^{\alpha} K \max(1, \|D^\alpha c\|^{\alpha+1}) \|D^\alpha f\|_{\bar{c}} s^{-\beta/\alpha} s^{-2} \quad (4B.377)$$

$$\leq K \max(1, \|D^\alpha c\|^{\alpha+1}) \|D^\alpha f\|_{\bar{c}} s^{-2} (1 + \alpha \max(1, \|D^\alpha c\|^\alpha) s^{-1}) \quad (4B.378)$$

$$\left| \frac{\partial^\alpha}{\partial x_1^\alpha} (f(x_1 - u_1, y_1 - c(x_1 - u_1) - u_2) h_s(u_1, u_2 - g(x_1) + c(x_1 - u_1))) \right| \quad (4B.379)$$

$$\leq K \max(1, \|D^\alpha c\|^{\alpha+1}) \|D^\alpha f\|_{\bar{c}} s^{-2} s^{-1}$$

et donc

$$\left| \frac{\partial^\alpha}{\partial x_i^\alpha} (W f_s)(x) \right| = \left| \int_u \frac{\partial^\alpha}{\partial x_i^\alpha} (f(x_1 - u_1, x_2 - c(x_1 - u_1) - u_2) \right. \quad (4B.380)$$

$$\left. h_s(u_1, u_2 - g(x_1) + c(x_1 - u_1)) \right) du \Big|$$

$$\leq \int_{u \in \mathcal{S}(h_s)} \left| \frac{\partial^\alpha}{\partial x_i^\alpha} (f(x_1 - u_1, x_2 - c(x_1 - u_1) - u_2) \right. \quad (4B.381)$$

$$\left. h_s(u_1, u_2 - g(x_1) + c(x_1 - u_1)) \right) \Big| du$$

$$\left| \frac{\partial^\alpha}{\partial x_i^\alpha} (W f_s)(x) \right| \leq K \max(1, \|D^\alpha c\|^{\alpha+1}) \|D^\alpha f\|_{\bar{C}} s^{-1}. \quad (4B.382)$$

On utilise alors le lemme 4.3 pour obtenir

$$|\langle f_s, b_{j_1, j_2, k} \rangle| = |\langle W f_s, \psi_{j_1, k_1} \otimes \psi_{j_2, k_2} \rangle| \quad (4B.383)$$

$$|\langle f_s, b_{j_1, j_2, k} \rangle| \leq K \max(1, \|D^\alpha c\|^{2\alpha+2}) \|D^\alpha f\|_{\bar{C}} s^{-1} 2^{(\alpha+1/2)j_1} 2^{j_2/2}. \quad (4B.384)$$

Le nombre de telles bandelettes rencontrant  $\mathcal{C}_s$  pour chaque  $(j_1, j_2)$  avec  $j_2 \leq s$  est borné par  $Kl 2^{-j_1} s 2^{-j_2}$ . Si on conserve les bandelettes telles que

$$j_2 \geq j_* \quad (4B.385)$$

$$j_2 \geq \log_2(s) + (\log_2(\xi) - \log_2(s))/(2\alpha) \quad (4B.386)$$

$$j_2 \leq \log_2(s) \quad (4B.387)$$

et

$$j_1 \geq (\log_2(\xi) + \log_2(s))/(2\alpha) - (j_2 - j_*)/(2\alpha) \quad (4B.388)$$

$$j_1 \geq j_1(j_2) \quad (4B.389)$$

le nombre  $M_{10}$  de bandelettes conservées est majoré par

$$M_{10} = \sum_{\log_2(s) \geq j_2 \geq j_*} \sum_{j_1 \geq j_1(j_2)} \sum_{k, \mathcal{S}(b_{j_1, j_2, k}) \cap \mathcal{C}_s \neq \emptyset, \mathcal{S}(b_{j_1, j_2, k}) \subset [s, l-s] \times \mathbb{R}} \quad (4B.390)$$

$$= \sum_{\log_2(s) \geq j_2 \geq j_*} \sum_{j_1 \geq j_1(j_2)} \#(k, \mathcal{S}(b_{j_1, j_2, k}) \cap \mathcal{C}_s \neq \emptyset, \mathcal{S}(b_{j_1, j_2, k}) \subset [s, l-s] \times \mathbb{R})$$

$$(4B.391)$$

$$\leq \sum_{\log_2(s) \geq j_2 \geq j_*} \sum_{j_1 \geq j_1(j_2)} Kl 2^{-j_1} s 2^{-j_2} \quad (4B.392)$$

$$\leq \sum_{\log_2(s) \geq j_2 \geq j_*} Kl 2^{-j_1(j_2)} s 2^{-j_2} \quad (4B.393)$$

$$\leq \sum_{\log_2(s) \geq j_2 \geq j_*} Kl \xi^{-1/(2\alpha)} s^{-1/(2\alpha)} 2^{(j_2 - j_*)/(2\alpha)} s 2^{-j_2} \quad (4B.394)$$

$$\leq Kl \xi^{-1/(2\alpha)} s^{-1/(2\alpha)} s 2^{-j_*} \quad (4B.395)$$

$$\leq Kl \xi^{-1/(2\alpha)} s^{-1/(2\alpha)} \xi^{-1/(2\alpha)} s^{1/(2\alpha)} \quad (4B.396)$$

$$M_{10} \leq Kl \xi^{-1/\alpha} \quad (4B.397)$$

et l'erreur  $E_{10}$  est bornée par

$$E_{10} = \sum_{\log_2(s) \geq j_2 \geq j_*} \sum_{j_1 < j_1(j_2)} \sum_{k, \mathcal{S}(b_{j_1, j_2, k}) \cap \mathcal{C}_s \neq \emptyset, \mathcal{S}(b_{j_1, j_2, k}) \subset [s, l-s] \times \mathbb{R}} |\langle f_s, b_{j_1, j_2, k} \rangle|^2 \quad (4B.398)$$

$$\begin{aligned} &\leq \sum_{\log_2(s) \geq j_2 \geq j_*} \sum_{j_1 < j_1(j_2)} \sum_{k, \mathcal{S}(b_{j_1, j_2, k}) \cap \mathcal{C}_s \neq \emptyset, \mathcal{S}(b_{j_1, j_2, k}) \subset [s, l-s] \times \mathbb{R}} K^2 \max(1, \|D^\alpha c\|^{2\alpha+2}) \|D^\alpha f\|_{\mathcal{C}}^2 \\ &\quad \times s^{-2} 2^{(2\alpha+1)j_1} 2^{j_2} \end{aligned} \quad (4B.399)$$

$$\begin{aligned} &\leq \sum_{\log_2(s) \geq j_2 \geq j_*} \sum_{j_1 < j_1(j_2)} \#(k, \mathcal{S}(b_{j_1, j_2, k}) \cap \mathcal{C}_s \neq \emptyset, \mathcal{S}(b_{j_1, j_2, k}) \subset [s, l-s] \times \mathbb{R}) \\ &\quad \times K^2 \max(1, \|D^\alpha c\|^{\alpha+2}) \|D^\alpha f\|_{\mathcal{C}}^2 s^{-2} 2^{(2\alpha+1)j_1} 2^{j_2} \end{aligned} \quad (4B.400)$$

$$\begin{aligned} &\leq \sum_{\log_2(s) \geq j_2 \geq j_*} \sum_{j_1 < j_1(j_2)} Kl 2^{-j_1} s 2^{-j_2} \max(1, \|D^\alpha c\|^{2\alpha+2}) \|D^\alpha f\|_{\mathcal{C}}^2 s^{-2} 2^{(2\alpha+1)j_1} 2^{j_2} \\ &\quad (4B.401) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \sum_{\log_2(s) \geq j_2 \geq j_*} \sum_{j_1 < j_1(j_2)} Kl \max(1, \|D^\alpha c\|^{2\alpha+2}) \|D^\alpha f\|_{\mathcal{C}}^2 s^{-1} 2^{2\alpha j_1} \\ &\quad (4B.402) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \sum_{\log_2(s) \geq j_2 \geq j_*} Kl \max(1, \|D^\alpha c\|^{2\alpha+2}) \|D^\alpha f\|_{\mathcal{C}}^2 s^{-1} 2^{2\alpha j_1(j_2)} \\ &\quad (4B.403) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \sum_{\log_2(s) \geq j_2 \geq j_*} Kl \max(1, \|D^\alpha c\|^{2\alpha+2}) \|D^\alpha f\|_{\mathcal{C}}^2 s^{-1} \xi s 2^{-(j_2-j_*)} \\ &\quad (4B.404) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \sum_{\log_2(s) \geq j_2 \geq j_*} Kl \max(1, \|D^\alpha c\|^{2\alpha+2}) \|D^\alpha f\|_{\mathcal{C}}^2 \xi 2^{-(j_2-j_*)} \\ &\quad (4B.405) \end{aligned}$$

$$E_{10} \leq Kl \max(1, \|D^\alpha c\|^{2\alpha+2}) \|D^\alpha f\|_{\mathcal{C}}^2 \xi . \quad (4B.406)$$

□

**Lemme 4B.15.** Parmi les bandelettes intérieures qui rencontrent  $\mathcal{C}_s$  avec une échelle d'indice  $\log_2(s) \geq j_2 \geq j_*$  et telles que  $\mathcal{S}(b_{j_1, j_2, k}) \not\subset [\eta, l-\eta] \times \mathbb{R}$ , si on conserve les bandelettes telles que

$$j_2 \geq j_* \quad (4B.407)$$

$$j_2 \leq \log_2(s) \quad (4B.408)$$

et

$$j_1 \geq \min(\log_2(s) + (\log_2(\xi) + \log_2(s))/(2\alpha) - 3\log_2(s)/(2\alpha + 1) + (j_2 - j_*)/(2\alpha), \log_2(s)) \quad (4B.409)$$

le nombre  $M_{11}$  de coefficients conservés est borné par

$$M_{11} \leq \begin{cases} K \xi^{-1/\alpha} & \text{si } s \leq \xi \\ K (\xi^{-1/(2\alpha)} + |\log_2(\epsilon)|) & \text{sinon} \end{cases} \quad (4B.410)$$

et l'erreur résultante  $E_{11}$  est bornée par

$$E_{11} \leq K \max(1, \|D^\alpha c\|^{2\alpha}) \|f\|_{\infty}^2 \xi . \quad (4B.411)$$

*Démonstration.* Pour ces bandelettes situées aux bords, on utilise la régularité de  $h_s$  pour montrer que

$$\frac{\partial^\alpha}{\partial x_1^\alpha} W f_s \leq K \max(1, \|D^\alpha c\|^\alpha) \|f\|_\infty s^{-\alpha} \quad (4B.412)$$

ce qui donne par le lemme 4.3

$$|\langle f_s, b_{j_1, j_2, k} \rangle| = |\langle W f_s, \psi_{j_1, k_1} \otimes \psi_{j_2, k_2} \rangle| \quad (4B.413)$$

$$\leq K \max(1, \|D^\alpha c\|^\alpha) \|f\|_\infty s^{-\alpha} 2^{(\alpha+1/2)j_1} 2^{j_2/2}. \quad (4B.414)$$

Lorsque  $2^{j_1} \geq s$  ces bandelettes sont au plus  $Ks 2^{-j_2}$  par échelle et lorsque  $2^{j_1} < s$  le nombre de ces bandelettes à l'échelle d'indices  $(j_1, j_2)$  est majoré par  $Ks 2^{-j_1} s 2^{-j_2}$ . Si on conserve les bandelettes telles que

$$j_2 \geq j_\star \quad (4B.415)$$

$$j_2 \leq \log_2(s) \quad (4B.416)$$

et

$$j_1 \geq \min(\log_2(s) + (\log_2(\xi) + \log_2(s))/(2\alpha) - 3\log_2(s)/(2\alpha + 1) + (j_2 - j_\star)/(2\alpha), \log_2(s)) \quad (4B.417)$$

$$j_1 \geq \min(j_1(j_2), \log_2(s)) \quad (4B.418)$$

le nombre  $M_{11}$  de coefficients conservés est borné par

$$M_{11} = \sum_{\log_2(s) \geq j_2 \geq j_\star} \sum_{j_1 \geq j_1(j_2)} \sum_{k, \mathcal{S}(b_{j_1, j_2, k}) \cap \mathcal{C}_s \neq \emptyset, \mathcal{S}(b_{j_1, j_2, k}) \not\subset [\eta, l-\eta] \times \mathbb{R}} \quad (4B.419)$$

$$= \sum_{\log_2(j) \geq j_\star} \sum_{\log_2(s) \geq j_1 \geq j_1(j_2)} \sum_{k, \mathcal{S}(b_{j_1, j_2, k}) \cap \mathcal{C}_s \neq \emptyset, \mathcal{S}(b_{j_1, j_2, k}) \not\subset [\eta, l-\eta] \times \mathbb{R}} \quad (4B.420)$$

$$+ \sum_{\log_2(s) \geq j_2 \geq j_\star} \sum_{j_1 \geq \log_2(s)} \sum_{k, \mathcal{S}(b_{j_1, j_2, k}) \cap \mathcal{C}_s \neq \emptyset, \mathcal{S}(b_{j_1, j_2, k}) \not\subset [\eta, l-\eta] \times \mathbb{R}}$$

$$= \sum_{\log_2(s) \geq j_2 \geq j_\star} \sum_{\log_2(s) \geq j_1 \geq j_1(j_2)} \#(k, \mathcal{S}(b_{j_1, j_2, k}) \cap \mathcal{C}_s \neq \emptyset, \mathcal{S}(b_{j_1, j_2, k}) \not\subset [\eta, l-\eta] \times \mathbb{R})$$

$$+ \sum_{\log_2(s) \geq j_2 \geq j_\star} \sum_{j_1 \geq \log_2(s)} \#(k, \mathcal{S}(b_{j_1, j_2, k}) \cap \mathcal{C}_s \neq \emptyset, \mathcal{S}(b_{j_1, j_2, k}) \not\subset [\eta, l-\eta] \times \mathbb{R}) \quad (4B.421)$$

$$\leq \sum_{\log_2(s) \geq j_2 \geq j_\star} \sum_{j_1 \geq j_1(j_2)} Ks 2^{-j_1} s 2^{-j_2} + \sum_{\log_2(s) \geq j_2 \geq j_\star} \sum_{j_1 \geq \log_2(s)} Ks 2^{-j_2} \quad (4B.422)$$

$$\leq \sum_{j_2 \geq j_\star} K 2^{\log_2(s) - j_1(j_2)} 2^{\log_2(s) - j_2} + \sum_{\log_2(s) \geq j_2 \geq j_\star} |\log_2(s)| Ks 2^{-j_2} \quad (4B.423)$$

$$\leq \sum_{\log_2(s) \geq j_2 \geq j_\star} K \xi^{-1/(2\alpha)} s^{-1/(2\alpha)} s^{3/(2\alpha+1)} 2^{-(j_2 - j_\star)/(2\alpha)} 2^{\log_2(s) - j_2} \quad (4B.424)$$

$$+ \sum_{\log_2(s) \geq j_2 \geq j_\star} |\log_2(s)| Ks 2^{-j_2}$$

$$\leq K \xi^{-1/(2\alpha)} s^{-1/(2\alpha)} s^{3/(2\alpha+1)} 2^{\log_2(s)-j_\star} + K |\log_2(s)| s 2^{-j_\star} \quad (4B.425)$$

$$\leq \begin{cases} K \xi^{-1/(2\alpha)} s^{-1/(2\alpha)} s^{3/(2\alpha+1)} \xi^{-1/(2\alpha)} s^{1/(2\alpha)} + K |\log_2(s)| s^{1/(2\alpha)} \xi^{-1/(2\alpha)} & \text{si } s \leq \xi \\ K \xi^{-1/(2\alpha)} s^{-1/(2\alpha)} s^{3/(2\alpha+1)} + K |\log_2(s)| & \text{sinon} \end{cases} \quad (4B.426)$$

$$\leq \begin{cases} K (s^{3/(2\alpha+1)} + |\log_2(s)| s^{1/(2\alpha)} \xi^{1/(2\alpha)}) \xi^{-1/\alpha} & \text{si } s \leq \xi \\ K \xi^{-1/(2\alpha)} + K |\log_2(s)| & \text{sinon} \end{cases} \quad (4B.427)$$

