

# Analyse des Séries Temporelles

Erwan LE PENNEC  
lepennecc@math.jussieu.fr

2008

Attention, il s'agit de notes manuscrites qui n'ont pas encore fait l'objet d'une relecture, de nombreuses erreurs peuvent subsister... N'hésitez pas à me les communiquer par email si vous en trouvez.

# Analyse des Séries Temporelles

- 1] Série de Fourier
- 2] Transformée de Fourier, distribution...
- 3] Traitement du signal analogique:  
filtres linéaires homogènes et convolution
- 4] Traitement du signal numérique:  
Échantillonnage, convolution  
Transformée de Fourier discrète et rapide
- 5] Traitement du signal stochastique:  
processus stationnaire, filtre, densité spectrale,  
suite autoregressive.  
Prédiction, filtrage de Wiener.

## I Intro

Histoire: ~ 1815, Fourier décompose une fonction 1-périodique en somme de sinus et cosinus pour résoudre l'équation de la chaleur sur une tige.

Cadre: fonctions sur  $[0, 1[ \equiv$  fonctions sur  $\mathbb{R}$ , 1-périodiques.

Topologie:  $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong [0, 1[ \Rightarrow$  compact.

⚠ La restriction  $\uparrow$  d'une fonction continue sur  $\mathbb{R}$  n'est continue que si  $f(0) = f(1)$ !

Notation:  $\int_{\mathbb{T}} f(x) dx = \int_0^1 f(x) dx = \int_a^{a+1} f(x) dx$

$L^2(\mathbb{T}, dx) := \{ f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}, \int_{\mathbb{T}} |f(x)|^2 dx < +\infty \}$

Espace de Hilbert avec  $\langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{T}} f \bar{g} dx$

$\delta_m(x) = e^{i2\pi m x}$ ,  $C^\infty$  sur  $\mathbb{T}$

phase:  $2\pi m$  / fréquence:  $m$  / Période:  $\frac{1}{m}$

## II Base de Fourier.

Prop:  $(\delta_m)_{m \in \mathbb{Z}}$  est une suite orthogonale.

dm:  $\langle \delta_m, \delta_n \rangle = \int_{\mathbb{T}} e^{i2\pi(m-n)x} dx = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n \\ 1 & \text{si } m = n \end{cases}$

Th: la famille  $(\delta_m)_{m \in \mathbb{Z}}$  est totale dans  $L^2(\mathbb{T}, dx)$

Cor: La famille  $(\delta_m)_{m \in \mathbb{Z}}$  est une base de Riesz de  $L^2$  base orthogonale

Preuve:  $F = \{ \text{Poly trigo} \} \subset \mathcal{C}(\mathbb{T}, \mathbb{C}) \subset L^2_{\mathbb{C}}$

• Stone-Weierstrass sur  $\mathbb{T}$  compact s'applique à  $F$  car

•  $F \ni$  les constantes  $\Rightarrow F$  est dense dans  $\mathcal{C}(\mathbb{T})$

•  $f, g \in F \Rightarrow fg \in F$  et  $\bar{f} \in F$

•  $\forall x, y \in \mathbb{T} \exists f \in F \text{ et } f(x) \neq f(y) \Rightarrow F$  est dense dans  $L^2$  pour  $\|\cdot\|_2$

Preuve très abstraite!

Def: on pose pour  $f \in L^2$ ,  $\hat{f}[n] = \langle f, \gamma_n \rangle = \int_0^1 f(x) e^{-i2\pi n x} dx$  |AST 3  
et  $S_m f(x) = \sum_{k=-m}^m \hat{f}[k] \gamma_k(x)$

$$S_m f \xrightarrow{L^2} f \quad : \quad f = \sum_k \hat{f}[k] \gamma_k(x) = \sum_k \hat{f}[k] e^{i2\pi k x}$$

Preuve plus concrète sur le moyen de Poisson:

Noyau de Poisson:  $P_r(x) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} r^{|m|} \gamma_m(x) \quad x \in [0, 1[$

série uniformément convergente

Idee:  $[P_r * f](x) = \int_0^1 P_r(x-u) f(u) du$   
 $= \sum_{m \in \mathbb{Z}} r^{|m|} \int_0^1 f(u) \gamma_m(u) du \gamma_m(x)$   
 $= \sum_{m \in \mathbb{Z}} r^{|m|} \hat{f}[m] \gamma_m(x)$

Prop: (i)  $P_r(x) = \frac{1-r^2}{|1-r\gamma_1(x)|^2} \geq 0$  et (ii)  $\int_{\mathbb{T}} P_r(x) dx = 1$

Preuve:

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad P_r(x) &= 1 + \frac{r\gamma_1}{1-r\gamma_1} + \frac{r\gamma_{-1}}{1-r\gamma_{-1}} = 1 + r \frac{\gamma_1 + \gamma_{-1} - 2r\gamma_1\gamma_{-1}}{(1-r\gamma_1)(1-r\gamma_{-1})} \\ &= 1 + r \frac{\gamma_1 + \gamma_{-1} - 2r}{|1-r\gamma_1|^2} = \frac{(1-r\gamma_1)(1-r\gamma_{-1}) + r(\gamma_1 + \gamma_{-1}) - 2r^2}{|1-r\gamma_1|^2} \\ &= \frac{1-r^2}{|1-r\gamma_1|^2} \end{aligned}$$

$$\text{(ii)} \quad \int P_r = \sum_n r^{|n|} \int \gamma_n = 1$$

$\nwarrow$  Convergence normale  $\Rightarrow$  en dens  $L^1$

(  $P_r \rightarrow \delta_0$  au sens des distributions )

Prop: Si  $g \in L^1$  et est continu en 0 alors  $\int_{\mathbb{T}} P_r(x) g(x) dx \xrightarrow{r \rightarrow 1} g(0)$  AST 4

Preuve:  $\mathcal{V}$  voisinage de 0 tel que  $|g(x) - g(0)| \leq \epsilon$

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{T}} P_r(x) g(x) dx - g(0) \right| &= \left| \int_{\mathbb{T}} P_r(x) [g(x) - g(0)] dx \right| \\ &\leq \int_{\mathcal{V}} P_r(x) |g(x) - g(0)| dx \\ &\quad + \int_{\mathbb{T} \setminus \mathcal{V}} P_r(x) |g(x) - g(0)| dx \\ &\leq \epsilon + \|g - g(0)\|_1 \times \sup_{\mathbb{T} \setminus \mathcal{V}} P_r(x) \end{aligned}$$

~~Soit  $\beta \in L^1$  et  $\beta$  continue en  $x_0$~~

$$\Rightarrow \int_{\mathbb{T}} P_r(x) g(x_0 - x) dx \rightarrow g(x_0)$$

$\downarrow r \rightarrow 1$   
0

Prop:  $\beta \in L^2(\mathbb{T})$ , 1)  $P_r * \beta(x) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \hat{\beta}(m) r^{|m|} \gamma_m(x)$

$$2) P_r * \beta \xrightarrow{L^2} \beta$$

Preuve: 1)  $P_r * \beta(x) = \left\langle \beta, \sum_{m \in \mathbb{Z}} r^{|m|} \gamma_{-m}(x) \gamma_m \right\rangle$   
 $= \sum_{m \in \mathbb{Z}} r^{|m|} \gamma_m(x) \langle \beta, \gamma_m \rangle \rightarrow$  cv des  $L^2(\mathbb{T})$  et  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  co

$$\begin{aligned} 2) |P_r * \beta(x) - \beta(x)|^2 &= \left| \int_{\mathbb{T}} P_r(u) [\beta(x-u) - \beta(x)] du \right|^2 \\ &\leq \int_{\mathbb{T}} P_r(u) |\beta(x-u) - \beta(x)|^2 du \times \underbrace{\int_{\mathbb{T}} P_r(u) du}_{=1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int |P_r * \beta(x) - \beta(x)|^2 dx &\leq \int \int_{\mathbb{T}} P_r(u) |\beta(x-u) - \beta(x)|^2 dx du \\ &\leq \int P_r(u) \|\beta - \tau_u \beta\|_2^2 du \quad \text{Fubini} \end{aligned}$$

Reste à montrer que  $\|\beta - \tau_u \beta\|_2^2 = g(u) \in L^1$  et est continu en 0

$$\|\beta - \tau_u \beta\|_2^2 \leq 4 \|\beta\|_2^2 \Rightarrow g \in L^1$$

$$\begin{aligned} \|\beta - \tau_0 \beta\|_2 &\leq \|\beta - \tilde{\beta}\|_2 + \|\tilde{\beta} - \tau_0 \tilde{\beta}\|_2 + \|\tau_0 \tilde{\beta} - \tau_0 \beta\|_2 \\ &\leq 2 \|\beta - \tilde{\beta}\|_2 + \|\tilde{\beta} - \tau_0 \tilde{\beta}\|_2 \end{aligned}$$

$\tilde{\beta} \in \mathcal{C} \Rightarrow \|\tilde{\beta} - \tau_0 \tilde{\beta}\|_2 \xrightarrow{\tau \rightarrow 0} 0$  et on conclut par densité.

Bilan:  $\forall \beta \in L^2, \beta \perp \gamma_m \Rightarrow \hat{\beta}[m] = 0 \Rightarrow \beta = 0$   
 $\Rightarrow (\gamma_m)$  famille totale

eq:  $\forall \beta \in L^2(\mathbb{T}) \quad \beta(w) = \sum_m \hat{\beta}[m] \gamma_m = \sum_m \hat{\beta}[m] e^{2i\pi m a}$

$\beta \mapsto \hat{\beta}$   
 $L^2(\mathbb{T}) \rightarrow L^2(\mathbb{Z})$  linéaire bijective isométrique  
 ( $a_m \mapsto \sum a_m \gamma_m$ )

$$\|\beta\|^2 = \|\hat{\beta}\|_2^2 = \sum_m |\hat{\beta}[m]|^2 \quad \text{Bessel-Poisson}$$

(R)appel:

$\square a \in \ell^1 \Rightarrow \sum a_m \gamma_m$  converge uniformément vers ce fonction continue  
 $\Rightarrow \hat{\beta} \in \ell^1 \Rightarrow \beta$  est continue.

$\square$  Prop générale:  $\hat{\beta} \rightarrow$  vite  $\Leftrightarrow \beta$  est régulière

$\square$  Riemann-lesque:  $\beta \in L^1 \Rightarrow \hat{\beta}[m] \rightarrow 0$  (mais plus récemment  $L^2$ )

$\square$  Noyau de Fejer  $\beta \in L^1 \Rightarrow \frac{S_1 \beta + \dots + S_n \beta}{n} \xrightarrow{L^1} \beta$

$\square \beta$  dérivable à gauche et à droite en  $x_0 \Rightarrow S_n \beta(x_0) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{\beta(x_0^+) + \beta(x_0^-)}{2}$

I Intro

Histoire: Fourier, Cauchy et Poisson  $\approx 1810 \sim 1820$

Howst type:  $\hat{f}_N[m] = \frac{1}{N} \int_{-N/2}^{N/2} f(t) e^{-i2\pi \frac{m}{N} t} dt$

$f \Rightarrow f_N = f \times 1_{[-N/2, N/2]}$

$\leadsto \varphi = \frac{m}{N} \quad (\omega!)$        $N \hat{f}_N[m] \xrightarrow{\frac{m}{N} \rightarrow \varphi} \hat{f}(\varphi)$

$f_N(t) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \hat{f}_N[m] e^{i2\pi m/N t}, \quad \forall t \in [-N/2, N/2]$

$= \frac{1}{N} \sum_{m \in \mathbb{Z}} N \hat{f}_N[m] e^{i2\pi m/N t}$

$\rightarrow \int \hat{f}(\varphi) e^{i2\pi \varphi t}$

Pb: on souhaite poser  $\hat{f}(\varphi) = \int f(t) e^{-i2\pi \varphi t} dt$   
 par  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ .

$f \in L^1(\mathbb{R}) \Rightarrow \hat{f} \in L^\infty \Rightarrow$  comment définir l'inverse?

$L^2(\mathbb{R}) \not\subset L^1(\mathbb{R}) \Rightarrow$  comment définir la transformée de Fourier?

II Transformée de Fourier sur  $L^1(\mathbb{R}, dx)$ 

Def:  $\mathcal{F}: L^1 \rightarrow L^\infty$

$f \mapsto \hat{f} \quad \hat{f}(\varphi) = \int f(t) e^{-i2\pi \varphi t} dt$

Prop:  $\hat{f}(\varphi)$  existe pour tout  $\varphi$  et  $|\hat{f}(\varphi)| \leq \|f\|_1$

Prop:  $f \in L^1 \Rightarrow \hat{f} \in C_0 \leftarrow$  fonctions continues qui  $\xrightarrow{\infty} 0$ .

Preuve:  $|\hat{f}(p+h) - \hat{f}(p)| \leq \int |\chi_{-h}(t) - \chi_0(t)| |f(t)| dt$   
 $\xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$  par lebesgue

$\hat{f}(p) \rightarrow 0$ : lemme de Riemann Lebesgue.

- 1)  $f = \mathbb{1}_{[a,b]}$  2) CL 3) Densité dans  $L^1$  pour la norme  $L^1$  et "continuité" de la T.F

$(|\hat{f}(t) - \hat{g}(t)| \leq \|f - g\|_1)$

$\hat{f}$  échange la régularité et la décroissance à l' $\infty$ .

Prop: i)  $f \in L^1$  et  $g = \mathcal{F}f \in L^1 \Rightarrow \hat{f}$  est  $C^1$  et  $\hat{f}'(p) = -2i\pi \hat{g}(p)$

ii)  $f \in L^1 \cap C^1$  et  $f' \in L^1 \Rightarrow \hat{f}(p) = \frac{\widehat{f'}(p)}{2i\pi p}$

Preuve: i) Lebesgue:

$$\frac{\hat{f}(p+h) - \hat{f}(p)}{h} = \int f(t) \chi_{-p}(t) \left[ \frac{\chi_{-h}(t) - 1}{h} \right] dt$$

$| \frac{\chi_{-h}(t) - 1}{h} | \leq 2\pi t \xrightarrow{h \rightarrow 0} -2i\pi t$   
 $\rightarrow \int -2i\pi t f(t) \chi_{-p}(t) dt = -2i\pi \hat{g}(p)$

ii)  $f' \in L^1 \Rightarrow \int_0^{+\infty} f'(t) dt$  admet une limite

mais  $f(t) = f(0) + \int_0^t f'(t) dt$  et  $f \in L^1$

$\Rightarrow \int_0^{+\infty} f'(t) dt + f(0) = 0$   
 $= \lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$

$$\hat{f}'(p) = \int f'(t) e^{-i2\pi p t} dt \stackrel{IPP}{=} \left[ f(t) e^{-i2\pi p t} \right]_{-\infty}^{+\infty} + \int 2i\pi p f(t) e^{-i2\pi p t} dt$$

$$= 0 + 2i\pi p \hat{f}(p)$$

Pr: i)  $f \in L^1$  et  $x^p f \in L^1 \Rightarrow \hat{f} \in C^p$

ii)  $f \in L^1 \cap C^p, \dots, f^{(p)} \in L^1 \Rightarrow \epsilon^p \hat{f} \in C^0$