$$\leq \begin{cases} K s^{3/(2\alpha+1)} \xi^{-1/\alpha} & \text{si } s \leq \xi \\ K \xi^{-1/(2\alpha)} + K |\log_2(s)| & \text{sinon} \end{cases} \quad (4B.428)$$

$$\leq \begin{cases} K s_0^{3/(2\alpha+1)} \xi^{-1/\alpha} & \text{si } s \leq \xi \\ K (\xi^{-1/(2\alpha)} + |\log_2(\epsilon)|) & \text{sinon} \end{cases} \quad (4B.429)$$

$$M_{11} \leq \begin{cases} K \xi^{-1/\alpha} & \text{si } s \leq \xi \\ K (\xi^{-1/(2\alpha)} + |\log_2(\epsilon)|) & \text{sinon} \end{cases} \quad (4B.430)$$

et l'erreur  $E_{11}$  est bornée par

$$E_{11} = \sum_{j_2 \geq j_\star} \sum_{j_1 < j_1(j_2)} \sum_{k, \mathcal{S}(b_{j_1, j_2, k}) \cap \mathcal{C}_s \neq \emptyset, \mathcal{S}(b_{j_1, j_2, k}) \not\subset [\eta, l-\eta] \times \mathbb{R}} |\langle f_s, b_{j_1, j_2, k} \rangle|^2 \quad (4B.431)$$

$$\leq \sum_{j_2 \geq j_\star} \sum_{j_1 < j_1(j_2)} \sum_{k, \mathcal{S}(b_{j_1, j_2, k}) \cap \mathcal{C}_s \neq \emptyset, \mathcal{S}(b_{j_1, j_2, k}) \not\subset [\eta, l-\eta] \times \mathbb{R}} K^2 \max(1, \|D^\alpha c\|^{2\alpha+2}) \|f\|_\infty^2 s^{-2\alpha} 2^{(2\alpha+1)j_1} 2^{j_2} \quad (4B.432)$$

$$\leq \sum_{j_2 \geq j_\star} \sum_{j_1 < j_1(j_2)} \#(k, \mathcal{S}(b_{j_1, j_2, k}) \cap \mathcal{C}_s \neq \emptyset, \mathcal{S}(b_{j_1, j_2, k}) \not\subset [s, l-s] \times \mathbb{R}) \quad (4B.433)$$

$$\times K^2 \max(1, \|D^\alpha c\|^{2\alpha+2}) \|f\|_\infty^2 s^{-2\alpha} 2^{(2\alpha+1)j_1} 2^{j_2} \\ \leq \sum_{j_2 \geq j_\star} \sum_{j_1 < j_1(j_2)} K (1 + s 2^{-j_1}) s 2^{-j_2} \max(1, \|D^\alpha c\|^{2\alpha+2}) \|f\|_\infty^2 s^{-2\alpha} 2^{(2\alpha+1)j_1} 2^{j_2} \quad (4B.434)$$

$$\leq \sum_{j_2 \geq j_\star} \sum_{j_1 < j_1(j_2)} K \max(1, \|D^\alpha c\|^{2\alpha+2}) \|f\|_\infty^2 s 2^{-j_2} s^{-2\alpha} 2^{(2\alpha+1)j_1} \\ + \sum_{j_2 \geq j_\star} \sum_{j_1 < j_1(j_2)} K s^2 \max(1, \|D^\alpha c\|^{2\alpha+2}) \|f\|_\infty^2 2^{2\alpha(j_1 - \log_2(s))} \quad (4B.435)$$

$$\leq \sum_{j_2 \geq j_\star} K \max(1, \|D^\alpha c\|^{2\alpha+2}) \|f\|_\infty^2 s^2 2^{(2\alpha+1)(j_1(j_2) - \log_2(s))} \\ + \sum_{j_2 \geq j_\star} K s^2 \max(1, \|D^\alpha c\|^{2\alpha+2}) \|f\|_\infty^2 2^{2\alpha(j_1(j_2) - \log_2(s))} \quad (4B.436)$$

$$\leq \sum_{j_2 \geq j_\star} \max(1, \|D^\alpha c\|^{2\alpha+2}) \|f\|_\infty^2 s^2 2^{(2\alpha+1)/(2\alpha)(\log_2(\xi) + \log_2(s))} s^{-3} 2^{(2\alpha+1)/(2\alpha)(j_2 - j_\star)} \\ + \sum_{j_2 \geq j_\star} K s^2 \max(1, \|D^\alpha c\|^{2\alpha+2}) \|f\|_\infty^2 \xi s^3 s^{-3(2\alpha)/(2\alpha+1)} 2^{j_2 - j_\star} \quad (4B.437)$$

$$\leq \sum_{j_2 \geq j_*} \max(1, \|D^\alpha c\|^{2\alpha+2}) \|f\|_\infty^2 s^{1/(2\alpha)} \xi \xi^{1/(2\alpha)} 2^{(2\alpha+1)/(2\alpha)(j_2-j_*)} \quad (4B.438)$$

$$+ \sum_{j_2 \geq j_*} K \max(1, \|D^\alpha c\|^{2\alpha+2}) \|f\|_\infty^2 s^{3/(2\alpha+1)} \xi 2^{j_2-j_*} \quad (4B.439)$$

$$\leq K \max(1, \|D^\alpha c\|^{2\alpha+2}) \|f\|_\infty^2 (s^{1/(2\alpha)} \xi^{1/(2\alpha)} + s^{3/(2\alpha+1)}) \xi \quad (4B.440)$$

$$E_{11} \leq K \max(1, \|D^\alpha c\|^{2\alpha+2}) \|f\|_\infty^2 \xi . \quad (4B.441)$$

□

## 4B.2.6 Bandelettes de bord

Les bandelettes restantes sont les bandelettes de bord et les bandelettes d'échelle. Elles se comportent de manière similaire et sont donc étudiées simultanément.

Ces bandelettes ont dans leur produit tensoriel de définition une des deux ondelettes qui est remplacée soit par une ondelette de bord soit par une fonction d'échelle. Ces fonctions restent orthonormées, leur support reste du même ordre que celui des autres ondelettes à la même échelle mais n'ont plus nécessairement de moments nuls. Elles gardent cependant ces moments dans la direction où elles ne sont pas modifiées.

### 4B.2.6.1 Bandelettes de bord ne rencontrant pas $\mathcal{C}_s$

**Lemme 4B.16.** *Si on conserve toutes les bandelettes de bord qui ne rencontrent pas  $\mathcal{C}_s$  telles que*

– si  $j_1 \geq j_2$ ,

$$j_1 \geq j_0 = \max(\log_2(\xi)/(2\alpha), j_*) \quad (4B.442)$$

et

$$j_2 \geq j_0 + 1/2(j_2 - j_0) \quad (4B.443)$$

– si  $j_2 < j_1$ ,

$$j_2 \geq j_0 = \max(\log_2(\xi)/(2\alpha), j_*) \quad (4B.444)$$

et

$$j_1 \geq j_0 + 1/2(j_2 - j_0) \quad (4B.445)$$

le nombre  $M_{12}$  de coefficients conservés satisfait

$$M_{12} \leq Kl \xi^{-1/\alpha} \quad (4B.446)$$

et l'erreur résultante  $E_{12}$  satisfait

$$E_{12} \leq Kl \max(1, \|D^\alpha c\|^\alpha) 2\alpha + 2 \|D^\alpha f\|_{\mathcal{C}}^2 \xi . \quad (4B.447)$$

*Démonstration.* Tant que  $x \notin w(\mathcal{C}_s)$ , on a vu que

$$\left| \frac{\partial^\alpha}{\partial x_i^\alpha} W f_s(x) \right| \leq K \max(1, \|D^\alpha c\|^\alpha) \|D^\alpha f\|_{\bar{\mathcal{C}}} \quad (4B.448)$$

donc si  $j_2 \leq j_1$ , le lemme 4.3 nous donne

$$|\langle f_s, b_{j_1, j_2, k} \rangle| = |\langle W f_s, \psi_{j_1, k_1} \otimes \psi_{j_2, k_2} \rangle| \quad (4B.449)$$

$$|\langle f_s, b_{j_1, j_2, k} \rangle| \leq K \max(1, \|D^\alpha c\|^\alpha) \|D^\alpha f\|_{\bar{\mathcal{C}}} 2^{(\alpha+1/2)j_2} 2^{j_1/2} \quad (4B.450)$$

où on utilise le fait que si  $j_2 \leq j_1$  l'ondelette modifiée dans le produit tensoriel est  $\psi_{j_1, k_1}$  dont la norme  $L_1$  reste sous contrôle

$$\|\psi_{j_1, k_1}\|_1 \leq K 2^{j_1/2} . \quad (4B.451)$$

De manière similaire, si  $j_1 \leq j_2$  on obtient

$$|\langle f_s, b_{j_1, j_2, k} \rangle| \leq K \max(1, \|D^\alpha c\|^\alpha) \|D^\alpha f\|_{\bar{\mathcal{C}}} 2^{(\alpha+1/2)j_1} 2^{j_2/2} . \quad (4B.452)$$

Si  $j_1 \geq j_2$ , le nombre de bandelettes à l'échelle d'indices  $(j_1, j_2)$  est majoré par  $Kl 2^{-j_1} 2^{-j_2}$  puisqu'elles sont situées aux frontières.

Finalement, ceci est exactement le cadre que l'on avait pour les bandelettes intérieures sauf qu'ici l'estimation du nombre d'ondelettes est très grossière. Le nombre de coefficients et l'erreur satisfont

$$M_{12} \leq Kl \xi^{-1/\alpha} \quad (4B.453)$$

et

$$E_{12} \leq Kl \max(1, \|D^\alpha c\|^{2\alpha+2}) \|D^\alpha f\|_{\bar{\mathcal{C}}}^2 \xi . \quad (4B.454)$$

□

#### 4B.2.6.2 Bandelettes de bord rencontrant $\mathcal{C}_s$ avec $j_1 \geq j_2$

**Lemme 4B.17.** *Le nombre  $M_{13}$  de bandelettes de bord qui rencontrent  $\mathcal{C}_s$  avec  $j_1 \geq j_2$  au dessus de l'échelle d'indice  $j_\star$  satisfait*

$$M_{13} \leq \begin{cases} K(|\log_2(\xi)|)^2 & \text{si } \xi \geq \eta \\ K(|\log_2(\epsilon)|)^2 & \text{si } \xi < \eta = \epsilon \\ K((|\log_2(\epsilon)|)^2 + \xi^{-1/\alpha}) & \text{if } \xi < \eta = s . \end{cases} \quad (4B.455)$$

*Démonstration.* Tant que  $j_2 \geq \eta$ , il y a au plus  $K$  bandelettes de ce type par échelle d'indice  $(j_1, j_2)$ . Lorsque  $j_2 < \eta$ , ce nombre augmente avec  $j_2$  et  $j_1$  au plus comme  $K\eta 2^{-j_1} \eta 2^{-j_2}$ .

Donc si  $\xi \geq \eta$ , le nombre  $M_{13}$  de ces bandelettes est majoré par

$$M_{13} = \sum_{j_2 \geq j_*} \sum_{j_1 \geq j_2} \sum_{k, b_{j_1, j_2, k} \text{ de bord, } \mathcal{S}(b_{j_1, j_2, k}) \cap \mathcal{C}_s \neq \emptyset} \quad (4B.456)$$

$$= \sum_{j_2 \geq \log_2(\xi)} \sum_{j_1 \geq j_2} \sum_{k, b_{j_1, j_2, k} \text{ de bord, } \mathcal{S}(b_{j_1, j_2, k}) \cap \mathcal{C}_s \neq \emptyset} \quad (4B.457)$$

$$= \sum_{j_2 \geq \log_2(\xi)} \sum_{j_1 \geq j_2} \#(k, b_{j_1, j_2, k} \text{ de bord, } \mathcal{S}(b_{j_1, j_2, k}) \cap \mathcal{C}_s \neq \emptyset) \quad (4B.458)$$

$$\leq \sum_{j_2 \geq \log_2(\xi)} \sum_{j_1 \geq j_2} K \quad (4B.459)$$

$$\leq \sum_{j_2 \geq \log_2(\xi)} |j_2| K \quad (4B.460)$$

$$M_{13} \leq K |\log_2(\xi)|^2 \quad (4B.461)$$

et si  $\xi < \eta$ , le nombre  $M_{13}$  de bandelettes de bord est majoré par

$$M_{13} = \sum_{j_2 \geq j_*} \sum_{j_1 \geq j_2} \sum_{k, b_{j_1, j_2, k} \text{ de bord, } \mathcal{S}(b_{j_1, j_2, k}) \cap \mathcal{C}_s \neq \emptyset} \quad (4B.462)$$

$$= \sum_{j_2 \geq \log_2(\eta)} \sum_{j_1 \geq j_2} \sum_{k, b_{j_1, j_2, k} \text{ de bord, } \mathcal{S}(b_{j_1, j_2, k}) \cap \mathcal{C}_s \neq \emptyset} \quad (4B.463)$$

$$+ \sum_{\log_2(\log_2(\eta)) \eta > j_2 \geq j_*} \sum_{j_1 \geq j_2} \sum_{k, b_{j_1, j_2, k} \text{ de bord, } \mathcal{S}(b_{j_1, j_2, k}) \cap \mathcal{C}_s \neq \emptyset}$$

$$= \sum_{j_2 \geq \log_2(\eta)} \sum_{j_1 \geq j_2} \#(k, b_{j_1, j_2, k} \text{ de bord, } \mathcal{S}(b_{j_1, j_2, k}) \cap \mathcal{C}_s \neq \emptyset) \quad (4B.464)$$

$$+ \sum_{\log_2(\eta) > j_2 \geq j_*} \sum_{j_1 \geq j_2} \#(k, b_{j_1, j_2, k} \text{ de bord, } \mathcal{S}(b_{j_1, j_2, k}) \cap \mathcal{C}_s \neq \emptyset)$$

$$\leq \sum_{j_2 \geq \log_2(\eta)} \sum_{j_1 \geq j_2} K + \sum_{\log_2(\eta) > j_2 \geq j_*} \sum_{j_1 \geq j_2} K \eta^{2^{-j_1}} \eta^{2^{-j_2}} \quad (4B.465)$$

$$\leq \sum_{j_2 \geq \log_2(\eta)} |j_2| K + \sum_{\log_2(\eta) > j_2 \geq j_*} K \eta^2 2^{-2j_2} \quad (4B.466)$$

$$\leq K |\log_2(\eta)|^2 + K 2^{2(\log_2(\eta) - j_*)} \quad (4B.467)$$

$$\leq \begin{cases} K |\log_2(\epsilon)|^2 & \text{si } \eta = \epsilon \\ K |\log_2(s)|^2 + K s^{1/\alpha} \xi^{-1/\alpha} & \text{si } \eta = s \end{cases} \quad (4B.468)$$

$$M_{13} \leq \begin{cases} K |\log_2(\epsilon)|^2 & \text{si } \eta = \epsilon \\ K (|\log_2(\epsilon)|^2 + \xi^{-1/\alpha}) & \text{si } \eta = s \end{cases} \quad (4B.469)$$

□

### 4B.2.6.3 Bandelettes de bord rencontrant $\mathcal{C}_s$ avec $j_2 \geq j_1$

Ce sont cette fois les  $\psi_{j_2, k_2}$  qui sont les bandelettes de bord et leur régularité dépend de l'échelle de construction. Pour une bandelette  $b_{j_1, j_2, k}$  l'échelle de construction est  $2_1^j$  et



donc

$$\left\| \frac{\partial^\beta}{\partial x^\beta} \psi_{j_2, k_2}(x) \right\|_\infty \leq K 2^{-\beta j_1} 2^{j_2/2} . \quad (4B.470)$$

On utilise donc la régularité de  $\psi_{j_2, k_2}$  si  $j_1 \geq s$  et celle de  $f_s$  sinon.

Ce cas est similaire à celui des bandelettes intérieures qui rencontrent  $\mathcal{C}_s$ . De manière similaire, on découpe cet ensemble de bandelettes en deux : les bandelettes supportées dans  $[\eta, l - \eta] \times \mathbb{R}$  et les autres.

**Lemme 4B.18.** *Parmi les bandelettes de bord qui rencontrent  $\mathcal{C}_s$  avec  $j_2 \geq j_1 \geq s$  et telles que  $\mathcal{S}(b_{j_1, j_2, k}) \subset [\eta, l - \eta] \times \mathbb{R}$ , si on conserve toutes les bandelettes telles que*

$$j_2 \geq j_\star \quad (4B.471)$$

et

$$j_1 \geq \max(\log_2(\xi)/(2(\alpha - 1)) - j_2/(4(\alpha - 1)), j_\star, s) \quad (4B.472)$$

le nombre  $M_{14}$  de bandelettes conservées satisfait

$$M_{14} \leq Kl \xi^{-1/(2(\alpha-1))} \quad (4B.473)$$

et l'erreur  $E_{14}$  satisfait

$$E_{14} \leq Kl \max(1, \|D^\alpha c\|^{2\alpha+2}) \|D^\alpha f\|_{\bar{\mathcal{C}}}^2 \xi . \quad (4B.474)$$

*Démonstration.* On utilise la même technique que celle utilisée pour les bandelettes intérieures à grande échelle puisque les ondelettes modifiées  $\psi_{j_2, k_2}$  restent régulières. On obtient

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^\alpha}{\partial x_1^\alpha} \langle W f_s, \psi_{j_2, k_2} \rangle(x_1) \\ & \leq K \max(1, \|D^\alpha c\|^{\alpha+1}) \|D^\alpha f\|_{\bar{\mathcal{C}}} 2^{-j_1} 2^{j_2/2} . \end{aligned} \quad (4B.475)$$

Le lemme 4.3 nous donne

$$|\langle f_s, b_{j_1, j_2, k} \rangle| = |\langle \langle W f_s, \psi_{j_2, k_2} \rangle, \psi_{j_1, k_1} \rangle| \quad (4B.476)$$

$$\leq K \max(1, \|D^\alpha c\|^{\alpha+1}) \|D^\alpha f\|_{\bar{\mathcal{C}}} 2^{-j_1} 2^{j_2/2} 2^{(\alpha+1/2)j_1} \quad (4B.477)$$

$$|\langle f_s, b_{j_1, j_2, k} \rangle| \leq K \max(1, \|D^\alpha c\|^{\alpha+1}) \|D^\alpha f\|_{\bar{\mathcal{C}}} 2^{j_2/2} 2^{(\alpha-1/2)j_1} . \quad (4B.478)$$

Le nombre de ces bandelettes de bord est borné par  $Kl2^{-j_1}$  à chaque échelle d'indices  $(j_1, j_2)$ .

Finalement, si on conserve les bandelettes de bord telles que

$$j_2 \geq j_\star \quad (4B.479)$$

et

$$j_1 \geq \max(\log_2(\xi)/(2(\alpha - 1)) - j_2/(4(\alpha - 1)), j_\star, s) \quad (4B.480)$$

$$j_1 \geq j_1(j_2) \quad (4B.481)$$

le nombre  $M_{14}$  de coefficients conservés est majoré par

$$M_{14} = \sum_{j_2 \geq j_\star} \sum_{j_1 \geq j_1(j_2)} \sum_{k, b_{j_1, j_2, k} \text{ de bord}, \mathcal{S}(b_{j_1, j_2, k}) \cap \mathcal{C}_s \neq \emptyset, \mathcal{S}(b_{j_1, j_2, k}) \subset [s, l-s] \times \mathbb{R}} \quad (4B.482)$$

$$= \sum_{j_2 \geq j_\star} \sum_{j_1 \geq j_1(j_2)} \#(k, b_{j_1, j_2, k} \text{ de bord}, \mathcal{S}(b_{j_1, j_2, k}) \cap \mathcal{C}_s \neq \emptyset, \mathcal{S}(b_{j_1, j_2, k}) \subset [s, l-s] \times \mathbb{R}) \quad (4B.483)$$

$$\leq \sum_{j_2 \geq j_\star} \sum_{j_1 \geq j_1(j_2)} Kl 2^{-j_1} \quad (4B.484)$$

$$\leq \sum_{j_2 \geq j_\star} Kl 2^{-j_1(j_2)} \quad (4B.485)$$

$$\leq \sum_{j_2 \geq j_\star} Kl \xi^{-1/(2(\alpha-1))} 2^{j_2/4(\alpha-1)} \quad (4B.486)$$

$$M_{14} \leq Kl \xi^{-1/(2(\alpha-1))} \quad (4B.487)$$

et une erreur  $E_{14}$  est bornée par

$$E_{14} = \sum_{j_2 \geq j_\star} \sum_{\max(j_\star, s) < j_1 < j_1(j_2)} \sum_{k, b_{j_1, j_2, k} \text{ de bord}, \mathcal{S}(b_{j_1, j_2, k}) \cap \mathcal{C}_s \neq \emptyset, \mathcal{S}(b_{j_1, j_2, k}) \subset [s, l-s] \times \mathbb{R}} |\langle f_s, b_{j_1, j_2, k} \rangle|^2 \quad (4B.488)$$

$$\leq \sum_{j_2 \geq j_\star} \sum_{j_1 < j_1(j_2)} \sum_{k, b_{j_1, j_2, k} \text{ de bord}, \mathcal{S}(b_{j_1, j_2, k}) \cap \mathcal{C}_s \neq \emptyset, \mathcal{S}(b_{j_1, j_2, k}) \subset [s, l-s] \times \mathbb{R}} K^2 \max(1, \|D^\alpha c\|^{2\alpha+2}) \|D^\alpha f\|_{\frac{2}{\xi}}^2 2^{j_2} 2^{(2\alpha-1)j_1} \quad (4B.489)$$

$$\leq \sum_{j_2 \geq j_\star} \sum_{\max(j_\star, s) < j_1 < j_1(j_2)} \#(k, b_{j_1, j_2, k} \text{ de bord}, \mathcal{S}(b_{j_1, j_2, k}) \cap \mathcal{C}_s \neq \emptyset, \mathcal{S}(b_{j_1, j_2, k}) \subset [s, l-s] \times \mathbb{R}) \times K^2 \max(1, \|D^\alpha c\|^{2\alpha+2}) \|D^\alpha f\|_{\frac{2}{\xi}}^2 2^{j_2} 2^{(2\alpha-1)j_1} \quad (4B.490)$$

$$\leq \sum_{j_2 \geq j_\star} \sum_{\max(j_\star, s) < j_1 < j_1(j_2)} Kl 2^{-j_1} \max(1, \|D^\alpha c\|^{2\alpha+2}) \|D^\alpha f\|_{\frac{2}{\xi}}^2 2^{j_2} 2^{(2\alpha-1)j_1} \quad (4B.491)$$

$$\leq \sum_{j_2 \geq j_\star} \sum_{\max(j_\star, s) < j_1 < j_1(j_2)} Kl \max(1, \|D^\alpha c\|^{2\alpha+2}) \|D^\alpha f\|_{\frac{2}{\xi}}^2 2^{j_2} 2^{(2\alpha-1)j_1} \quad (4B.492)$$

$$\leq \sum_{j_2 \geq j_\star, j_1(j_2) > \max(j_\star, s)} Kl \max(1, \|D^\alpha c\|^{2\alpha+2}) \|D^\alpha f\|_{\frac{2}{\xi}}^2 2^{j_2} 2^{(2\alpha-1)j_1(j_2)} \quad (4B.493)$$

$$\leq \sum_{j_2 \geq j_\star} Kl \max(1, \|D^\alpha c\|^{2\alpha+2}) \|D^\alpha f\|_{\frac{2}{\xi}}^2 2^{j_2/2} \xi \quad (4B.494)$$

$$E_{14} \leq Kl \max(1, \|D^\alpha c\|^{2\alpha+2}) \|D^\alpha f\|_{\frac{2}{\xi}}^2 \xi. \quad (4B.495)$$

□

Si  $\epsilon > s$ ,  $j_\star > s$  et il ne reste plus de bandelettes de bord satisfaisant  $\mathcal{S}(b_{j_1, j_2, k}) \subset [\eta, l - \eta] \times \mathbb{R}$ . Sinon on utilise le lemme suivant.

**Lemme 4B.19.** *Parmi les bandelettes de bord qui rencontrent  $\mathcal{C}_s$  telles que  $j_2 \geq j_\star$ ,  $j_2 \geq j_1$  et  $s \geq j_1 \geq j_\star$  et telles que  $\mathcal{S}(b_{j_1, j_2, k}) \subset [\eta, l - \eta] \times \mathbb{R}$ , si on conserve les bandelettes de bord telles que*

$$j_2 \geq j_\star \quad (4B.496)$$

et

$$j_1 \geq \max(\log \xi + 2 \log_2(s))/(2\alpha) - j_2/(4\alpha), j_\star) \quad (4B.497)$$

le nombre  $M_{15}$  de coefficients conservés satisfait

$$M_{15} \leq \begin{cases} 0 & \text{si } \xi \geq s^2 \\ Kl \xi^{-1/\alpha} & \text{si } \xi \leq s^2 \end{cases} \quad (4B.498)$$

et l'erreur résultante  $E_{15}$  satisfait

$$E_{15} \leq Kl \max(1, \|D^\alpha c\|^{2\alpha+2}) \|D^\alpha f\|_{\overline{\mathcal{C}}}^2 \xi. \quad (4B.499)$$

*Démonstration.* À chaque échelle d'indices  $(j_1, j_2)$ , le nombre de ces bandelettes de bord est borné par  $Kl 2^{-j_1}$  et cette majoration est grossière pour  $j_2 \ll s$  puisqu'alors les bandelettes de bord ne traversent plus la singularité.

De plus, en utilisant la régularité de  $Wf_s$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^\alpha}{\partial x_1^\alpha} Wf_s(x_1) \\ \leq K \max(1, \|D^\alpha c\|^{\alpha+1}) \|D^\alpha f\|_{\overline{\mathcal{C}}} s^{-1} \end{aligned} \quad (4B.500)$$

et le lemme 4.3, on obtient

$$|\langle f_s, b_{j_1, j_2, k} \rangle| = |\langle Wf_s, \psi_{j_1, k_1} \otimes \psi_{j_2, k_2} \rangle| \quad (4B.501)$$

$$|\langle f_s, b_{j_1, j_2, k} \rangle| \leq K \max(1, \|D^\alpha c\|^{\alpha+1}) \|D^\alpha f\|_{\overline{\mathcal{C}}} s^{-1} 2^{j_2/2} 2^{(\alpha+1/2)j_1}. \quad (4B.502)$$

On garde alors les bandelettes de bord telles que

$$j_2 \geq j_\star \quad (4B.503)$$

et

$$j_1 \leq s \quad (4B.504)$$

$$j_1 \geq (\log_2(\xi) + 2 \log_2(s))/(2\alpha) - j_2/(4\alpha) \quad (4B.505)$$

$$j_1 \geq j_1(j_2). \quad (4B.506)$$

Si  $\xi \geq s^2$  alors  $\log_2(\xi) \geq 2 \log_2(s)$  et  $(\log_2(\xi) + 2 \log_2(s)) / (2\alpha) \geq \log_2(s)$ , on ne conserve donc aucun coefficient. L'erreur  $E_{15}$  est alors donnée par

$$E_{15} \leq \sum_{j_2 \geq j_*} \sum_{s \geq j_1 \geq j_*} \sum_{k, b_{j_1, j_2, k} \text{ de bord, } \mathcal{S}(b_{j_1, j_2, k}) \cap \mathcal{C}_s \neq \emptyset, \mathcal{S}(b_{j_1, j_2, k}) \not\subset [\eta, l - \eta] \times \mathbb{R}} |\langle f_s, b_{j_1, j_2, k} \rangle|^2 \quad (4B.507)$$

$$\leq \sum_{j_2 \geq j_*} \sum_{s \geq j_1 \geq j_*} \sum_{k, b_{j_1, j_2, k} \text{ de bord, } \mathcal{S}(b_{j_1, j_2, k}) \cap \mathcal{C}_s \neq \emptyset, \mathcal{S}(b_{j_1, j_2, k}) \not\subset [\eta, l - \eta] \times \mathbb{R}} \times K^2 \max(1, \|D^\alpha c\|^{\alpha+1})^2 \|D^\alpha f\|_{\frac{2}{C}}^2 s^{-2} 2^{j_2} 2^{(2\alpha+1)j_1} \quad (4B.508)$$

$$\leq \sum_{j_2 \geq j_*} \sum_{s \geq j_1 \geq j_*} \#(k, b_{j_1, j_2, k} \text{ de bord, } \mathcal{S}(b_{j_1, j_2, k}) \cap \mathcal{C}_s \neq \emptyset, \mathcal{S}(b_{j_1, j_2, k}) \not\subset [\eta, l - \eta] \times \mathbb{R}) K^2 \max(1, \|D^\alpha c\|^{2\alpha+2}) \|D^\alpha f\|_{\frac{2}{C}}^2 s^{-2} 2^{j_2} 2^{(2\alpha+1)j_1} \quad (4B.509)$$

$$\leq \sum_{j_2 \geq j_*} \sum_{s \geq j_1 \geq j_*} Kl 2^{-j_1} \max(1, \|D^\alpha c\|^{2\alpha+2}) \|D^\alpha f\|_{\frac{2}{C}}^2 s^{-2} 2^{j_2} 2^{(2\alpha+1)j_1} \quad (4B.510)$$

$$\leq \sum_{j_2 \geq j_*} \sum_{s \geq j_1 \geq j_*} Kl \max(1, \|D^\alpha c\|^{2\alpha+2}) \|D^\alpha f\|_{\frac{2}{C}}^2 s^{-2} 2^{j_2} 2^{2\alpha j_1} \quad (4B.511)$$

$$\leq \sum_{j_2 \geq j_*} Kl \max(1, \|D^\alpha c\|^{2\alpha+2}) \|D^\alpha f\|_{\frac{2}{C}}^2 s^{-2} 2^{j_2} 2^{2\alpha s} \quad (4B.512)$$

$$\leq \sum_{j_2 \geq j_*} Kl \max(1, \|D^\alpha c\|^{2\alpha+2}) \|D^\alpha f\|_{\frac{2}{C}}^2 2^{j_2} 2^{2(\alpha-1)s} \quad (4B.513)$$

$$\leq Kl \max(1, \|D^\alpha c\|^{2\alpha+2}) \|D^\alpha f\|_{\frac{2}{C}}^2 2^{2(\alpha-1)s} \quad (4B.514)$$

$$\leq Kl \max(1, \|D^\alpha c\|^{2\alpha+2}) \|D^\alpha f\|_{\frac{2}{C}}^2 2^{2s} \quad (4B.515)$$

$$E_{15} \leq Kl \max(1, \|D^\alpha c\|^{2\alpha+2}) \|D^\alpha f\|_{\frac{2}{C}}^2 \eta. \quad (4B.516)$$