Ex  $f(t) = \mathbb{1}_{[-a, a]}$  (pas régulier)  $\hat{f}(\rho) = \frac{\sin(\rho a)}{\pi \rho} \notin L^1$  (non stable)

convolution .  $f, g \in L^1, f * g(t) = \int f(u) g(t-u) du$   
 $\Rightarrow f * g \in L^1$  ~~et  $f * g \in C^0$~~   
preuve .  $\int |f * g| \leq \|f\|_1 \|g\|_1$

~~mais~~

$f, g \in L^2 \Rightarrow f * g \in L^\infty$  et  $f * g \in C^0$

preuve: . Cauchy-Schwartz  $\|f * g\|_\infty \leq \|f\|_2 \|g\|_2$   
 . Argument de densité et de stabilité de  $C^0$  pour la norme  $\|\cdot\|_\infty$

Prop:  $f, g \in L^1 \Rightarrow \widehat{f * g} = \hat{f} \hat{g}$

preuve  $\widehat{f * g}(\rho) = \int e^{-i2\pi \rho t} \int f(t-u) g(u) du dt$

$\stackrel{Fubini}{=} \iint e^{-i2\pi \rho(t-u)} f(t-u) e^{-i2\pi \rho u} g(u) dt du = \hat{f}(\rho) \hat{g}(\rho)$

Ex:  $g = f * f$  ( $f = \mathbb{1}_{[-a, a]}$ )  $\Rightarrow g$  fonction triangle + régulière

$\hat{g} = f * f = \frac{\sin^2(a\rho)}{\pi \rho^2} \in L^1 \sim O(\frac{1}{\rho^2}) \rightarrow$  régularité.

Ex: Gaussienne:  $f(t) = e^{-t^2/2\sigma^2} \in L^1$

AST

$$\left( \int f(t) dt = \sigma\sqrt{2\pi} \right)$$

$$\hat{f}(\rho) = \int e^{-t^2/2\sigma^2} e^{-2i\pi\rho t} dt$$

$$\begin{aligned} \hat{f}'(\rho) &= - \int e^{-t^2/2\sigma^2} 2i\pi t e^{-2i\pi\rho t} dt = - \int 2i\pi t e^{-t^2/2\sigma^2} e^{-2i\pi\rho t} dt \\ &= \int 2i\pi 2\sigma^2 e^{-t^2/2\sigma^2} 2i\pi\rho e^{-2i\pi\rho t} dt \\ &= -4\pi^2 2\sigma^2 \rho \hat{f}(\rho) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \hat{f}(\rho) = c_0 e^{-4\pi^2\sigma^2\rho^2}$$

$$\hat{f}(0) = \int f(t) dt = \sigma\sqrt{2\pi} = c_0$$

$$\Rightarrow \hat{f}(\rho) = \sigma\sqrt{2\pi} e^{-4\pi^2\sigma^2\rho^2}$$

Rq:  $g = \hat{f}(\rho) = \hat{f}(-\rho)$

$$\hat{g}(t) = \sigma\sqrt{2\pi} e^{-4\pi^2\sigma^2\rho^2}(t)$$

$$= \sigma\sqrt{2\pi} \times \frac{\sqrt{2\pi}}{2\pi\sigma} e^{-\frac{4\pi^2}{8\pi^2\sigma^2} t^2}$$

$$= e^{-t^2/2\sigma^2} = f(t)$$

$$\boxed{\hat{\hat{f}}(-\rho) = f}$$

Rq: ~~AST~~  $\sigma^2 \times \frac{1}{8\pi^2\sigma^2} = \text{cte}$

"Principe d'incertitude"

# Formule d'inversion de $\mathcal{F}$

(AST 10)

On souhaite montrer que  
Th: si  $\beta \in L^1$  et  $\hat{\beta} \in L^1$  alors

$$\int_{\mathbb{R}} \hat{\beta}(\varphi) e^{2i\pi\varphi t} d\varphi = \beta(t) \text{ p.p.} \quad (\widehat{\hat{\beta}(-\cdot)} = \beta)$$

Idée: • Série de Fourier

$$\beta(t) = \sum \hat{\beta}[m] e^{2i\pi m t} \quad \text{rec } \hat{\beta}[m] = \int_0^1 e^{-2i\pi m t} dt$$

valable pour  $\beta \in L^2$

si on suppose  $\hat{\beta} \in L^1$  alors on peut regarder les coeff de Fourier de la série A.C.

$$S(t) = \sum \hat{\beta}[m] e^{i2\pi m t}$$

$$\hat{S}[k] = \int_0^1 S(t) e^{-i2\pi k t} dt = \sum_m \hat{\beta}[m] \int_0^1 e^{-2i\pi(k-m)t} dt$$

$$\text{dms } \hat{S} = \hat{\beta} \text{ et } S = \beta \text{ p.p.} = \hat{\beta}[k]$$

• T.F.

$$S(t) = \int \hat{\beta}(\omega) e^{i2\pi\omega t} d\omega$$

$$\hat{S}(\phi) = \int S(t) e^{i2\pi\phi t} dt = \int \int \hat{\beta}(\omega) e^{-i2\pi\omega t} d\omega e^{i2\pi\phi t} dt$$

$$\text{Pos de Fubini possible} = \int \hat{\beta}(\varphi) \underbrace{\int e^{i2\pi(\phi-\varphi)t} dt}_{\text{diverge}} d\varphi$$

$\Rightarrow$  Prendre plus technique (densité et fonction continue)

### III Transformée de Fourier sur $L^2(\mathbb{R})$

Pb  $\hat{f}(\tau) = \int f(t) e^{-i2\pi\tau t} dt$  pas défini!

Contrainte:  $\mathcal{F}: L^2 \rightarrow$

tg  $f \in L^1 \cap L^2 \quad \mathcal{F}f(\tau) = \hat{f}(\tau)$

Définition par densité existe mais on pose ici une définition plus constructive

Clé:  $f \in L^2 \Rightarrow \chi_{[-A,A]} f \in L^1 \cap L^2 \forall A > 0$

$\mathcal{F}_A f = \widehat{\chi_{[-A,A]} f} \in L^2$  et  $\|\mathcal{F}_A f\|_2^2 = \|\widehat{\chi_{[-A,A]} f}\|_2^2 = \|\chi_{[-A,A]} f\|_2^2$

$\Rightarrow f \in L^2$   
 $\square (\mathcal{F}_A f)_{A \in \mathbb{N}^*}$  est une suite de Cauchy dans  $L^2(\mathbb{R})$

donc  $\lim_{A \rightarrow \infty} \mathcal{F}_A f$  existe et appartient à  $L^2$

on pose  $\mathcal{F}f = \lim_{A \rightarrow \infty} \mathcal{F}_A f$

$\mathcal{F}$  est linéaire et isométrique.

$\square$  si  $f \in L^1 \cap L^2$ ,  $\mathcal{F}_A f \xrightarrow{L^1} \hat{f}$  et donc

$\square$  Extension de  $\hat{f}$ :  $\Rightarrow \mathcal{F}f = \hat{f}$

Th Plancherel:  $\forall f \in L^2 \exists \mathcal{F}f \in L^2$  tg  $\mathcal{F}f = \lim_{A \rightarrow \infty} \mathcal{F}_A f$

L'application  $\mathcal{F}$  est une isométrie linéaire bijective sur  $L^2$  de

réciproque  $\mathcal{F}^* g = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_{-A}^A g(\tau) e^{+i2\pi\tau t} d\tau$

Preuve: on admettra encore la formule d'inversion!

lemme:  $\| \mathcal{F}_A \beta \|_2 = \| \beta \|_{[-A, A]} \|_2$

$\beta_A = \beta \mathbb{1}_{[-A, A]}$  est  $2A$  périodique

$\Rightarrow$  développement en série de Fourier

$$\hat{\beta}_A[m] = \frac{1}{\sqrt{2A}} \int_{-A}^A \beta(t) e^{-i2\pi \frac{m}{2A} t} dt$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2A}} \mathcal{F}_{AB} \left[ \frac{m}{2A} \right]$$

$$\int_{-A}^A |\beta(t)|^2 dt = \sum_m |\hat{\beta}_A[m]|^2 = \frac{1}{2A} \sum_m \left| \mathcal{F}_{AB} \left[ \frac{m}{2A} \right] \right|^2$$

On applique le résultat à  $\beta e^{-i2\pi \delta t}$

$$\Rightarrow \int_{-A}^A |\beta(t)|^2 dt = \frac{1}{2A} \sum_m \left| \mathcal{F}_{AB} \left[ \frac{m}{2A} + \delta \right] \right|^2$$

$$\Rightarrow \int_{-A}^A |\beta(t)|^2 dt = \frac{1}{2A} \sum_m \int_0^{1/2A} \left| \mathcal{F}_{AB} \left[ \frac{m}{2A} + \delta \right] \right|^2 d\delta$$

$$= \int \left| \mathcal{F}_{AB}(\varphi) \right|^2 d\varphi$$

$$\Rightarrow \| \beta \mathbb{1}_{[-A, A]} \|_2^2 = \| \mathcal{F}_A \beta \|_2^2$$

# IV Transformée de Fourier des $\mathcal{S}$

$\mathcal{F} : L^1 \rightarrow C_0$  pas "stable" mais calcul  
 $L^2 \rightarrow L^2$  stable mais pas de formule.

Adverch:  $\mathcal{S} \subset L^1 \cap L^2$  by  $\mathcal{F}\mathcal{S} = \mathcal{S}$   
 $\Rightarrow \mathcal{S} \subset C_0 \cap L^1 \cap L^2$

$\mathcal{S}$  fonctions  $C^\infty$  à décroissance rapide

$\mathcal{S}$  : espace de Schwartz.

$\mathcal{S} = \{ \phi \in C^\infty \text{ tel que } \forall p > 0 \quad \mathcal{N}_p(\phi) = \sup_{\alpha \leq p} \sup_{|\beta| \leq p} \|t^\alpha \partial^\beta \phi\|_\infty < +\infty \}$

Topologie:  $\mathcal{S}_m \xrightarrow{\mathcal{S}} \mathcal{S}$  ssi  $\forall p \quad \mathcal{N}_p(\mathcal{S}_m - \mathcal{S}) \rightarrow 0$

Prop:  $\mathcal{S}$  est stable par dérivation et par multiplication par des polynômes.

$\forall \phi \in \mathcal{S} \quad \sup_{\alpha \leq p} \sup_{|\beta| \leq p} \|t^\alpha \partial^\beta \phi\|_1 \leq C_p \mathcal{N}_{p+2}(\phi)$

Preuve

$$\begin{aligned} \int |t^\alpha \partial^\beta \phi(t)| dt &\leq \int |(1+t^2) t^\alpha \partial^\beta \phi(t)| \left| \frac{1}{1+t^2} \right| dt \\ &\leq \| (1+t^2) t^\alpha \partial^\beta \phi \|_\infty \left\| \frac{1}{1+t^2} \right\|_1 \\ &\leq 2 \left\| \frac{1}{1+t^2} \right\|_1 \mathcal{N}_{p+2}(\phi) \end{aligned}$$

Th:  $\forall \phi \in \mathcal{S} \quad \widehat{\phi} \in \mathcal{S}$

et  $\exists C'_p \text{ tq } \mathcal{N}_p(\widehat{\phi}) \leq C'_p \mathcal{N}_{p+2}(\phi)$

De plus la transformée de Fourier définit un isomorphisme séparément linéaire de  $\mathcal{S}$  vers  $\mathcal{S}$  d'immersion  $\mathcal{F}^{-1}$ .

preuve:

$$\begin{aligned} \|\mathcal{F}^{-1} \delta^\beta \widehat{\phi}(\varphi)\|_\infty &\leq C'_p \|\mathcal{F}^{-1}(\delta^\alpha (t^\beta \phi(t)))\|_\infty \\ &\leq C'_p \|\delta^\alpha (t^\beta \phi)\|_1 \\ &\leq C'_p \sup_{\alpha \leq \beta} \sup_{\beta' \leq \beta} \|x^{\alpha'} t^{\beta'} \phi\|_1 \\ &\leq C'_p \mathcal{N}_{p+2}(\phi) \end{aligned}$$

reste à montrer la formule d'immersion!

mais en TD on a montré (ou on va montrer)

que si  $\phi \in L^1$  et  $\widehat{\phi} \in L^1$  alors  $\int \widehat{\phi} e^{i2\pi \varphi t} \rightarrow \phi(t)$   
 en tout point de continuité

Rq: on montre aussi directement  $\|\phi\|_2 = \|\widehat{\phi}\|_2$  on passe par  $\mathcal{S} \subset L^2$

$e^{-i2\pi t \varphi} \phi(t) \overline{g(\varphi)} \in L_1(\mathbb{R}^2)$  si  $\phi$  et  $g \in \mathcal{S}$

$$\begin{aligned} \langle \widehat{\phi}, g \rangle_{\mathcal{S}, \mathcal{S}} &= \int \widehat{\phi}(\varphi) \overline{g(\varphi)} d\varphi \\ &= \iint \phi(t) e^{-i2\pi t \varphi} \overline{g(\varphi)} dt d\varphi \\ &= \iint \phi(t) \overline{g(\varphi) e^{i2\pi t \varphi}} d\varphi dt \\ &= \langle \phi, \widehat{\mathcal{F}^{-1} g} \rangle_{\mathcal{S}, \mathcal{S}} \end{aligned}$$

Pour  $g = \widehat{\phi}$  on obtient  $\|\widehat{\widehat{\phi}}\|_2^2 = \|\phi\|_2^2$

# V Transformée de Fourier dans $\mathcal{S}'$

Extension de  $L^1 \cap L^2$  stable par la transformée de Fourier.

## Distributions :

•  $\mathcal{D}$  l'ensemble des fonctions continues indéfiniment dérivables à support compact.

Topologie :  $\mathcal{U}$  est un ouvert

si  $\forall K$  compact et  $\beta \in \mathcal{U}$  à support dans  $K$ ,  $\exists \epsilon > 0 \exists \eta > 0$  tel que  $\{g \mid \text{supp}(g) \subset K, \forall x \in K \ |f^{(q)}(x) - g^{(q)}(x)| \leq \epsilon\} \subset \mathcal{U}$

Distribution : Forme linéaire continue sur  $\mathcal{D} : \mathcal{D}'$

$$T \in \mathcal{D}', \beta \in \mathcal{D} \quad T(\beta) = \langle T, \beta \rangle_{\mathcal{D}, \mathcal{D}'} \quad (T(\beta) \leq C(K) \|f^{(q)}\|_{\infty})$$

Ex.  $\forall g$  localement intégrable  $T_g(\beta) = \int g(t) \beta(t) dt$  défini ce distributeur on peut identifier  $T$  et  $g$ .