Sinon  $\xi \leq s^2$  et le nombre  $M_{15}$  de coefficients conservés est borné par

$$M_{15} \leq \sum_{j_2 \geq j_*} \sum_{s \geq j_1 \geq j_1(j_2)} \sum_{k, b_{j_1, j_2, k} \text{ de bord, } \mathcal{S}(b_{j_1, j_2, k}) \cap \mathcal{C}_s \neq \emptyset, \mathcal{S}(b_{j_1, j_2, k}) \not\subset [\eta, l - \eta] \times \mathbb{R}} \quad (4B.517)$$

$$\leq \sum_{j_2 \geq j_*} \sum_{s \geq j_1 \geq j_1(j_2)} \#(k, b_{j_1, j_2, k} \text{ de bord, } \mathcal{S}(b_{j_1, j_2, k}) \cap \mathcal{C}_s \neq \emptyset, \mathcal{S}(b_{j_1, j_2, k}) \not\subset [\eta, l - \eta] \times \mathbb{R}) \quad (4B.518)$$

$$\leq \sum_{j_2 \geq j_*} \sum_{s \geq j_1 \geq j_1(j_2)} Kl 2^{-j_1} \quad (4B.519)$$

$$\leq \sum_{j_2 \geq j_*} Kl 2^{-j_1(j_2)} \quad (4B.520)$$

$$\leq \sum_{j_2 \geq j_*} Kl \xi^{-1/(2\alpha)} s^{-1/(2\alpha)} 2^{j_2/(4\alpha)} \quad (4B.521)$$

$$\leq Kl \xi^{-1/(2\alpha)} s^{-2/(2\alpha)} \quad (4B.522)$$

$$M_{15} \leq Kl \xi^{-1/\alpha} \quad (4B.523)$$

et l'erreur  $E_{15}$  est majorée par

$$E_{15} \leq \sum_{j_2 \geq j_*} \sum_{j_1(j_2) \geq j_1 \geq j_*} \sum_{k, b_{j_1, j_2, k} \text{ de bord, } \mathcal{S}(b_{j_1, j_2, k}) \cap \mathcal{C}_s \neq \emptyset, \mathcal{S}(b_{j_1, j_2, k}) \not\subset [\eta, l - \eta] \times \mathbb{R}} |\langle f_s, b_{j_1, j_2, k} \rangle|^2 \quad (4B.524)$$

$$\leq \sum_{j_2 \geq j_*} \sum_{j_1(j_2) \geq j_1 \geq j_*} \sum_{k, b_{j_1, j_2, k} \text{ de bord, } \mathcal{S}(b_{j_1, j_2, k}) \cap \mathcal{C}_s \neq \emptyset, \mathcal{S}(b_{j_1, j_2, k}) \not\subset [\eta, l - \eta] \times \mathbb{R}} K^2 \max(1, \|D^\alpha c\|^{\alpha+1})^2 \times \|D^\alpha f\|_{\mathcal{C}}^2 s^{-2} 2^{j_2} 2^{(2\alpha+1)j_1} \quad (4B.525)$$

$$\leq \sum_{j_2 \geq j_*} \sum_{j_1(j_2) \geq j_1 \geq j_*} \#(k, b_{j_1, j_2, k} \text{ de bord, } \mathcal{S}(b_{j_1, j_2, k}) \cap \mathcal{C}_s \neq \emptyset, \mathcal{S}(b_{j_1, j_2, k}) \not\subset [\eta, l - \eta] \times \mathbb{R}) \times K^2 \max(1, \|D^\alpha c\|^{2\alpha+2}) \|D^\alpha f\|_{\mathcal{C}}^2 s^{-2} 2^{j_2} 2^{(2\alpha+1)j_1} \quad (4B.526)$$

$$E_{15} \leq \sum_{j_2 \geq j_*} \sum_{j_1 < j_1(j_2)} Kl 2^{-j_1} \max(1, \|D^\alpha c\|^{2\alpha+2}) \|D^\alpha f\|_{\mathcal{C}}^2 s^{-2} 2^{j_2} 2^{(2\alpha+1)j_1} \quad (4B.527)$$

$$\leq \sum_{j_2 \geq j_*} \sum_{j_1 < j_1(j_2)} Kl \max(1, \|D^\alpha c\|^{2\alpha+2}) \|D^\alpha f\|_{\mathcal{C}}^2 s^{-2} 2^{j_2} 2^{2\alpha j_1} \quad (4B.528)$$

$$\leq \sum_{j_2 \geq j_*} Kl \max(1, \|D^\alpha c\|^{2\alpha+2}) \|D^\alpha f\|_{\mathcal{C}}^2 s^{-2} 2^{j_2} 2^{2\alpha j_1(j_2)} \quad (4B.529)$$

$$\leq \sum_{j_2 \geq j_*} Kl \max(1, \|D^\alpha c\|^{2\alpha+2}) \|D^\alpha f\|_{\mathcal{C}}^2 2^{j_2/2} \xi \quad (4B.530)$$

$$E_{15} \leq Kl \max(1, \|D^\alpha c\|^{2\alpha+2}) \|D^\alpha f\|_{\mathcal{C}}^2 \xi. \quad (4B.531)$$

□

**Lemme 4B.20.** *Le nombre  $M_{16}$  de bandelettes de bord qui rencontrent  $\mathcal{C}_s$  avec  $j_2 \geq j_1 \geq j_*$  et telles que  $\mathcal{S}(b_{j_1, j_2, k}) \not\subset [\eta, l - \eta] \times \mathbb{R}$  satisfait*

$$M_{16} \leq \begin{cases} K |\log_2(\max(\epsilon, \xi))|^2 & \text{si } \max(\epsilon, \xi) \geq s \\ K \xi^{-1/\alpha} & \text{sinon} \end{cases} \quad (4B.532)$$

*Démonstration.* Le nombre de ces bandelettes de bord à l'échelle d'indices  $(j_1, j_2)$  est borné par  $K$  si  $j_2 \geq j_1 \geq \log_2(\eta)$ ,  $K\eta 2^{-j_1}$  si  $j_1 < \log_2(\eta) \leq j_2$  et  $K\eta 2^{-j_1} \eta 2^{-j_2}$  si  $\log_2(\eta) > j_2 \geq j_1$ .

Donc si  $\epsilon \geq s$ ,  $\eta = \epsilon$  et  $j_* = \max(\log_2(\epsilon), \log_2(\xi)) \geq \log_2(\eta)$  et le nombre  $M_{16}$  de ces bandelettes est donc borné par

$$M_{16} = \sum_{j_1 \geq j_*} \sum_{j_2 \geq j_1} \sum_{k, b_{j_1, j_2, k} \text{ de bord, } \mathcal{S}(b_{j_1, j_2, k}) \cap \mathcal{C}_s \neq \emptyset, \mathcal{S}(b_{j_1, j_2, k}) \not\subset [\eta, l - \eta] \times \mathbb{R}} \quad (4B.533)$$

$$= \sum_{j_1 \geq j_*} \sum_{j_2 \geq j_1} \#(k, b_{j_1, j_2, k} \text{ de bord, } \mathcal{S}(b_{j_1, j_2, k}) \cap \mathcal{C}_s \neq \emptyset, \mathcal{S}(b_{j_1, j_2, k}) \not\subset [\eta, l - \eta] \times \mathbb{R}) \quad (4B.534)$$

$$\leq \sum_{j_1 \geq j_*} \sum_{j_2 \geq j_1} K \quad (4B.535)$$

$$\leq \sum_{j_1 \geq j_*} K |j_1| \quad (4B.536)$$

$$\leq K |j_*|^2 \quad (4B.537)$$

$$M_{16} \leq K |\log_2(\max(\epsilon, \xi))|^2. \quad (4B.538)$$

Sinon  $\epsilon < s$  et  $\eta = s$ , on distingue alors les cas  $\xi \geq s$  et  $\xi < s$ .

Si  $\xi \geq s = \eta$ ,  $j_* = \log_2(\xi)$  et on retrouve le calcul précédent :

$$M_{16} = \sum_{j_1 \geq j_*} \sum_{j_2 \geq j_1} \sum_{k, b_{j_1, j_2, k} \text{ de bord, } \mathcal{S}(b_{j_1, j_2, k}) \cap \mathcal{C}_s \neq \emptyset, \mathcal{S}(b_{j_1, j_2, k}) \not\subset [\eta, l - \eta] \times \mathbb{R}} \quad (4B.539)$$

$$= \sum_{j_1 \geq j_*} \sum_{j_2 \geq j_1} \#(k, b_{j_1, j_2, k} \text{ de bord, } \mathcal{S}(b_{j_1, j_2, k}) \cap \mathcal{C}_s \neq \emptyset, \mathcal{S}(b_{j_1, j_2, k}) \not\subset [\eta, l - \eta] \times \mathbb{R}) \quad (4B.540)$$

$$\leq \sum_{j_1 \geq j_*} \sum_{j_2 \geq j_1} K \quad (4B.541)$$

$$\leq \sum_{j_1 \geq j_*} K |j_1| \quad (4B.542)$$

$$\leq K |j_*|^2 \quad (4B.543)$$

$$M_{16} \leq K |\log_2(\xi)|^2. \quad (4B.544)$$

Sinon  $\xi < s$ ,  $j_* = \log_2(s) + (\log_2(\xi) - \log_2(s))/(2\alpha)$  et le nombre  $M_{16}$  de ces bandelettes

est borné par

$$M_{16} = \sum_{j_1 \geq j_\star} \sum_{j_2 \geq j_1} \sum_{k, b_{j_1, j_2, k} \text{ de bord, } \mathcal{S}(b_{j_1, j_2, k}) \cap \mathcal{C}_s \neq \emptyset, \mathcal{S}(b_{j_1, j_2, k}) \not\subset [s, l-s] \times \mathbb{R}} \quad (4B.545)$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{j_1 \geq \log_2(s)} \sum_{j_2 \geq j_1} \sum_{k, b_{j_1, j_2, k} \text{ de bord, } \mathcal{S}(b_{j_1, j_2, k}) \cap \mathcal{C}_s \neq \emptyset, \mathcal{S}(b_{j_1, j_2, k}) \not\subset [s, l-s] \times \mathbb{R}} \\ &\quad + \sum_{\log_2(s) > j_1 \geq j_\star} \sum_{j_2 \geq \log_2(s)} \sum_{k, b_{j_1, j_2, k} \text{ de bord, } \mathcal{S}(b_{j_1, j_2, k}) \cap \mathcal{C}_s \neq \emptyset, \mathcal{S}(b_{j_1, j_2, k}) \not\subset [s, l-s] \times \mathbb{R}} \\ &\quad + \sum_{\log_2(s) > j_1 \geq j_\star} \sum_{\log_2(s) > j_2 \geq j_1} \sum_{k, b_{j_1, j_2, k} \text{ de bord, } \mathcal{S}(b_{j_1, j_2, k}) \cap \mathcal{C}_s \neq \emptyset, \mathcal{S}(b_{j_1, j_2, k}) \not\subset [s, l-s] \times \mathbb{R}} \end{aligned} \quad (4B.546)$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{j_1 \geq \log_2(s)} \sum_{j_2 \geq j_1} \\ &\quad \#(k, b_{j_1, j_2, k} \text{ de bord, } \mathcal{S}(b_{j_1, j_2, k}) \cap \mathcal{C}_s \neq \emptyset, \mathcal{S}(b_{j_1, j_2, k}) \not\subset [s, l-s] \times \mathbb{R}) \\ &\quad + \sum_{\log_2(s) > j_1 \geq j_\star} \sum_{j_2 \geq \log_2(s)} \\ &\quad \#(k, b_{j_1, j_2, k} \text{ de bord, } \mathcal{S}(b_{j_1, j_2, k}) \cap \mathcal{C}_s \neq \emptyset, \mathcal{S}(b_{j_1, j_2, k}) \not\subset [s, l-s] \times \mathbb{R}) \\ &\quad + \sum_{\log_2(s) > j_1 \geq j_\star} \sum_{\log_2(s) > j_2 \geq j_1} \\ &\quad \#(k, b_{j_1, j_2, k} \text{ de bord, } \mathcal{S}(b_{j_1, j_2, k}) \cap \mathcal{C}_s \neq \emptyset, \mathcal{S}(b_{j_1, j_2, k}) \not\subset [s, l-s] \times \mathbb{R}) \end{aligned} \quad (4B.547)$$

$$\begin{aligned} &\leq \sum_{j_1 \geq \log_2(s)} \sum_{j_2 \geq j_1} K + \sum_{\log_2(s) > j_1 \geq j_\star} \sum_{j_2 \geq \log_2(s)} K s 2^{-j_1} \\ &\quad + \sum_{\log_2(s) > j_1 \geq j_\star} \sum_{\log_2(s) > j_2 \geq j_1} K s 2^{-j_1} s 2^{-j_2} \end{aligned} \quad (4B.548)$$

$$\leq \sum_{j_1 \geq \log_2(s)} K |j_1| + \sum_{j_1 \geq j_\star} K |\log_2(s)| s 2^{-j_1} + \sum_{j_1 \geq j_\star} K s^2 2^{-2j_1} \quad (4B.549)$$

$$\leq K |\log_2(s)|^2 + K |\log_2(s)| s 2^{-j_\star} + K s^2 2^{-2j_\star} \quad (4B.550)$$

$$\leq K |\log_2(s)|^2 + K |\log_2(s)| s^{1/(2\alpha)} \xi^{-1/(2\alpha)} + K s^{1/\alpha} \xi^{-1/\alpha} \quad (4B.551)$$

$$M_{16} \leq K \xi^{-1/\alpha} . \quad (4B.552)$$

□

## 4B.3 Approximation non-linéaire

Dans cette section, on cherche à justifier les trois tableaux de la démonstration 4.1 et à démontrer le lemme 4.5.

### 4B.3.1 Les trois tableaux

Ces trois tableaux donnent pour chacune des catégories de coefficients le nombre de coefficients conservés ainsi que l'erreur résultante due au coefficients abandonnés. Ces valeurs sont données à une constante multiplicative près qui ne dépend pas de la fonction.

Le premier tableau correspond au cas du lissage large,  $s \geq s_0$ , où l'on utilise uniquement des ondelettes isotropes : les ondelettes 1 sont celles ne rencontrant aucun des contours lissés et les ondelettes 2 celles rencontrant l'un des contours lissés.

$k$	$M_k$	$E_k$
Échelle minimale		
$\epsilon$	0	$(\ D^\alpha f\ _{\mathcal{C}}^2 + \sum l_{c_i} \ f\ _\infty^2)\epsilon$
0	0	$(\ D^\alpha f\ _{\mathcal{C}}^2 + \sum_i l_{c_i} \ f\ _\infty^2)\xi$
Ondelettes isotropes		
1	$\xi^{-1/\alpha}$	$\ D^\alpha f\ _{\mathcal{C}}^2 \xi$
2	$\sum_i l_{c_i} s_0^{-1} (1 + s_0^{1/\alpha} \xi^{-1/\alpha})$	$\sum_i l_{c_i} \ f\ _\infty^2 \xi$
3	$\emptyset$	
Ondelettes déformées		
4	$\emptyset$	
5	$\emptyset$	
6	$\emptyset$	
Bandelettes intérieures		
7	$\emptyset$	
8	$\emptyset$	
9	$\emptyset$	
10	$\emptyset$	
11	$\emptyset$	
Bandelettes de bord		
12	$\emptyset$	
13	$\emptyset$	
14	$\emptyset$	
15	$\emptyset$	
16	$\emptyset$	



Le deuxième tableau correspond au cas du lissage faible,  $s \leq \epsilon$ , où la fonction se comporte comme si elle n'était pas lissée. On utilise alors la famille orthonormée de bandelettes pour les domaines (ondelettes isotropes déformées, bandelettes intérieures et bandelettes de bord) et les ondelettes isotropes pour le fond.

$k$	$M_k$	$E_k$
		Échelle minimale
$\epsilon$	0	$\max_i(1, \ D^\alpha c_i\ ^{2\alpha}) \times (\ D^\alpha f\ _{\mathcal{C}}^2 + \sum_i l_{c_i} \ f\ _\infty^2) \epsilon$
0	0	$\max_i(1, \ D^\alpha c_i\ ^{2\alpha}) \times (\ D^\alpha f\ _{\mathcal{C}}^2 + \sum_i l_{c_i} \ f\ _\infty^2) \xi$
		Ondelettes isotropes
1	$\xi^{-1/\alpha}$	$\ D^\alpha f\ _{\mathcal{C}}^2 \xi$
2	$\sum_i l_{c_i} s_0^{-1}$	0
3	$\#(I) \min( \log_2(\xi) /2,  \log_2(s)  + s^{1/\alpha} \xi^{-1/(2\alpha)})$	$\#(I) \ f\ _\infty^2 \xi$
		Ondelettes déformées
4	$\sum_i l_{c_i} \xi^{-1/(2\alpha+1)}$	$\sum_i l_{c_i} \max_i(1, \ D^\alpha c_i\ ^{2\alpha}) \ D^\alpha f\ _{\mathcal{C}}^2 \xi$
5	$\#(I) \min( \log_2(\xi) /2,  \log_2(\epsilon) , \xi^{-1/(2\alpha+1)})$	$\#(I) \max_i(1, \ D^\alpha c_i\ ^{2\alpha}) \ f\ _\infty^2 \xi$
6	$\sum_i l_{c_i} s_0^{-1}$	0
		Bandelettes intérieures
7	$\sum_i l_{c_i} \xi^{-1/\alpha}$	$l \max_i(1, \ D^\alpha c_i\ ^{2\alpha+2}) \ D^\alpha f\ _{\mathcal{C}}^2 \xi$
8	$\sum_i l_{c_i} \xi^{-1/(2\alpha)} \epsilon^{-1/(2\alpha)}$	$\sum_i l_{c_i} \max_i(1, \ D^\alpha c_i\ ^{2\alpha+2}) \ f\ _\infty^2 \xi$
9	$\begin{cases} 0 & \text{si } s \leq \xi \\ \#(I) \xi^{-1/(2\alpha)} & \text{sinon} \end{cases}$	0
10	$\emptyset$	
11	$\emptyset$	
		Bandelettes de bord
12	$\sum_i l_{c_i} \xi^{-1/\alpha}$	$\sum_i l_{c_i} \max_i(1, \ D^\alpha c_i\ ^{2\alpha+2}) \ D^\alpha f\ _{\mathcal{C}}^2 \xi$
13	$\#(I) ( \log_2(\max(\epsilon, \xi)) )^2$	0
14	$\sum_i l_{c_i} \xi^{-1/(2(\alpha-1))}$	$\sum_i l_{c_i} \max_i(1, \ D^\alpha c_i\ ^{2\alpha+2}) \ D^\alpha f\ _{\mathcal{C}}^2 \xi$
15	$\begin{cases} 0 & \text{si } \xi \geq s^2 \\ \sum_i l_{c_i} \xi^{-1/\alpha} & \text{si } \xi \leq s^2 \end{cases}$	$\sum_i l_{c_i} \max_i(1, \ D^\alpha c_i\ ^{2\alpha+2}) \ D^\alpha f\ _{\mathcal{C}}^2 \xi$
16	$\#(I)  \log_2(\max(\xi, \epsilon)) ^2$	0

Le troisième et dernier tableau correspond au cas du lissage intermédiaire,  $s_0 \geq s \geq \epsilon$ , où l'on utilise les propriétés du noyau de lissage. Pour représenter la fonction sur le domaine, on utilise la famille orthonormée de bandelettes (ondelettes isotropes déformées, bandelettes intérieures et bandelettes de bord) pour les domaines et les ondelettes isotropes pour le fond.

$k$	$M_k$	$E_k$
	Échelle minimale	
$\epsilon$	0	$\max_i(1, \ D^\alpha c_i\ ^{2\alpha})$ $\times (\ D^\alpha f\ _{\mathcal{C}}^2 + \ f\ _\infty^2) \epsilon$
0	0	$\max_i(1, \ D^\alpha c_i\ ^{2\alpha})$ $\times (\ D^\alpha f\ _{\mathcal{C}}^2 + \ f\ _\infty^2) \xi$
	Ondelettes isotropes	
1	$\xi^{-1/\alpha}$	$\ D^\alpha f\ _{\mathcal{C}}^2 \xi$
2	$\sum_i l_{c_i} s_0^{-1}$	0
3	$\#(I) \min( \log_2(\xi) /2,  \log_2(s)  + s^{1/\alpha} \xi^{-1/(2\alpha)})$	$\#(I) \ f\ _\infty^2 \xi$
	Ondelettes déformées	
4	$\sum_i l_{c_i} \xi^{-1/(2\alpha+1)}$	$\sum_i l_{c_i} \max_i(1, \ D^\alpha c_i\ ^{2\alpha}) \ D^\alpha f\ _{\mathcal{C}}^2 \xi$
5	$\#(I) \min( \log_2(\xi) /2,  \log_2(\epsilon) , \xi^{-1/(2\alpha+1)})$	$\#(I) \max_i(1, \ D^\alpha c_i\ ^{2\alpha}) \ f\ _\infty^2 \xi$
6	$l s_0^{-1}$	0
	Bandelettes intérieures	
7	$\sum_i l_{c_i} \xi^{-1/\alpha}$	$\sum_i l_{c_i} \max_i(1, \ D^\alpha c_i\ ^{2\alpha+2}) \ D^\alpha f\ _{\mathcal{C}}^2 \xi.$
8	$\sum_i l_{c_i} \xi^{-1/(2\alpha)} \epsilon^{-1/(2\alpha)}$	$\sum_i l_{c_i} \max_i(1, \ D^\alpha c_i\ ^{2\alpha+2}) \ f\ _\infty^2 \xi$
9	$\begin{cases} 0 & \text{si } s \leq \xi \\ \#(I) \xi^{-1/(2\alpha)} & \text{sinon} \end{cases}$	0
10	$\sum_i l_{c_i} \xi^{-1/\alpha}$	$\sum_i l_{c_i} \max_i(1, \ D^\alpha c_i\ ^{2\alpha+2}) \ D^\alpha f\ _{\mathcal{C}}^2 \xi$
11	$\begin{cases} \#(I) \xi^{-1/\alpha} & \text{si } s \leq \xi \\ \#(I) (\xi^{-1/(2\alpha)} +  \log_2(\epsilon) ) & \text{sinon} \end{cases}$	$\max_i(1, \ D^\alpha c_i\ ^{2\alpha+2}) \ f\ _\infty^2 \xi$
	Bandelettes de bord	
12	$\sum_i l_{c_i} \xi^{-1/\alpha}$	$\sum_i l_{c_i} \max_i(1, \ D^\alpha c_i\ ^{2\alpha+2}) \ D^\alpha f\ _{\mathcal{C}}^2 \xi$
13	$\begin{cases} \#(I) ( \log_2(\max(\xi)) )^2 & \text{si } \xi \geq s \\ \#(I) (( \log_2(\max(\epsilon)) )^2 + \xi^{-1/\alpha}) & \text{sinon} \end{cases}$	0
14	$\sum_i l_{c_i} \xi^{-1/(2(\alpha-1))}$	$\sum_i l_{c_i} \max_i(1, \ D^\alpha c_i\ ^{2\alpha+2}) \ D^\alpha f\ _{\mathcal{C}}^2 \xi$
15	$\begin{cases} 0 & \text{si } \xi \geq s^2 \\ \sum_i l_{c_i} \xi^{-1/\alpha} & \text{si } \xi \leq s^2 \end{cases}$	$\sum_i l_{c_i} \max_i(1, \ D^\alpha c_i\ ^{2\alpha+2}) \ D^\alpha f\ _{\mathcal{C}}^2 \xi$
16	$\begin{cases} \#(I)  \log_2(\xi) ^2 & \text{si } \xi \geq s \\ \#(I) \xi^{-1/\alpha} & \text{sinon} \end{cases}$	0

#### 4B.3.1.1 Cas du lissage large ( $s \geq s_0$ )

Comme dans le cas du domaine seul, si le lissage est trop large, on utilise la base d'ondelettes isotropes. Les résultats sont alors similaires.

**Lemme 4B.21.** Parmi les ondelettes isotropes qui ne rencontrent aucun  $\mathcal{C}_{i,s}$ , si on ne conserve que les ondelettes au dessus de l'échelle d'indice  $j_0 = \log_2(\xi)/(2\alpha)$ , le nombre  $M_1$  de coefficients conservés satisfait

$$M_1 \leq K \xi^{-1/\alpha} \quad (4B.553)$$

et l'erreur résultante  $E_1$  satisfait

$$E_1 \leq K \|D^\alpha f\|_{\mathcal{C}}^2 \xi. \quad (4B.554)$$

*Démonstration.* Cette preuve est identique à celle du lemme 4B.1 dans le cas d'un seul domaine. Seul le nombre d'ondelettes concernées à chaque échelle change passant de  $l 2^{-2j}$  à  $2^{-2j}$  et on obtient donc bien le résultat souhaité.  $\square$

**Lemme 4B.22.** Parmi les ondelettes isotropes qui rencontrent au moins une des courbes lissées  $\mathcal{C}_{i,s}$ , si on ne conserve que les ondelettes au dessus de l'échelle d'indice

$$j_0 = \max(\log_2(\xi), \log_2(s) + \min(\log_2(\xi) - \log_2(s))/(2\alpha)) , \quad (4B.555)$$

le nombre  $M_2$  de coefficients conservés satisfait

$$M_2 \leq \begin{cases} K \sum_i l_{c_i} s^{-1} (1 + s^{1/\alpha} \xi^{-1/\alpha}) & \text{si } \xi < s \\ K \sum_i l_{c_i} \xi^{-1} & \text{si } \xi \geq s \end{cases} \quad (4B.556)$$

et l'erreur  $E_2$  résultante satisfait

$$E_2 \leq K \sum_i l_{c_i} \|f\|_\infty^2 \xi. \quad (4B.557)$$

**Corollaire 4B.23.** Si  $s \geq s_0$ , le nombre de coefficients conservés  $M_2$  satisfait

$$M_2 \leq K \sum_i l_{c_i} s_0^{-(1-1/\alpha)} (s_0^{-\alpha} + \xi^{-1/\alpha}). \quad (4B.558)$$

*Démonstration.* La preuve est similaire à celle du lemme 4B.2 dans le cas d'un seul domaine. Seul le nombre d'ondelettes concernées à chaque échelle varie : on passe de  $K l 2^{-j}$  à  $K \sum_i l_{c_i} 2^{-j}$  si  $2^j \geq s$  et de  $K l s 2^{-2j}$  à  $K \sum_i l_{c_i} s 2^{-2j}$  lorsque  $2^j \leq s$ . On obtient donc le résultat souhaité.  $\square$

### 4B.3.1.2 Échelle minimale dans le frame de bandelettes

Comme dans le cas du domaine seul, on montre l'existence d'une échelle minimale dans le frame de bandelettes en dessous de laquelle l'énergie est négligeable.

**Lemme 4B.24.** L'énergie  $E_0$  des coefficients du frame de bandelettes ayant une échelle inférieure à l'échelle d'indice  $j_*$  définie par

$$j_* = \max(\log_2(\xi), \log_2(s) + (\log_2(\xi) - \log_2(s))/(2\alpha)) \quad (4B.559)$$

qui est plus grand que  $\log_2(\xi)$  satisfait

$$E_0 \leq K \left( \sum_i l_{c_i} (1 + \max(1, \|D^\alpha c_i\|^\alpha)) \|f\|_\infty^2 + (1 + \sum_i \max(1, \|D^\alpha c_i\|^\alpha) l_{c_i}) \|D^\alpha f\|_{\mathcal{C}}^2 \right) \xi. \quad (4B.560)$$

**Corollaire 4B.25.** *L'énergie  $E_\epsilon$  de tous les coefficients du frame de bandelettes ayant une échelle inférieure à l'échelle  $\epsilon$  satisfait*

$$E_\epsilon \leq K \left( \sum_i l_{c_i} (1 + \max(1, \|D^\alpha c_i\|^\alpha)) \|f\|_\infty^2 + (1 + \sum_i \max(1, \|D^\alpha c_i\|^\alpha) l_{c_i}) \|D^\alpha f\|_{\mathcal{C}}^2 \right) \epsilon . \quad (4B.561)$$

*Démonstration.* Les deux lemmes précédents permettent d'obtenir une majoration de l'erreur due aux ondelettes isotropes puisque dans les deux cas l'échelle de coupure est supérieure ou égale à  $j_*$ . L'erreur  $E_{0,0}$  due aux ondelettes isotropes est donc inférieure à

$$E_{0,0} \leq K \left( \sum_i l_{c_i} \|f\|_\infty^2 + \|D^\alpha f\|_{\mathcal{C}}^2 \right) \xi . \quad (4B.562)$$

Les ondelettes déformées sur chaque domaine ont déjà été étudiées et on a obtenu pour chaque domaine  $\Omega_i$  une erreur  $E_{0,i}$  bornée par

$$E_{0,i} \leq K \max(1, \|D^\alpha c_i\|^\alpha) l_{c_i} (\|D^\alpha f\|_{\mathcal{C}}^2 + \|f\|_\infty^2) \xi . \quad (4B.563)$$

En sommant ces majorations, on obtient le résultat souhaité.  $\square$

On définit l'échelle minimale de coupure par son indice  $j_* = \max(j_*, \log_2(\epsilon))$ .

### 4B.3.1.3 Ondelettes isotropes extérieures

On distingue trois types d'ondelettes isotropes extérieures : les ondelettes qui ne rencontrent aucun des  $\mathcal{C}_{i,s}$ , celles qui rencontrent un des  $\mathcal{C}_{i,s}$  avec une échelle  $j \geq s_0$  et celles qui rencontrent un des  $\mathcal{C}_{i,s}$  avec une échelle  $j < s_0$ .

Le premier type d'ondelettes est donc celui qui concerne la partie régulière de la fonction et on retrouve les résultats du lemme 4B.21

**Lemme 4B.26.** *Parmi les ondelettes isotropes qui ne rencontrent aucun des  $\mathcal{C}_{i,s}$  si on conserve celles dont l'échelle  $j$  est plus grande que  $j_0 = \log_2(\xi)/(2\alpha)$ , le nombre  $M_1$  de coefficients conservés satisfait*

$$M_1 \leq K \xi^{-1/\alpha} \quad (4B.564)$$

et l'erreur résultante  $E_1$  satisfait

$$E_1 \leq K \|D^\alpha f\|_{\mathcal{C}}^2 \xi . \quad (4B.565)$$

*Démonstration.* Ce cas a déjà été étudié dans le lemme 4B.1 et on a bien le résultat voulu.  $\square$

Le second type d'ondelettes isotropes extérieures est celui des ondelettes larges ( $j \geq \log_2(s_0)$ ) qui rencontrent au moins l'un des  $\mathcal{C}_{i,s}$ . Celles-ci sont en nombre limité du fait de leur taille.

**Lemme 4B.27.** *Le nombre  $M_2$  d'ondelettes isotropes extérieures rencontrant au moins l'un des  $\mathcal{C}_{i,s}$  avec  $j \geq \log_2(s_0)$  satisfait*

$$M_2 \leq K \sum_i l_{c_i} s_0^{-1} \quad (4B.566)$$

*Démonstration.* Si  $j \geq \log_2(s)_0$ , il existe pour chaque courbe au plus  $Kl_{c_i}2^{-j}$  ondelettes de ce type à chaque échelle puisque  $s \leq s_0$  et donc le lissage n'est pas vu par l'ondelette. On en déduit

$$M_2 \leq K \sum_i l_{c_i} 2^{-\max(j_*, \log_2(s)_0)} \quad (4B.567)$$

$$M_2 \leq K \sum_i l_{c_i} s_0^{-1} . \quad (4B.568)$$

□

Le dernier type d'ondelettes isotropes extérieures est celui des ondelettes isotropes extérieures rencontrant une des courbes. La propriété de confinement de chaque domaine limite le nombre de ces ondelettes situées au niveau des jonctions.

**Lemme 4B.28.** *Parmi ces ondelettes isotropes extérieures rencontrant l'un des  $C_{i,s}$  avec  $j < s_0$ , si on conserve les ondelettes au dessus de l'échelle d'indice*

$$j_0 = \max(\log_2(\xi)/2, \log_2(s) + (\log_2(\xi) - 2\log_2(s))/(2\alpha), j_*) \quad (4B.569)$$

le nombre  $M_3$  de coefficients conservés satisfait

$$M_3 \leq K \#(I) \min(|\log_2(\xi)|/2, |\log_2(s)|) + s^{1/\alpha} \xi^{-1/(2\alpha)} \quad (4B.570)$$

et l'erreur  $E_3$  satisfait

$$E_3 \leq K \#(I) \|f\|_\infty^2 \xi . \quad (4B.571)$$

*Démonstration.* On retrouve ici une situation similaire à celle du lemme 4B.8.

Ces ondelettes isotropes extérieures sont situées aux jonctions. Par la propriété de confinement pour chaque jonction, le nombre de ces ondelettes est majoré par  $K$  si  $2^j \geq \eta$  et majoré par  $K\eta^2 2^{-2j}$  sinon. Enfin, le nombre de ces jonctions est limité par le nombre de domaine  $\#(I)$ .