•  $\delta_{t_0} : \beta \mapsto \beta(t_0)$  est ce distributeur.

Def  $T \in \mathcal{D}'$  on définit  $T' \in \mathcal{D}'$  par

$$\langle T', \beta \rangle = -\langle T, \beta' \rangle$$

Extension de la dérivation  $\int g'(t) \beta(t) dt = -\int g(t) \beta'(t) dt$

•  $\mathcal{S}'$  : distributions tempérées = dual de  $\mathcal{S}$  ( $T(\beta) \leq C \mathcal{N}_p(\beta)$ )

$$\mathcal{D} \subset \mathcal{S} \Rightarrow \mathcal{S}' \subset \mathcal{D}'$$

## Transformée de Fourier :

Def :  $\langle \mathcal{F}T, \beta \rangle = \langle T, \hat{\beta} \rangle \quad \mathcal{F}T \in \mathcal{S}'$  et extension de la TF.

preuve :  $|\langle \mathcal{F}T, \beta \rangle| = |\langle T, \hat{\beta} \rangle| \leq C \mathcal{N}_p(\hat{\beta})$

$$\leq C' \mathcal{N}_{p+2}(\beta)$$

$$\forall v \in L^1 \quad \int v(t) \hat{\beta}(t) dt = \iint v(t) \beta(u) e^{-iz\pi tu} dt du$$

$$= \int \hat{v}(u) \beta(u) du$$

Prop:  $\mathcal{F}: \mathcal{Y}' \rightarrow \mathcal{Y}'$  isomorphisme séquentiellement linéaire

d'immersion  $\mathcal{F}^{-1}: \langle \mathcal{F}^{-1}T, \beta \rangle_{s,s} = \langle T, \mathcal{F}^{-1}\beta \rangle_{s,s}$

preuve: continuité de  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{F}^{-1}$  immédiate.

$\langle \mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}T, \beta \rangle = \langle \mathcal{F}T, \mathcal{F}^{-1}\beta \rangle = \langle T, \mathcal{F}\mathcal{F}^{-1}\beta \rangle = \langle T, \beta \rangle$   
 donc  $\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}T = T$ .

Ex:  $\delta_{t_0}: \beta \mapsto \beta(t_0)$

$\langle \mathcal{F}\delta_{t_0}, \beta \rangle = \langle \delta_{t_0}, \mathcal{F}\beta \rangle = \hat{\beta}(t_0) = \int \beta(t) e^{-i2\pi t t_0} dt$

$\Rightarrow \mathcal{F}\delta_{t_0}(t) = \hat{\delta}_{t_0}(t) = e^{-i2\pi t t_0}$

Rq:  $\int \delta_{t_0}(t) e^{-i2\pi t t_0} dt = e^{-i2\pi t_0 t_0}$

$e^{i2\pi t t_0}: \beta \mapsto \int e^{i2\pi t t_0} \beta(t) dt$

$\widehat{e^{i2\pi t t_0}} = \delta_{-t_0} \quad (\langle \widehat{e^{i2\pi t t_0}}, \beta \rangle = \langle e^{i2\pi t t_0}, \hat{\beta} \rangle = \beta(t_0))$

$T \in \mathcal{Y}' \quad T' \in \mathcal{Y}'$

$\mathcal{F}T' = (i2\pi t)(\mathcal{F}T)$

preuve:  $\langle \mathcal{F}T', \beta \rangle = \langle T', \mathcal{F}\beta \rangle$   
 $= -\langle T, (\mathcal{F}\beta)' \rangle$   
 $= -\langle T, \mathcal{F}(-i2\pi t \beta(t)) \rangle$   
 $= -\langle \mathcal{F}T, -i2\pi t \beta(t) \rangle$   
 $= \langle i2\pi t \mathcal{F}T, \beta \rangle$

Rq:  $\mathcal{G} \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \quad \mathcal{G}_{per} \in L^2_{loc} \Rightarrow \mathcal{G}_{per} \in \mathcal{Y}'$

on voit que  $\mathcal{F}\mathcal{G}_{per} = \sum \hat{\mathcal{G}}[m] \delta_m$

esquisse de preuve:

AST 1.

$$g_{per} = \sum \hat{g}[n] e^{i2\pi n t}$$

$$\langle \hat{g}_{per}, \hat{b} \rangle = \langle g_{per}, \hat{b} \rangle$$

$$= \sum \hat{g}[n] \langle e^{i2\pi n t}, \hat{b} \rangle$$

$$= \sum \hat{g}[n] \hat{b}(n)$$

$$= \langle \sum \hat{g}[n] \delta_m, \hat{b} \rangle$$

⚠ Pb de convergence sur lequel on revient.

$$\Rightarrow \hat{g}_{per} = \sum \hat{g}[n] \delta_m$$

I introduction

Signaux analogiques:  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   
 $\uparrow$  continu       $\uparrow$  continu

Ex: signaux électriques, ondes électromagnétiques, optique  
 (tout sauf dans les ordinateurs...)

Filtrage / Traitement       $L: f \mapsto L(f)$   
 $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

II Filtrage stationnaire linéaire et Réponse impulsionnelle et Fonction de transfert

Def Filtrage:  $f \mapsto L(f)$

Stationnaire:  $L(f(\cdot - t_0)) \mapsto L(f)(\cdot - t_0)$

Linéaire       $L(f + \lambda g) = Lf + \lambda Lg$

Heuristique:  $f(t) = \int f(u) \delta(t-u) du = \delta_0 * f$

$$L f(t) = \int L(f(u) \delta_0(t-u)) du$$

$$= \int f(u) L \delta_0(t-u) du = L \delta_0 * f$$

$L \delta_0$ : réponse impulsionnelle du filtre.

Ici       $L = h * \text{ avec } h \text{ une fonction de } \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

Par construction  $h$  est la réponse impulsionnelle du filtre

$\Delta$  Pb de définition: il manque surtout " $f \in ?$ ": l'espace sur lequel agit le filtre...

Def: le filtre  $L = h *$  est dit causal si  $\forall t \leq 0 \quad h(t) = 0$

$$L f(t) = h * f(t) = \int f(u) h(t-u) du = \int_{-\infty}^t f(u) h(t-u) du$$

on n'utilise que les valeurs du "passé"  
 $\rightarrow$  crucial pour les traitements en temps réel

• le filtre est dit orthogonal si  $\forall t \neq 0 \quad h(t) = 0$

AST 10

• le filtre est dit stable si  $\|h\|_\infty < \infty \Rightarrow \|h * f\|_\infty < \infty \quad \forall f$

Ceci est vrai si  $h \in L^1$

Preuve:  $h \in L^1 \Rightarrow \forall f \in L^\infty \quad h * f \in L^\infty$

•  $h \notin L^1 \Rightarrow \int |h| \operatorname{sgn} h(t) = \int |h| = +\infty$

$\forall f \operatorname{sgn} h(t) \quad h * f(t) = +\infty$

Rq: ~~...~~  $L(e^{i2\pi p(t-t_0)})(u) = L(e^{i2\pi p t})(u - t_0)$   
 $= e^{-i2\pi p t_0} L(e^{i2\pi p t})(u)$

Soit en  $u = t_0 \quad L(e^{i2\pi p t})(t_0) = L(e^{i2\pi p t})(0) e^{i2\pi p t_0}$

$\Rightarrow$  les  $e^{i2\pi p t}$  sont des fonctions propres du filtre de valeurs propres  $L(e^{i2\pi p t})(0)$

Si  $\hat{h} = h * \delta$  avec  $h \in L^1$ ,  $L(e^{i2\pi p t})(0) = \int h(u) e^{i2\pi p(0-u)} du$

Th de convolution:  $\widehat{L[h]} = \widehat{h * \delta} = \hat{h} * \hat{\delta} = \hat{h}(\varphi)$

Avec cette définition, on peut généraliser la définition des filtre pour tout  $h$  dont on peut déterminer la transformée de Fourier!