La norme infinie de  $f$  et la régularité de  $h_s$  permettent d'obtenir les bornes suivantes sur les produits scalaires

$$|\langle f_s, \psi_{j,k}^I \rangle| \leq K \|f\|_\infty 2^j \quad \text{pour } j \geq s \quad (4B.572)$$

$$|\langle f_s, \psi_{j,k}^I \rangle| \leq K \|f\|_\infty 2^{\alpha(j - \log_2(s))} 2^j \quad \text{pour } j < s . \quad (4B.573)$$

On retrouve donc bien les résultats du lemme 4B.8 en multipliant par l'erreur et le nombre par le facteur  $\#(I)$  qui apparaît dans le nombre de coefficients par échelles et en divisant par le facteur  $\max(1, \|D^\alpha c\|^{2\alpha})$  correspondant à la déformation qui n'existe pas ici. □

#### 4B.3.1.4 Dans les domaines

Pour chacun des domaines, on obtient les estimations des nombres de coefficients et des erreurs de la section précédente. Il ne reste plus qu'à les sommer pour obtenir les résultats des tableaux.

### 4B.3.2 Erreur en dessous de l'échelle $\epsilon$

Lors de la construction effective de l'approximation, on utilise l'erreur faite en éliminant tous les coefficients en dessous de l'échelle  $\epsilon$ . On sait déjà que celle-ci est de l'ordre de  $\epsilon$ , si la géométrie a été approchée à l'échelle optimale d'indice  $j_0 = \log_2(\eta)/\alpha$  mais rien n'a été démontré dans le cas des autres lissages. On va donc démontrer que l'erreur reste de l'ordre de  $\epsilon$  dans ces cas également. Plus précisément, on démontre le lemme 4.5 :

**Lemme 4.5.** *Quelle que soit l'échelle d'approximation choisie pour la géométrie, si la dérivée de la paramétrisation de la géométrie estimée est bornée, l'erreur d'approximation  $E_\epsilon$  de la fonction  $f_s$  faite en éliminant les coefficients en dessous de l'échelle  $\epsilon$  dans le frame de bandelettes satisfait*

$$E_\epsilon \leq K(1 + \#(I)) \sum_j l_{c_j} \max(1, \|D^1 g_i\|) (\|D^1 f\|_{\mathcal{C}}^2 + \|f\|_\infty^2) \epsilon . \quad (4B.574)$$

*Démonstration.* La démonstration est très similaire à celle du lemme 4B.24.

Pour les ondelettes isotropes, on est exactement dans la même situation et l'erreur  $E_0$  due aux ondelettes isotropes est inférieure à

$$E_0 \leq K \left( \sum_i l_{c_i} \|f\|_\infty^2 + \|D^\alpha f\|_{\mathcal{C}}^2 \right) \epsilon . \quad (4B.575)$$

Pour chaque domaine,  $\Omega_i$ , on doit estimer la régularité de  $W_i f$ . Pour cela on note que dès que la dérivée d'ordre  $\alpha$  de  $g_i$  est bornée alors il en est également de même pour la dérivée d'ordre  $\alpha$  de  $P_{V_{j_0}} g_i$  avec la même norme à une constante multiplicative près comme le montre le lemme suivant :

**Lemme 4B.29.** *Si  $\psi$  est une ondelette dont la dérivée d'ordre  $\alpha$  est bornée et si  $\psi$  possède  $\alpha$  moments nuls, il existe une constante  $K$  telle que si  $c$  une fonction dont la dérivée d'ordre  $\alpha$  est bornée sur  $[0, l]$  alors la dérivée d'ordre  $\alpha$  de la projection linéaire sur l'espace  $V_{j_0}$ ,  $P_{V_{j_0}} g$  est bornée pour tout  $j_0$  et*

$$\|D^\alpha(P_{V_{j_0}} g)\|_\infty \leq K \|D^\alpha c\|_\infty . \quad (4B.576)$$

*Démonstration.* Soit  $x \in [0, l]$  et  $\pi_x g$  le polynôme de Taylor de degré  $\alpha - 1$  de  $c$  en  $x$ . Comme  $c$  est dérivable jusqu'à l'ordre  $\alpha$  et que cette dérivée est bornée

$$|c(x_1) - \pi_x(x_1)| \leq \|D^\alpha g\|_\infty |x_1 - x|^\alpha . \quad (4B.577)$$

De plus  $P_{V_{j_0}} \pi_x = \pi_x$  puisque le degré de  $\pi_x$  est inférieur à  $\alpha - 1$ . On a donc

$$P_{V_{j_0}} g = P_{V_{j_0}}(\pi_x) + P_{V_{j_0}}(g - \pi_x) \quad (4B.578)$$

$$= \pi_x + P_{V_{j_0}}(g - \pi_x) . \quad (4B.579)$$

Maintenant comme  $\pi_x$  est un polynôme de degré  $\alpha - 1$

$$\pi_x^{(\alpha)}(x) = 0 . \quad (4B.580)$$

Pour le terme restant,

$$|(P_{V_{j_0}}(g - \pi_x))^{(\alpha)}(x)| = \left| \sum_k \langle g - \pi_x, \phi_{j_0, k} \rangle (\phi_{j_0, k})^{(\alpha)}(x) \right| \quad (4B.581)$$

$$\leq \sum_k |\langle g - \pi_x, \phi_{j_0, k} \rangle| |(\phi_{j_0, k})^{(\alpha)}(x)| \quad (4B.582)$$

comme  $\mathcal{S}(\phi) \subset [0, 2p + 1]$

$$|(P_{V_{j_0}}(g - \pi_x))^{(\alpha)}(x)| \leq \sum_{k, |k-2^{-j}x| \leq (2p+1)} |\langle g - \pi_x, \phi_{j_0, k} \rangle| |(\phi_{j_0, k})^{(\alpha)}(x)|. \quad (4B.583)$$

On utilise alors la borne  $|g(x_1) - \pi_x(x_1)| \leq C|x_1 - x|^\alpha$  et le lemme 4.3

$$|(P_{V_{j_0}}(g - \pi_x))^{(\alpha)}(x)| \leq \sum_{k, |k-2^{-j}x| \leq (2p+1)} \|D^\alpha g\|_\infty ((2p+1)2^{j_0})^\alpha 2^{j_0/2} \|\phi\|_\infty |(\phi_{j_0, k})^{(\alpha)}(x)| \quad (4B.584)$$

$$\leq \sum_{k, |k-2^{-j}x| \leq (2p+1)} \|D^\alpha g\|_\infty ((2p+1)2^{j_0})^\alpha 2^{j_0/2} \quad (4B.585)$$

$$\times \|\phi\|_\infty 2^{-\alpha j_0} 2^{-j_0/2} \|\phi^{(\alpha)}\|_\infty$$

$$\leq (2p+1)K((2p+1)^\alpha \|\phi\|_\infty \|\phi^{(\alpha)}\|_\infty \|D^\alpha g\|_\infty) \quad (4B.586)$$

$$|(P_{V_{j_0}}(g - \pi_x))^{(\alpha)}(x)| \leq K \|D^\alpha g\|_\infty \quad (4B.587)$$

d'où

$$|(P_{V_{j_0}}g)^\alpha(x)| \leq K \|D^\alpha g\|_\infty. \quad (4B.588)$$

□

On va alors montrer que ceci suffit pour obtenir la décroissance en  $\epsilon^{-1}$ . On a en effet déjà vérifié dans le lemme 4B.4 que

$$\frac{\partial^\alpha}{\partial x_2^\alpha} (W f_s)(x) = W_i \left( \frac{\partial^\alpha}{\partial x_2^\alpha} f_s \right)(x) \quad (4B.589)$$

et

$$\left| \frac{\partial^\alpha}{\partial x_1^\alpha} (W_i f_s)(x) \right| \leq K \max(1, \|D^\alpha g_i\|^\alpha) |W_i(D^\alpha f_s)(x)| \quad (4B.590)$$

lorsque la dérivée d'ordre  $\alpha$  de  $g$  est bornée. On a donc ici

$$\frac{\partial}{\partial x_2} (W_i f_s)(x) = W_i \left( \frac{\partial}{\partial x_2} f_s \right)(x) \quad (4B.591)$$

et

$$\left| \frac{\partial}{\partial x_1} (W_i f_s)(x) \right| \leq K \max(1, \|D^1 g_i\|) |W_i(D^1 f_s)(x)|. \quad (4B.592)$$

On utilise alors les différentes estimations de la régularité de  $f_s$  suivant la position. Dès que  $x \notin w_i(\cup \mathcal{C}_{i,s})$ , on utilise la régularité de  $f$  pour obtenir

$$\left| \frac{\partial}{\partial x_2} (W_i f_s)(x) \right| \leq K \|D^1 f\|_{\bar{\mathcal{C}}} \quad (4B.593)$$

et

$$\left| \frac{\partial}{\partial x_1} (W_i f_s)(x) \right| \leq K \max(1, \|D^1 g_i\|) \|D^1 f\|_{\bar{\mathcal{C}}}. \quad (4B.594)$$

Sinon on utilise la régularité de  $h_s$  pour obtenir

$$\left| \frac{\partial}{\partial x_2} (W_i f_s)(x) \right| \leq K \|f\|_{\infty} s^{-1} \quad (4B.595)$$

et

$$\left| \frac{\partial}{\partial x_1} (W_i f_s)(x) \right| \leq K \max(1, \|D^1 g_i\|) \|f\|_{\infty} s^{-1} . \quad (4B.596)$$

On utilise alors ces estimations de la régularité, la norme finie de  $f$  et le lemme 4.3 pour obtenir les majorations suivantes pour les produits scalaires de  $W_i f$  avec les ondelettes :

$$|\langle W_i f_s, \psi_{j,k}^I \rangle| \leq K \max(1, \|D^1 g_i\|) \|D^1 f\|_{\mathcal{C}} 2^{2j} \quad \text{si } \mathcal{S}(\psi_{j,k}^I) \cap w(\cup \mathcal{C}i, s) = \emptyset , \quad (4B.597)$$

$$|\langle W_i f_s, \psi_{j,k}^I \rangle| \leq K \max(1, \|D^1 g_i\|) \|f\|_{\infty} 2^{(j-\log s)2^j} \quad \text{utilisé pour } j \leq \log_2(s), \quad (4B.598)$$

$$|\langle W_i f_s, \psi_{j,k}^I \rangle| \leq K \|f\|_{\infty} 2^j . \quad (4B.599)$$

On en déduit alors que l'erreur d'approximation en dessous de l'échelle  $\epsilon$  est bornée par

$$E_{\epsilon,i} \leq K \sum_j l_{c_j} \max(1, \|D^1 g_i\|) (\|D^{\alpha} f\|_{\mathcal{C}}^2 + \|f\|_{\infty}^2) \epsilon . \quad (4B.600)$$

On en déduit donc en sommant les erreurs sur les différents domaines

$$E_{\epsilon} \leq K(1 + \#(I)) \sum_j l_{c_j} \max(1, \|D^1 g_i\|) (\|D^{\alpha} f\|_{\mathcal{C}}^2 + \|f\|_{\infty}^2) \epsilon . \quad (4B.601)$$

□



---

# Chapitre 5

## Perspectives

---

<b>5.1</b>	<b>Bilan critique des bandelettes</b>	<b>218</b>
<b>5.2</b>	<b>Extensions possibles</b>	<b>219</b>
5.2.1	Redondance et lifting scheme	219
5.2.2	Géométrie et segmentation du flot	219
5.2.3	Débruitage et déconvolution	219
5.2.4	Compression	222
<b>5.3</b>	<b>Dimensions supérieures</b>	<b>224</b>
5.3.1	Ondelettes anisotropes et anisotropes agrégées	224
5.3.2	Bandelettes multidimensionnelles	224

Dans ce dernier chapitre, après avoir rappelé les résultats déjà obtenus sur les bandelettes et en avoir exposé quelques limitations, on présente des prolongements des bandelettes bidimensionnelles introduites dans ce travail ainsi que la possibilité d'une extension multidimensionnelle de celles-ci.

## 5.1 Bilan critique des bandelettes

L'utilisation de la nature géométrique des images pour leur représentation est un thème présent dans la littérature depuis le début des années 80 et connaît un renouveau depuis quelques années comme on l'a rappelé dans l'introduction. Dans cette thèse, on a présenté la constructions des bandelettes et des frames de bandelettes adaptés à la géométrie. Après avoir donner une méthode pour estimer cette géométrie dans les images, on a illustré les possibilités des bandelettes dans le cadre d'une application au débruitage. Enfin, d'un point de vue theorique, on a démontré le caractère optimal pour l'approximation non-linéaire de ce frame de bandelettes pour les fonctions du modèle.

Les deux résultats centraux de cette thèse sont donc la construction d'un frame adapté à la géométrie, qui peut être implémenté en pratique, et la démonstration de ses capacités d'approximation non-linéaire. L'application au débruitage n'est, elle, qu'une illustration de cette construction. Le statut de l'estimation de la géométrie est plus complexe : celle-ci est nécessaire au fonctionnement de l'algorithme et la solution proposée permet d'obtenir des résultats mais n'est en rien une solution optimale.

De manière critique, on peut formuler au moins trois types d'objections concernant cette construction : des objections concernant la géométrie, des objections concernant l'utilisation d'un frame et des objections concernant le modèle.

Les bandelettes nécessitent une estimation explicite de la géométrie : les conditions nécessaire sur cette estimation semblent raisonnable puisque l'algorithme ad-hoc proposé fonctionne en pratique. Il ne suffit pas cependant pour obtenir des résultats théoriques. Pour obtenir une construction plus complète, il faut donc améliorer cette estimation comme on le propose dans la section suivante et peut-être relâcher les conditions de géométrie dans les théorèmes. On peut également dire que l'existence de l'estimation de la géométrie est en elle-même un problème mais il semble que celle-ci soit nécessaire sous une forme plus ou moins explicite pour obtenir des représentations efficaces en pratique.

L'utilisation d'un frame dans la construction conduit à introduire de la redondance dans la représentation. Bien que celle-ci ne change pas les résultats asymptotiques, elle explique l'absence dans la thèse de résultat pratique d'approximation non linéaire. La création d'une base de bandelettes adaptées permettrait d'éviter cette redondance : celle-ci suppose une modification des bandelettes rencontrant les bords des domaines. On propose dans la section suivante la construction d'une représentation à partir d'une technique de lifting qui permet de s'affranchir de la redondance mais fait disparaître la notion de base.

Enfin, le théorème d'approximation non-linéaire est démontré pour les fonctions du modèle. Celui-ci est assez contraignant, on peut donc se poser la question de l'existence d'un espace plus général sur lequel les propriétés d'approximation restent vérifiées.

## 5.2 Extensions possibles

On présente ici des extensions possibles des bandelettes présentées dans la thèse. Pour chacune de celle-ci, on expose les motivations, les techniques employées et l'état d'avancement.

### 5.2.1 Redondance et lifting scheme

Comme on l'a signalé dans la section précédente, le frame de bandelettes construit dans le chapitre 3 présente un inconvénient dans la pratique : il est redondant. En effet, bien que les bandelettes forment des familles orthonormées pour chaque domaine, leur union ne l'est pas. Ces familles se recouvrent en effet car les fonctions de bords débordent des domaines. Cette redondance est un inconvénient pour les approximations non linéaires puisqu'elle revient à devoir coder plusieurs fois la même information. On peut donc souhaiter enlever cette redondance dans la représentation en modifiant les fonctions de bords.

Avec C. Bernard, nous avons mis au point une technique de lifting [Swe98] adapté aux frontières. Celui-ci est basé sur le lifting associé à la transformation en ondelettes classiques [DS98]. On définit des grilles adaptées à la géométrie dans chacun des domaines et on applique le lifting classique tant qu'on reste à l'intérieur de ceux-ci. L'adaptation du lifting aux frontières et les difficultés de cohérence entre les différentes grilles sont traitées par une méthode ad-hoc.

Ce schéma est encore en cours d'amélioration mais présente déjà des performances d'approximations meilleures que le frame tout en conservant ses propriétés asymptotiques. L'étude de la convergence de cet algorithme et de ses propriétés théoriques d'approximation n'a cependant pas encore été réalisée.

### 5.2.2 Géométrie et segmentation du flot

L'estimation de la géométrie présentée dans la thèse est basée sur l'estimation d'un gradient d'une version lissée de l'image et se comporte comme un algorithme de détection de contour en construisant des courbes intégrales du flot. Ceci permet d'obtenir des résultats théoriques mais n'exploite pas complètement la notion de direction de régularité géométrique qui ne nécessite pas la présence de contour.

Une technique d'estimation de la géométrie par segmentation d'une estimation du flot en tout point de l'image est en cours d'étude. Celle-ci doit permettre une bonne estimation de la direction de celui-ci pour les contours mais aussi pour des textures directionnelles ou encore des zones où n'existent pas de réels contours. L'idée centrale de cette technique est de régulariser le flot brut plutôt que de calculer le flot d'une image lissée.

Cette technique est en cours d'implémentation et donne déjà des résultats intéressants. Le schéma définitif ainsi que son étude théorique n'ont pas encore été établis.

### 5.2.3 Débruitage et déconvolution

L'application du frame invariant par translation de la section 3.3 à des problèmes plus complexes que le débruitage d'un bruit blanc conduit à des difficultés. En effet, le support fréquentiel des bandelettes n'est pas bien contrôlé or celui-ci joue un rôle central dans les problèmes de débruitage ou de déconvolution [Kal99]. La notion de direction de régularité reste cependant valable dans ces cas.



FIGURE 5.1 – Approximation non-linéaire : (a) image originale, (b) approximation en ondelettes avec 5601 coefficients ( $PSNR = 31.53$  db), (c) approximation en ondelettes avec 5851 coefficients ( $PSNR = 31.71$  db), (d) approximation en bandelettes par la méthode de lifting avec 5601 coefficients ( $PSNR = 31.71$  db). L'approximation en bandelettes est donc plus performante que celle en ondelettes, on remarque de plus que pour un même  $PSNR$  la qualité visuelle est meilleur pour l'approximation en bandelettes ((c) pour les ondelettes et (d) pour les bandelettes).

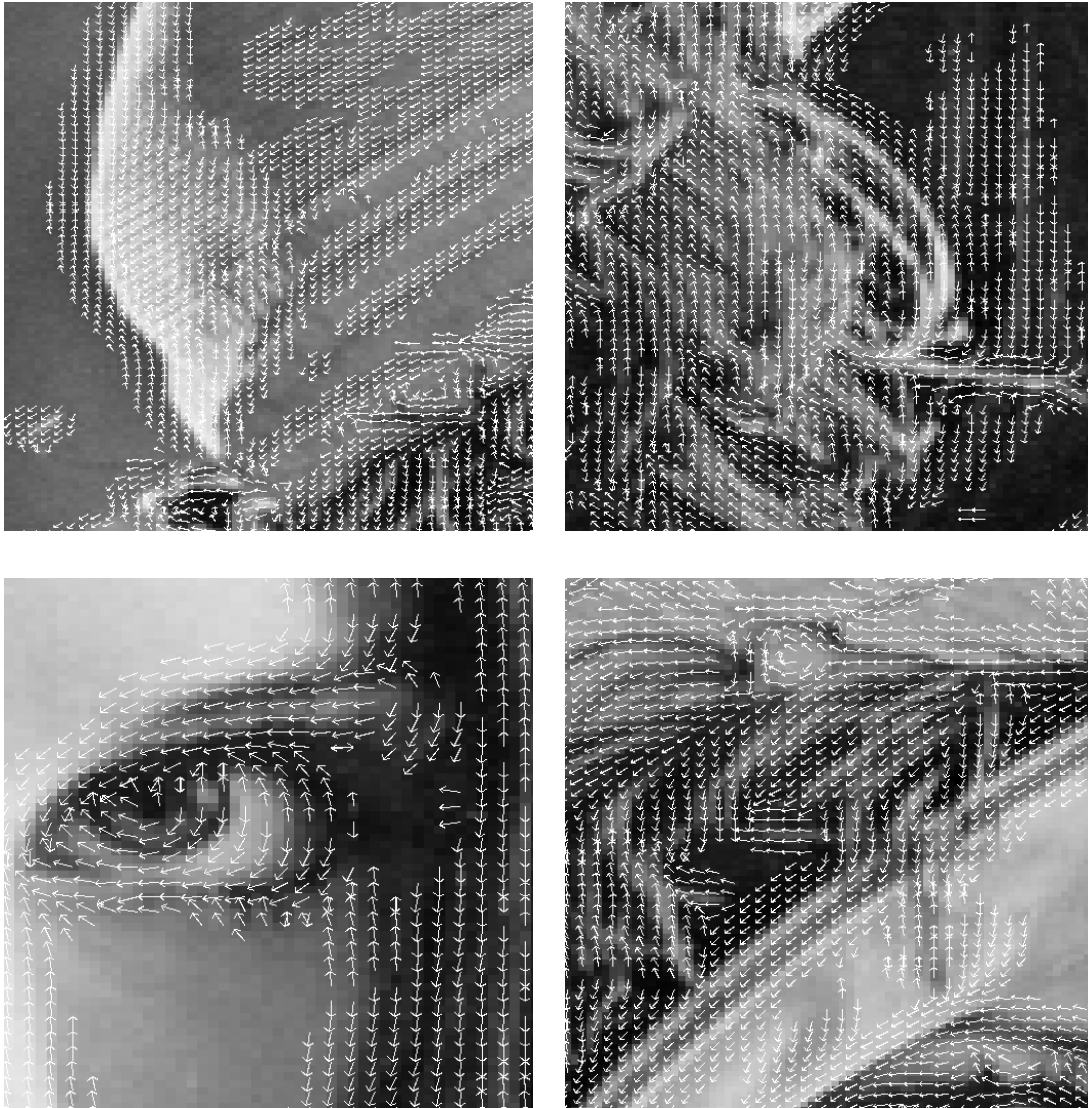


FIGURE 5.2 – Exemple de résultats de la nouvelle procédure d'estimation de la géométrie. On remarque que l'algorithme détecte des directions privilégiés dans les régions où il n'y pas de contours, par exemple les cheveux.

Une extension de la notion de bandelettes dans le cas continue a été proposée avec J. Kalifa. L'idée centrale est d'inverser l'ordre dans la construction des phases de déformation locales et de décomposition en ondelettes isotropes. L'algorithme d'analyse des images en bandelettes est alors modifié. On commence par calculer sa projection sur les différentes sous-bandes de la décomposition en ondelettes isotropes, on effectue ensuite des transformées en ondelettes monodimensionnelles le long des courbes de flots. L'inversion des deux étapes permet de conserver les propriétés d'approximation des bandelettes tout en contrôlant la localisation spectrale de celle-ci. De plus, la projection en sous-bandes peut alors être choisie arbitrairement donnant ainsi un degré de liberté supplémentaire pour la méthode.

Ici encore, les résultats préliminaires sont encourageants tant du point de vue de l'erreur  $L^2$  que du point de vue visuel. L'étude théorique de ces frames n'a pas encore été réalisée.

## 5.2.4 Compression

Le lien entre approximation non-linéaire et compression est connu [FM98]. L'apparition d'une nouvelle représentation conduit à l'idée de son utilisation pour la compression comme ce fut le cas pour les ondelettes. Cependant, le long cheminement des premiers articles de Antonini et al. [ABMD92] ou de DeVore et al. [dJL92] au nouveau standard JPEG2000 [ISO99] en passant par les idées de Shapiro [Sha93], de Saïd et Pearlman [SP96] ou bien encore de Taubman [Tau98] illustre bien la difficulté du passage de la représentation à la compression.

Bien que la compression soit l'objectif de départ de cette thèse, la réalisation d'un tel algorithme est loin d'être terminée. Celui-ci doit coder de manière efficace la géométrie ainsi que les coefficients de bandelettes. La situation restant similaire, on pourra s'inspirer des techniques utilisées pour les ondelettes pour accélérer le développement. Enfin les problèmes d'allocations des bits entre la géométrie et les coefficients de bandelettes doivent être étudiés.

La compression en bandelettes en est donc véritablement à ses balbutiements mais devrait permettre une amélioration par rapport aux ondelettes comme le prédit la théorie.

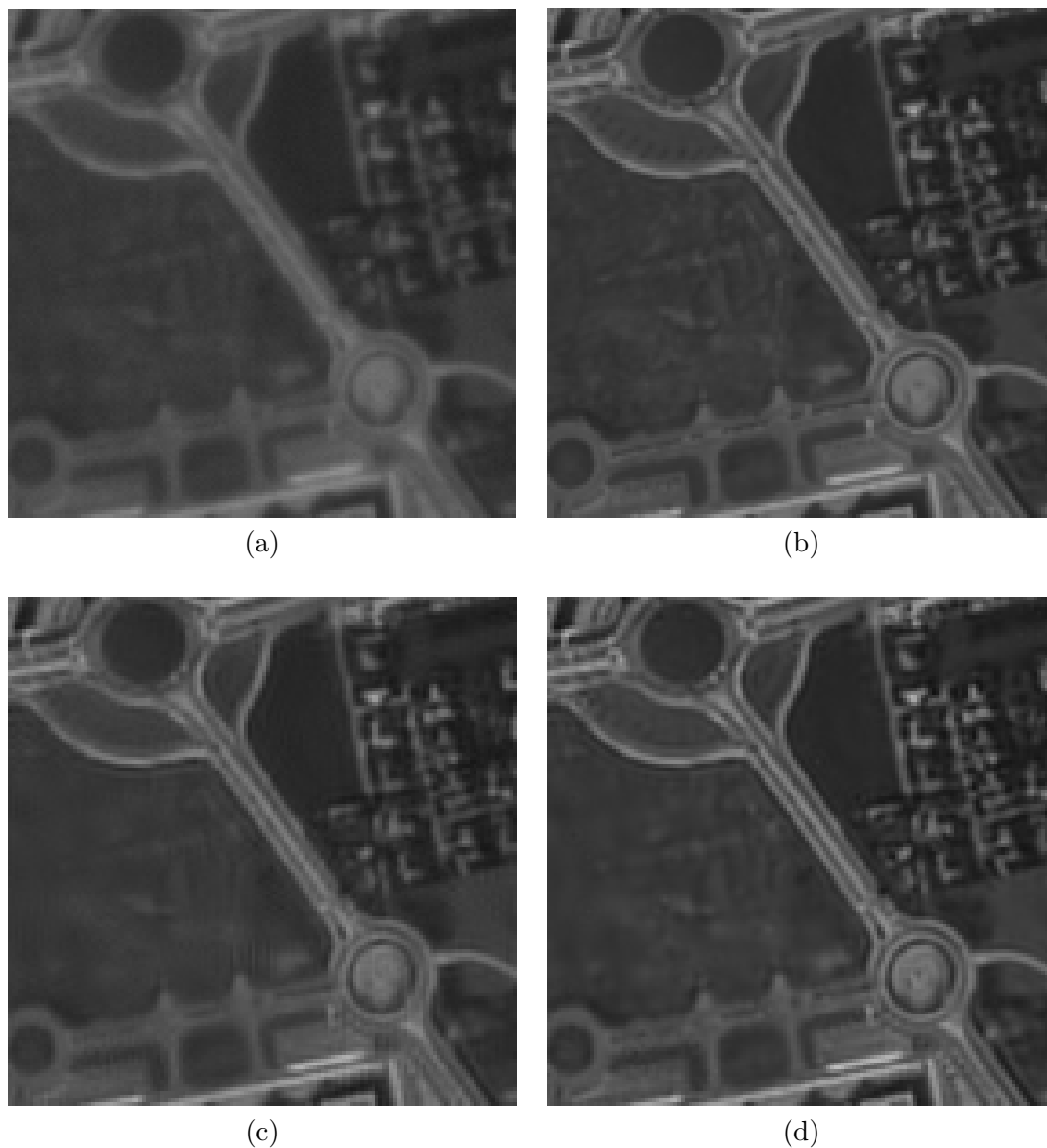


FIGURE 5.3 – Exemple de déconvolution : (a) image  $Y$  floue et bruitée ( $PSNR = 25.5 db$ ), (b) image de référence, (c) image restaurée par seuillage dans une base optimale de paquets d'ondelettes ( $PSNR = 28.1 db$ ), (d) image restaurée par seuillage des coefficients de la transformée en bandelettes ( $PSNR = 28.6 db$ ).

## 5.3 Dimensions supérieures

L'extension des bandelettes en dimensions supérieures à 2 est une autre direction intéressante pour le prolongement de ce travail. L'une des applications potentielles est la création de réseaux de bandelettes analogues aux réseaux d'ondelettes [ZB92] permettant d'utiliser la flexibilité de la géométrie.

### 5.3.1 Ondelettes anisotropes et anisotropes agrégées

Comme en dimension 2, les bandelettes sont obtenues à partir d'une déformation de l'espace et d'une base d'ondelettes anisotropes. On commence donc par l'extension des bases d'ondelettes anisotropes en dimension supérieure.

La première famille  $\mathcal{A}$  d'ondelettes anisotropes est celle obtenue par produit tensoriel d'ondelettes monodimensionnelles :

$$\mathcal{A} = \{\psi_{j_1, k_1} \otimes \cdots \otimes \psi_{j_n, k_n}\}_{(j_1, \dots, j_n) \in \mathbb{Z}^n, (k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{Z}^n} \quad (5.1)$$

$$\mathcal{A} = \{\psi_{j_1, k_1}(x_1) \times \cdots \times \psi_{j_n, k_n}(x_n)\}_{(j_1, \dots, j_n) \in \mathbb{Z}^n, (k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{Z}^n} \cdot \quad (5.2)$$

Ces ondelettes sont bien adaptées aux fonctions ayant des singularités alignées avec les axes puisque l'espace  $\mathbb{R}^n$  est découpé en  $\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}$ .

Si une fonction est régulière selon plusieurs direction, ces directions peuvent être rassemblées. L'espace  $\mathbb{R}^n$  est donc décomposé en  $\mathbb{R}^l \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}$  où  $l > 1$  représente le nombre de directions agrégées ensemble. On utilise alors une base d'ondelettes pour chacune des composantes de la décomposition.

La base  $\mathcal{A}_{\text{agr}}$  ainsi obtenue est à un changement d'ordre dans la base près la suivante

$$\mathcal{A}_{\text{agr}} = \{\psi_{j_1, k_1, \dots, k_l}^f \otimes \psi_{j_{l+1}, k_{l+1}} \otimes \cdots \otimes \psi_{j_n, k_n}\}_{(j_1, j_{l+1}, \dots, j_n) \in \mathbb{Z}^{n-l+1}, (k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{Z}^n} \quad (5.3)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{\text{agr}} = \{ & \psi_{j_1, k_1, \dots, k_l}^f(x_1, \dots, x_l) \\ & \times \psi_{j_{l+1}, k_{l+1}}(x_{l+1}) \times \cdots \times \psi_{j_n, k_n}(x_n)\}_{(j_1, j_{l+1}, \dots, j_n) \in \mathbb{Z}^{n-l+1}, (k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{Z}^n} \cdot \end{aligned} \quad (5.4)$$

Ces bases sont alors adaptées pour des fonctions régulières selon les  $l$  premières directions.

Comme en 2D, les ondelettes anisotropes peuvent être obtenues à partir des ondelettes anisotropes par des transformations en ondelettes monodimensionnelles.

### 5.3.2 Bandelettes multidimensionnelles

Les bandelettes sur l'espace tout entier se généralisent facilement en dimension supérieure dans les cas où la déformation est induite par une variété horizon, une variété qui est paramétrée selon les  $l$  premières coordonnées.

Si cette variété  $\mathcal{V}$  est paramétrée par

$$\begin{aligned} c : \quad \mathbb{R}^l & \rightarrow \mathbb{R}^{n-l} \\ (x_1, \dots, x_l) & \mapsto c(x_1, \dots, x_l) \\ & = (c_{l+1}(x_1, \dots, x_l), \dots, c_n(x_1, \dots, x_l)) \end{aligned} \quad (5.5)$$

avec

$$\mathcal{V} = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, (x_{l+1}, \dots, x_n) = c(x_1, \dots, x_l)\} \quad (5.6)$$



alors la déformation  $w$

$$w : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \rightarrow & \mathbb{R}^n \\ (x_1, \dots, x_l, x_{l+1}, \dots, x_n) & \mapsto & (x_1, \dots, x_l, (x_{l+1}, \dots, x_n) - c(x_1, \dots, x_l)) \end{array} \quad (5.7)$$

est définie et permet la construction des bandelettes à partir des ondelettes anisotropes.