Immersion de Fourier: si  $f$  et  $\hat{f}$  sont dans  $L^1$

$$f(t) = \int \hat{f}(\varphi) e^{i2\pi \varphi t} dt$$

et si  $\hat{h} \hat{f} \in L^1$

$$L[f](t) = \int \hat{h}(\varphi) \hat{f}(\varphi) e^{i2\pi \varphi t} dt \quad [\text{égaliseur}]$$

$\Rightarrow$  chaque composante fréquentielle est amplifiée/atténuée par  $\hat{h}(\varphi)$

Rq si  $\hat{h}(\varphi) = 0$  pour  $\varphi \in [f_1, f_2]$ , les composantes fréquentielles sont annulées (on l'appelle  $L$  d'où le nom de filtrage)

## Variation sur la transformée de Fourier :

AST20

En traitement du signal, on définit souvent la T.F. par

$$\hat{f}(\omega) = \int f(t) e^{-i\omega t} dt \quad (\omega \pm 2\pi f)$$

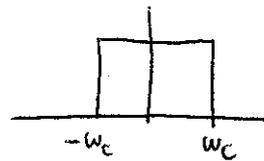
$$\Rightarrow \mathcal{F}^{-1} \hat{f}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

Intéret:  $\mathcal{F}(f') = i\omega \mathcal{F}f = (j\omega \hat{f})$  (moins de facteur  $2\pi$ )

### III Synthèses de Filtrés

#### 1/ Filtrés idéaux

■ Filtré passe bas idéal :  $\hat{h}_0(\omega) = \mathbb{1}_{[-\omega_c, \omega_c]}$



Réponse impulsionnelle

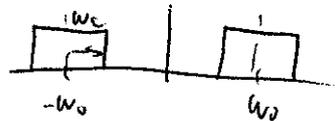
$$h_0 = \mathcal{F}^{-1}(\hat{h}_0)$$

$$= \frac{\sin(\omega_c t)}{\pi t}$$

$\Rightarrow$  Effet de lissage

$\Rightarrow$  Pb : ni causal, ni stable.

■ Filtré passe bande idéal :  $\hat{h}(\omega) = \mathbb{1}_{|\omega| \in [\omega_0 - \omega_c, \omega_0 + \omega_c]}$



$$= \hat{h}_0(\omega - \omega_0) + \hat{h}_0(\omega + \omega_0)$$

$$\rightarrow h(t) = h_0(t) e^{-i\omega_0 t} + h_0(t) e^{i\omega_0 t}$$

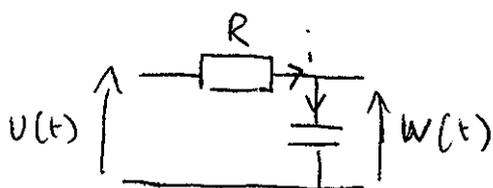
$$= 2 \cos(\omega_0 t) \frac{\sin(\omega_c t)}{\pi t}$$

$\Rightarrow$  Ni causal ni stable.

#### 2/ Filtrage par circuits électriques

• Certains filtres linéaires peuvent être implémentés par circuits électriques (fonctions rationnelles)

• Very large Scale Integrated circuits: résistances, condensateurs, amplificateurs opérationnels, diode... mais pas d'inductance pour des raisons de place.



$$i = C \frac{dW}{dt} \quad U = Ri + W$$

$$\left[ Q = CW \quad i = \frac{dQ}{dt} \right] \quad [\text{olm}]$$

$$\Rightarrow U(t) = RC \frac{dW}{dt} + W(t) \quad (\text{équation différentielle})$$

$$\Rightarrow \hat{F}(U) = RC \hat{F}\left(\frac{dW}{dt}\right) + \hat{F}(W)$$

$$\Rightarrow \hat{U} = RC j\omega \hat{W} + \hat{W}$$

$$\Rightarrow \hat{W} = \frac{\hat{U}}{1 + RCj\omega}$$

De façon plus générale,

$$a_N \frac{d^N W}{dt^N} + \dots + a_0 W = b_M \frac{d^M W}{dt^M} + \dots + b_0 W$$

$$\Rightarrow \text{Laplace: } a_N (j\omega)^N \hat{W} + \dots + a_0 \hat{W} = b_M (j\omega)^M \hat{W} + \dots + b_0 \hat{W}$$

$$\hat{R} = \frac{\hat{W}}{\hat{U}} = \frac{a_N (j\omega)^N + \dots + a_0}{a_M (j\omega)^M + \dots + b_0} \quad (\text{impédance})$$

Rq:  $M \geq N$  sinon  $\hat{R}(\omega) \rightarrow \infty$  et  $R \notin L^1 \cup L^2 \cup L^\infty$

Rq:  $U \mapsto W$  est linéaire et causal.

$$\text{Ex: } \hat{W} = \frac{1}{1 + RCj\omega} \hat{U} \Rightarrow \hat{R}(\omega) = \frac{1}{1 + RCj\omega}$$

$$\hat{f}\left(\alpha e^{-\alpha t} \uparrow_{[0, +\infty[}\right) = \int_0^{+\infty} \alpha e^{-\alpha t} e^{-i\omega t} dt = -\alpha \left[ \frac{e^{-(i\omega + \alpha)t}}{\alpha + i\omega} \right]_0^{+\infty} = \frac{\alpha}{\alpha + i\omega} = \frac{1}{1 + \frac{i\omega}{\alpha}}$$

$$\Rightarrow R = \frac{1}{RC} e^{-t/RC} \uparrow_{[0, +\infty[} \quad \text{causal et stable.}$$

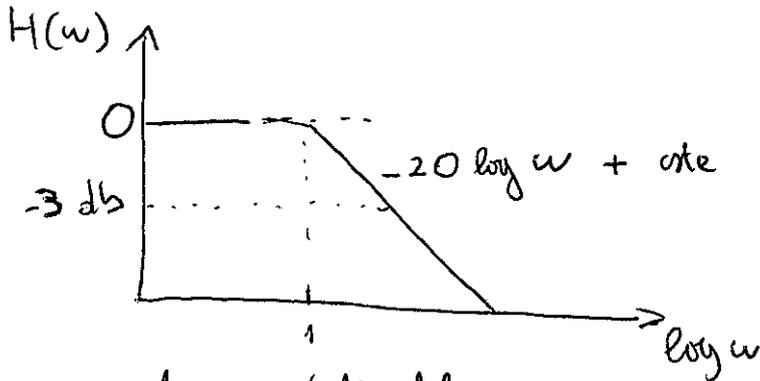
# Diagramme de Bode :

$$H = 10 \log_{10} \left| \frac{\hat{u}}{\hat{u}} \right|^2 = 10 \log_{10} |\hat{h}(\omega)|^2$$

↑ décibels

Ex:  $\hat{h}(\omega) = \frac{1}{1+RCj\omega} \rightarrow |\hat{h}(\omega)|^2 = \frac{1}{1+(RC\omega)^2}$

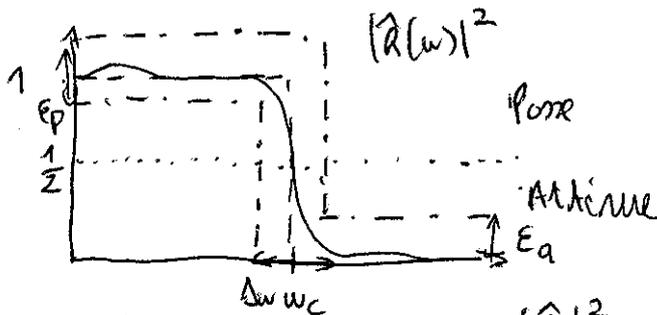
$$H(\omega) = -10 \log_{10} (1+(RC\omega)^2)$$



## 3/ Filtre passe-bas réalisable.

Filtre passe-bas idéal :  $\hat{h}_0(\omega) = 1_{[0, \omega_c, \omega_c]}(\omega) \neq$  fonction rationnelle.