On définit l'opérateur  $W$  sur les fonctions comme dans le cas bidimensionnelles par

$$Wf(w(x)) = f(x) . \quad (5.8)$$

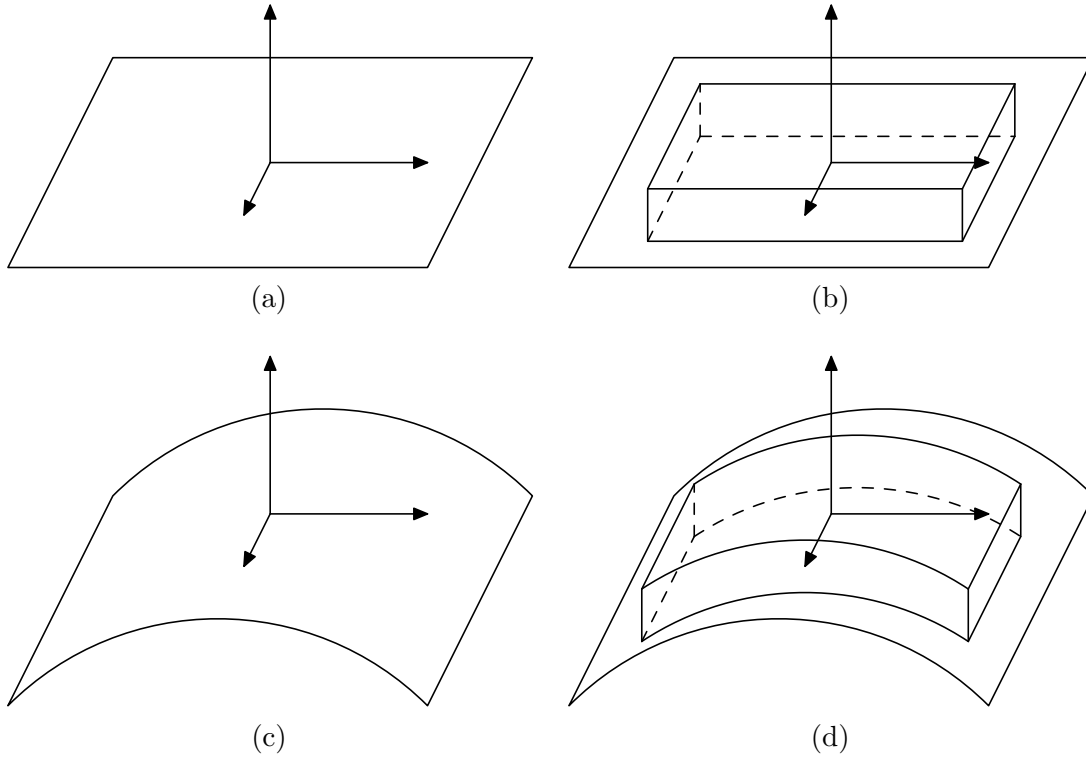


FIGURE 5.4 – Ondelettes anisotropes et bandelettes multidimensionnelles : (a) un plan horizontale selon lequel on suppose une certaine régularité, (b) un exemple de support d'ondelettes anisotropes agrégées de support carré dans le plan et plus petit selon la direction verticale, (c) une hypersurface plutôt horizontale, (d) le support de la bandelettes obtenue par transport de l'ondelette de (c).

La base  $\mathcal{B}$  de bandelettes associées à cette déformation est l'image par  $W^*$  de la base d'ondelettes anisotropes  $\mathcal{A}_{\text{agr}}$ .

$$\mathcal{B} = W^* (\mathcal{A}_{\text{agr}}) \quad (5.9)$$

$$\mathcal{B} = \{ \psi_{j_1, k_1, \dots, k_l}^I(x_1, \dots, x_l) \times \psi_{j_{l+1}, k_l}(x_{l+1} - c_{l+1}(x_1, \dots, x_l)) \times \dots \times \psi_{j_n, k_n}(x_n - c_n(x_1, \dots, x_l)) \}_{(j_1, j_{l+1}, \dots, j_n) \in \mathbb{Z}^{n-l+1}, (k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{Z}^n} . \quad (5.10)$$

L'extension de cette construction à des domaines plus généraux n'a pas encore été faite : les frontières des domaines sont beaucoup plus complexes en dimension supérieure à 2 et requièrent un traitement spécifique.



---

# Bibliographie

---

- [AACD99a] S. AMAT, F. ARANDIGA, A. COHEN, et R. DONAT. Data compression with ENO schemes : a case study. Rapport technique, Université de Valence, 1999. (soumis à Appl. Comp. Harm. Anal.).
- [AACD99b] S. AMAT, F. ARANDIGA, A. COHEN, et R. DONAT. Tensor product multiresolution analysis with error control. Rapport technique, Université de Valence, 1999. (soumis à IEEE Trans. Signal Processing).
- [ABMD92] M. ANTONINI, M. BARLAUD, P. MATHIEU, et I. DAUBECHIES. Image coding using wavelet transform. *IEEE Transactions on Image Processing*, 1(2) :205–220, Avril 1992.
- [AHJP94] L. ANDERSSON, N. HALL, B. JAWERTH, et G. PETERS. Wavelets on closed subsets of the real line. Dans L. L. SCHUMAKER et G. WEBB, éditeurs, *Recent Advances in Wavelet Analysis*, pages 1–61. Academic Press, 1994.
- [BCDS99] R. BARANIUK, R.L. CLAYPOOLE, G. DAVIS., et W. SWELDENS. Nonlinear wavelet transforms for image coding via lifting scheme, 1999. (soumis à IEEE Trans. on Image Processing).
- [Blu73] H. BLUM. Biological shape and visual science. *J. Theor. Biol.*, pages 205–287, 1973.
- [BTU01] T. BLU, P. THEVENAZ, et M. UNSER. Moms : Maximal-order interpolation of minimal support. *IEEE Transactions on Image Processing*, 10(7) :1069–1080, 2001.
- [Can86] A. CANNY. A computationnal approach to edge detection. *IEEE Trans. Patt. Recog. and Mach. Intell.*, 8(6) :679–698, 1986.
- [Can98] E. CANDÈS. *Ridgelets : theory and applications*. Thèse de doctorat, Department of Statistics, Stanford Univeristy, 1998.
- [Car84] S. CARLSSON. Sketch based image coding. Dans *Proc of Premier Colloque Image*, pages 71–77, Biarritz, Mai 1984.
- [Car88] S. CARLSSON. Sketch based coding of grey level images. *Signal Processing*, 15(1) :57–83, 1988.
- [CD95] R. COIFMAN et D. DONOHO. Translation-invariant denoising. Dans *Wavelet and Statistics*, Lecture Notes in Statistics. Springer Verlag, 1995.
- [CD99a] E. CANDÈS et D. DONOHO. Curvelets : A surprisingly effective nonadaptive representation of objects with edges. Dans L. L. SCHUMAKER, A. COHEN, et C. RABUT, éditeurs, *Curves and Surfaces fitting*. Vanderbilt University Press, 1999.

- [CD99b] E. CANDÈS et D. DONOHO. Ridgelets : a key to higher-dimensional intermittency? *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A.*, pages 2495–2509, 1999.
- [CD00] E. CANDÈS et D. DONOHO. Curvelets, multiresolution representation, and scaling laws. Dans A ALDROUBI, A. LAINE, et M. UNSER, éditeurs, *SPIE Wavelet applications in signal and image processing VIII*, volume 4119, 2000.
- [CdPX99] A. COHEN, R. DEVORE, P. PETRUSHEV, et H. XU. Non linear approximation and the space  $BV(\mathbb{R}^2)$ . *Amer. J. Math.*, 121 :587–628, 1999.
- [CDV93] A. COHEN, I. DAUBECHIES, et P. VIAL. Wavelets on the interval and fast wavelet transforms. *Appl. Comput. Harm. Anal.*, 1 :54–81, 1993.
- [CGO76] P. CONCUS, G.H. GOLUB, et D.P. O’LEARY. A generalized conjugated gradient method for the numerical solution of elliptic partial differential equations. Rapport technique STAN-CS-76-533, Comp. Science Dept., Stanford University, 1976.
- [CM01] A. COHEN et B. MATEI. Compact representations of images by edge adapted multiscale transforms. Dans *Int. Conf on Image Processing*, Thessalonique, Octobre 2001.
- [CM02] A. COHEN et B. MATEI. Nonlinear subdivisions schemes : applications to image processing. Dans A. ISKE, E. QUACK, et M. FLOATER, éditeurs, *Tutorial on multiresolution in geometric modelling*. Springer, 2002.
- [Dau92] I. DAUBECHIES. *Ten Lectures on Wavelets*. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, PA, USA, 1992.
- [Dau98] I. DAUBECHIES. Orthonormal bases of compactly supported wavelets. *Commun. on Pure and Appl. Math.*, 36(5) :961–1005, Septembre 1998.
- [DD00] D. DONOHO et M. DUNCAN. Digital curvelet transform : strategy, implementation and experiments. Dans *Proc. Aerosense 2000, Wavelets Application VII*, pages 12–29. SPIE, 2000.
- [DeV98] R. DEVORE. Nonlinear approximation. *Acta Numer.*, 7 :51–150, 1998.
- [DJ94] D. DONOHO et I. JOHNSTONE. Ideal spatial adaptation via wavelet shrinkage. *Biometrika*, 81 :425–455, Décembre 1994.
- [dJL92] R. DEVORE, B. JAWERTH, et B. LUCIER. Image compression through wavelet transform coding. *IEEE Trans. Info. Theory*, 38(3) :719–746, mars 1992.
- [DKT98] R. A. DEVORE, S. V. KONYAGIN, et V. N. TEMLYAKOV. Hyperbolic wavelet approximation. *Constr. Approx.*, 14 :1–26, 1998.
- [Do01] M. DO. *Directional Multiresolution Image Representations*. Thèse de doctorat, Department of Communication Systems, Swiss Federal Institute of Technology Lausanne, Novembre 2001.
- [Don98] D. DONOHO. Sparse component analysis and optimal decomposition. *Constructive Approximation*, 17 :353–382, 1998.
- [Don99] D. DONOHO. Wedgelets : nearly-minimax estimation of edges. *Ann. Statist.*, 27 :353–382, 1999.
- [Dra02] P.L. DRAGOTTI. *Wavelet footprints and frames for signal processing and communications*. Thèse de doctorat, Swidd Federal Institue of Technology, Avril 2002.

- [DS52] R. DUFFI et A. SCHAEFFER. A class of nonharmonic fourier series. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 72 :341–366, 1952.
- [DS98] I. DAUBECHIES et W. SWELDENS. Factoring wavelet transforms into lifting steps. *J. Fourier Anal. Appl.*, 4(3) :245–267, 1998.
- [DV00] P.L. DRAGOTTI et M. VETTERLI. Wavelet transform footprints : catching singularities for compression and denoising. Dans *Int. Conf on Image Processing*, Vancouver, Septembre 2000.
- [DV01a] M. DO et M. VETTERLI. Curvelets and filter banks. *IEEE Trans. Image Proc.*, 2001. (soumis à).
- [DV01b] P.L. DRAGOTTI et M. VETTERLI. Footprints and edgeprints for image demoi-  
sing and compression. Dans *Int. Conf on Image Processing*, Thessalonique,  
Octobre 2001.
- [DV02] P. L. DRAGOTTI et M. VETTERLI. Wavelet footprints : Theory, algorithms  
and applications. *IEEE Trans. on Signal Processing.*, 2002. (soumis à).
- [Eld99] J. ELDER. Are edges incomplete? *International Journal of Computer Vision*,  
34(2/3) :97–122, 1999.
- [EZ98] J. H. ELDER et S. W. ZUCKER. Local scale control for edge detection and  
blur estimation. *pami*, 20(7), Juillet 1998.
- [FM92] J. FROMENT et S. MALLAT. Second generation compact image coding with  
wavelets. Dans C. K. CHUI, éditeur, *Wavelets : A Tutorial in Theory and  
Applications*. Academic Press, New York, 1992.
- [FM98] F. FALZON et S. MALLAT. Analysis of low bit rate image transform coding.  
*IEEE Transaction on Signal Processing*, Janvier 1998.
- [Grö93] K. GRÖCHENIG. Acceleration of the frame algorithm. *IEEE Trans. Signal  
Proc.*, 41(12) :3331–3340, Décembre 1993.
- [Har93] A. HARTEN. Discrete multiresolution analysis and generalized wavelets. *Jour-  
nal of Applied Numerical Mathematics*, 12 :153–193, 1993.
- [HS52] M. HESTENES et E. STEIFEL. Methods of conjugate gradient for solving linear  
systems. *J. of Res. Nat Bureau Standards*, 49 :409–436, 1952.
- [ISO99] JPEG 2000, verification model 5.0, ISO/IEC JTC1/SC29/WG1 N1429, 1999.
- [Jai89] A.K. JAIN. *Fundamentals of Digital Image Processing*. Prentice-Hall, 1989.
- [Kal99] J. KALIFA. *Restauration minimax et déconvolution dans une base d'ondelettes  
miroirs*. Thèse de doctorat, École Polytechnique, mai 1999.
- [LPM00] E. LE PENNEC et S. MALLAT. Image compression with geometrical wavelets.  
Dans *Int. Conf on Image Processing*, Vancouver, Septembre 2000.
- [LPM01] E. LE PENNEC et S. MALLAT. Représentation d'images par bandelettes et  
application à la compression. Dans *GRETSI*, Toulouse, Septembre 2001.
- [Mal98] S. MALLAT. *A wavelet tour of signal processing*. Academic Press, 2nd edition  
édition, 1998.
- [Mal01] S. MALLAT. Foveal approximations for singularities. *Applied and Computa-  
tional Harmonic Analysis*, 2001. (Soumis à).
- [Mer99] A. MERTINS. Image compression via edge-based wavelet transform. *Opt.  
Eng.*, 38(6) :991–1000, 1999.

- [Meu99] G. MEURANT. *Computer solution of large linear systems*. Studies in Mathematics and its application. North Holland, 1999.
- [Mey90] Y. MEYER. *Ondelettes et opérateurs I, ondelettes*. Hermann, 1990.
- [Mey01] Y. MEYER. *Oscillating Patterns in Image Processing and Nonlinear Evolution Equation*, volume 22 de *University Lecture Series*. AMS, Providence, 2001.
- [MH80] S. MARR et D. HILDRETH. Theory of edge detection. *Proc. Roy. Soc. Lon.*, B207 :187–217, 1980.
- [MSZ92] S. MALLAT et S. S. ZHONG. Wavelet transform maxima and multiscale edges. Dans B. Ruskai et AL., éditeur, *Wavelets and their Applications*. Jones and Bartlett, Boston, 1992.
- [NvS97] M. H. NEUMANN et R. von SACHS. Wavelet thresholding in anisotropic function classes and application to adaptive estimation of evolutionary spectra. *Annals of Statistics*, 25(1) :38–76, 1997.
- [RY90] K. RAO et P. YIP. *Discret Cosine transform : Algorithms, Advantages, Applications*. Academic Press, 1990.
- [SCD] J. STARCK, E. CANDÈS, et D. DONOHO. The curvelet transform for image denoising. (soumis à *IEEE Transactions on Signal Processing*).
- [Sha93] J. SHAPIRO. An embedded hierarchical image coder using zerotrees of wavelet coefficients. Dans *Proc. IEEE Data Compression Conference*, pages 214–223, Snowbird, UT, mars 1993.
- [SP96] A. SAID et W. A. PEARLMAN. A new, fast, and efficient image codec based on set partitioning in hierarchical trees. *IEEE Trans. on Circ. and Syst. for Video Tech.*, 6(3) :243–250, June 1996.
- [Swe98] W. SWELDENS. The lifting scheme : A construction of second generation wavelets. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 29(2) :511–546, 1998.
- [Tau98] D. TAUBMAN. EBCOT (embedded block coding with optimized truncation) : A complete reference. ISO/IEC JTC1/SC29/WG1 N983, Septembre 1998.
- [TBU00] P. THÉVENAZ, T. BLU, et M. UNSER. Interpolation revisited. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 19(7) :739–758, Juillet 2000.
- [ZB92] Q. ZHANG et A. BENVENISTE. Wavelet networks. *IEEE Trans. on Neural Networks*, 3(6) :889–898, novembre 1992.