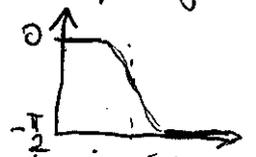
→ Approximation par des fonctions rationnelles (circuit VLSI)



Erreur d'approximation contrôlée sur  $|\hat{h}|^2$  par 1 gabarit spécifique :

$\epsilon_p, \epsilon_a$  : amplitude des oscillations dans la bande de passag et d'atténuation

$\Delta\omega$  : largeur de la bande de transition



⚠ On néglige ici le pb de la phase mais celui-ci est important en pratique : idéal  $\hat{h}(\omega) = |\hat{h}(\omega)| e^{-iS\omega}$  (avec toujours le cas par le cas) (réalisable)  
 ↑ retard.  
 phase linéaire.

⚠ on définit souvent la partie "passante" par  $|\hat{h}(\omega)|^2 \geq \frac{1}{2}$   
 ou encore  $H(\omega) \geq -3 \text{ dB}$

- Filtrés de Butterworth

$$|\hat{H}_m^B(\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{2m}}$$

Compliqué mais réalisable.

•  $m \gg 1$  :  $|\hat{H}_m^B|^2$  est plat au voisinage de 0 car les  $(2m-1)$  premiers zéros sont nuls

•  $\forall \omega \neq \pm \omega_c$   $|\hat{H}_m|^2 \rightarrow |\hat{H}_0|^2$

• spectre monotone

- Filtrés de Chebyshev

$$|\hat{H}_m^C(\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \epsilon^2 C_m\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2}$$

avec  $C_m$  polynôme de Chebyshev:

$$C_m(\cos \theta) = \cos m\theta \quad \text{cas 1}$$

$$\text{ky } C_m(\ch \theta) = \ch m\theta \quad (\text{plus généralement})$$

• meilleure approximation à 1 ordre donné que Butterworth

• oscillation mais monotone sur la bande de pass

Exemples

IV 1/ L'exemple de la modulation d'amplitude (AM)

Pr: FM plus complexe!

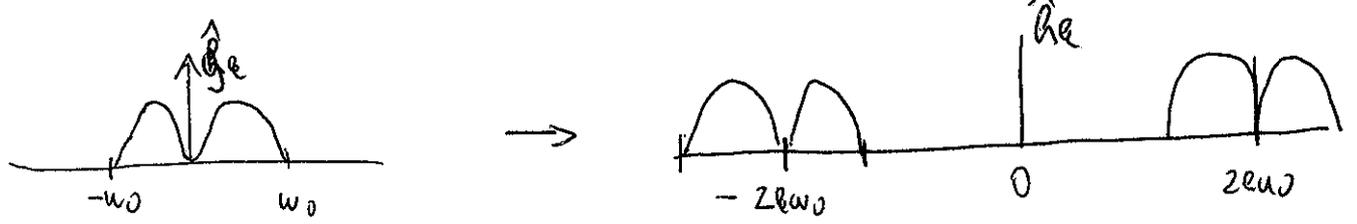
$g_0 \dots g_{N-1}$  signaux réels tel que  $\hat{g}(\omega) = 0 \quad \forall \omega > \omega_0$

Bande limitée  
Pr  $\omega$ : 10  $\rightarrow$  20000 Hz  
 300  $\rightarrow$  3300 Hz essentiel.

a) Double Side Band - No Carrier

$$h_e = g_e \cos(2k\omega_0 t) = g_e \frac{e^{i2k\omega_0 t} + e^{-i2k\omega_0 t}}{2}$$

$$\Rightarrow \hat{h}_e = \frac{1}{2} \left[ \hat{g}_e(\omega - 2k\omega_0) + \hat{g}_e(\omega + 2k\omega_0) \right]$$







On va montrer l'unicité de cette décomposition de ces distributions  $T$ -périodiques.

Th: Si  $(\gamma_k)$  est une suite à croissance lente telle que  $\sum \gamma_k e^{i2\pi k t/T} = 0$  alors  $\gamma_k = 0$

Preuve:  $\forall \beta \in \mathcal{D}$ ,  $0 = \langle \sum \gamma_k e^{i2\pi k t/T}, \beta \rangle = \sum \gamma_k \langle e^{i2\pi k t/T}, \beta \rangle$   
 $= \sum \gamma_k \int \beta(t) e^{i2\pi k t/T} dt$   
 on pose  $f(t) = \chi(t) e^{-i2\pi k_0 t/T}$   
 $= \sum \gamma_k \int \chi(t) e^{i2\pi (k-k_0) t/T} dt$   
 $= \sum \gamma_k \int_0^T \chi(t) e^{i2\pi (k-k_0) t/T} dt$   
 $= T \gamma_{k_0} \rightarrow \gamma_{k_0} = 0$

3/ Série de Fourier d'une distribution  $T$ -périodique

th: Soit  $u$  une distribution  $T$ -périodique, on définit

$$\gamma_k(u) = \frac{1}{T} \langle u, \chi e^{-i2\pi k t/T} \rangle$$

ou  $\chi$  est une solution de l'unité, alors  $\gamma_k(u)$  est à croissance lente, ne dépend pas de  $\chi$  et  $u = \sum \gamma_k(u) e^{i2\pi k t/T}$

Preuve:  $u = \sum \tau_{kT} \chi u = \sum \tau_{kT} \chi \tau_{kT} u = \sum \tau_{kT} (\chi u)$

$\tilde{u} = \chi u$  est une distribution à support compact tel que  $u = \sum \tau_{kT}(\tilde{u})$

$\forall \tilde{\beta} \in \mathcal{D}$ ,  $\beta = \sum \tau_{kT} \tilde{\beta}$  est  $C^\infty$  et  $T$ -périodique

$$\text{et } \hat{\beta}[m] = \frac{1}{T} \int_0^T \beta(t) e^{-i2\pi m t/T} dt = \frac{1}{T} \int_0^T \sum \tau_{kT} \tilde{\beta}(t) e^{-i2\pi m t/T} dt$$

$$= \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\beta}(t) e^{-i2\pi m t/T} dt$$

$\tilde{u}$  est à support compact  $\rightarrow |\hat{\beta}[m]| = \left| \frac{1}{T} \langle \tilde{u}, e^{-i2\pi m t/T} \rangle \right| \leq C \sup_{t \in \mathbb{R}} |\tilde{u}(t)| \leq C' (1+|m|)^p$   
 $\Rightarrow$  croissance lente.

$$\langle u, \tilde{\beta} \rangle = \langle \tilde{u}, \beta \rangle = \langle u, \sum_{m \in \mathbb{Z}} \hat{\beta}[m] e^{+i2\pi m t/T} \rangle$$

$$\langle u, \hat{\beta} \rangle = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \hat{\beta}[m] e^{i2\pi m t/T} \langle u, e^{+i2\pi m t/T} \rangle$$

$$= \sum_{m \in \mathbb{Z}} \hat{\beta}[m] \langle u, \chi e^{i2\pi m t/T} \rangle$$

$$\langle u, \hat{\beta} \rangle = T \sum_{m \in \mathbb{Z}} \hat{\beta}[m] \delta_{-m}(u)$$

$$\bullet \langle \sum_{-N}^N \gamma_m(\omega) e^{i2\pi m t/T}, \hat{\beta} \rangle = \sum_{-N}^N \gamma_m(\omega) \langle e^{i2\pi m t/T}, \hat{\beta} \rangle$$

$$= T \sum_{-N}^N \gamma_m(\omega) \hat{\beta}[-m]$$

$$\rightarrow T \sum \gamma_m(\omega) \hat{\beta}[-m] = \langle u, \hat{\beta} \rangle$$

$$\Rightarrow \langle \sum \gamma_m(\omega) e^{i2\pi m t/T}, \hat{\beta} \rangle = \langle u, \hat{\beta} \rangle$$

$\Rightarrow u = \sum \gamma_m(\omega) e^{i2\pi m t/T}$  et l'unicité provient de l'unicité de la décomposition en série de Fourier.

4/ Transformée de Fourier d'une distribution T périodique

Th:  $\forall u \in \mathcal{D}_T, u \in \mathcal{F}$  et  $\mathcal{F}u = \sum \gamma_\ell(\omega) \delta_{2\pi \ell/T}$

Preuve:  $u = \sum \gamma_\ell(\omega) e^{2i\pi \ell t/T}$  avec  $|\gamma_\ell(\omega)| \leq C_\varphi (1+|\ell|)^p$

donc  $N = \sum \gamma_\ell(\omega) \delta_{2\pi \ell/T} \in \mathcal{F}'$

En effet,  $\forall \beta \in \mathcal{F}$

$$\forall \ell \neq 0 \quad \langle \gamma_\ell(\omega) \delta_{2\pi \ell/T}, \beta \rangle \leq |\gamma_\ell| |\beta(2\pi \ell/T)|$$

$$\leq C' (1 + (2\pi \ell/T)^p) |\beta(2\pi \ell/T)|$$

$$\leq \frac{C'' N_{p+2}(\beta)}{\ell^2}$$

et donc  $\langle \sum \gamma_\ell(\omega) \delta_{2\pi \ell/T}, \beta \rangle \leq |\gamma_0| N_0(\beta) + C''' N_{p+2}(\beta)$

$$\leq C N_{p+2}(\beta)$$

on pose  $v_N = \sum_{-N}^N \gamma_m(u) e^{2\pi i m u / T} \xrightarrow{y'} v$

$\mathcal{F}^{-1}(v_N) = \sum_{-N}^N \gamma_m(u) e^{i 2\pi m u / T} \xrightarrow{y'} \mathcal{F}^{-1}(v) \in \mathcal{Y}'$

Par ailleurs  $\mathcal{F}^{-1}(v_N) \xrightarrow{d'} v \Rightarrow v \in \mathcal{Y}'$  et  $\mathcal{F}^{-1}(v) = v$   
 on en déduit alors  $\mathcal{F}(v) = v$ .

III Echantillonnage

•  $f$  continue, pas d'échantillonnage  $T$   
 $\rightarrow \{f(eT)\}_{e \in \mathbb{Z}}$

Au sens des distributions  $f_T = T \sum f(eT) \delta_{eT} \xrightarrow{y'} f$   
 (intégrale de Riemann)

• on souhaite relier la transformée de Fourier de  $f$  avec celle de  $f_T$  ~~qui est~~ qui est  $\frac{1}{T}$  périodique.

$\hat{f}_T = T \sum f(eT) \hat{\delta}_{eT} = T \sum f(eT) e^{-i 2\pi e T \xi}$

on ne montre que sous de formes hyperboliques

$\hat{f}_T(\xi) = \sum_e \hat{f}(\xi + \frac{e}{T})$

• TF du peigne de Dirac:  $v = \sum \delta_{eT} \in \mathcal{Y}'$

$v$  est  $T$  périodique donc  $v = \sum \gamma_e(u) e^{2\pi i e u / T}$

or  $\gamma_e(u) = \langle v, \chi_e^{-i 2\pi e u / T} \rangle = \frac{1}{T} \sum \chi(mT) e^{-i 2\pi e m} = \frac{1}{T}$

donc  $v = \sum_e \delta_{eT} = \frac{1}{T} \sum_e e^{2\pi i e u / T}$

on en déduit  $\mathcal{F}v = \sum_e e^{-2\pi i e \xi} = \frac{1}{T} \sum_e \delta_{\frac{e}{T}}$

la transformée de Fourier d'un peigne de Dirac de pas  $T$  est un peigne de Dirac de pas  $\frac{1}{T}$  ← fréquence d'échantillonnage.

Th  $\forall f \in \mathcal{Y}, \sum_e f(eT) = \frac{1}{T} \sum_e \hat{f}(\frac{e}{T})$

Preuve  $\langle v, f \rangle = \sum_e f(eT) = \frac{1}{T} \sum_e \langle e^{2\pi i e u / T}, f \rangle = \frac{1}{T} \sum_e \hat{f}(\frac{-e}{T})$

• Théorème d'échantillonnage: Peut-on retrouver  $f$  à partir de  $f_T$ ? AST29  
 Whittaker 1915 / Nyquist 1929 / Kotelnikov 1933  
 mais meilleure formalisation par Shannon en 1949.

Hypothèse sur  $f$ : continue  $\Leftrightarrow$  discrétisation à un sens  
 on a besoin d'une hypothèse beaucoup plus forte!

Def: On dit que  $f \in \mathcal{S}'$  est à bande limitée ssi sa transformée de Fourier est à support compact.

Re si  $\hat{f} \in L^1$  alors  $f$  est analytique!

Th: Si  $f$  est à bande limitée alors

$$\hat{f}_T(\varphi) = \sum_{\ell} \hat{f}\left(\varphi + \frac{\ell}{T}\right)$$

Preuve: Soit  $\hat{f} \in \mathcal{D}$  ( $C^\infty$  à support compact)  $\hat{f} \in \mathcal{S}' \Rightarrow f \in \mathcal{S}'$

$$\hat{f}_T(\varphi) = \mathcal{F}\left(T \sum_{\ell} f(\ell T) \delta_{\ell T}\right)(\varphi)$$

$$= T \sum_{\ell} f(\ell T) \mathcal{F}(\delta_{\ell T})(\varphi)$$

$$= T \sum_{\ell} f(\ell T) e^{-2i\pi \ell T \varphi}$$

En appliquant la formule de Poisson à  $g(u) = f(uT) e^{-i2\pi u T \varphi}$

$$= \sum_{\ell} \hat{g}\left(\frac{\ell}{T}\right)$$

$$\text{or } \hat{g}\left(\frac{\ell}{T}\right) = \int g(u) e^{-i2\pi \frac{\ell}{T} u} du$$

$$= \int_T f(uT) e^{-i2\pi \left(\frac{\ell}{T} + \varphi\right) u T} du$$

$$= \frac{1}{T} \int f(u) e^{-i2\pi \left(\ell + \frac{\ell}{T}\right) u} du$$

$$= \hat{f}\left(\varphi + \frac{\ell}{T}\right)$$

$\Rightarrow \hat{f}_T(\varphi) = \sum \hat{f}\left(\varphi + \frac{\ell}{T}\right)$ . Par dernière, cela reste vrai pour  $\mathcal{S}'$  puisque la somme est linéaire.

Théorème de Shannon: Si  $f \in L^2$  et si le support de  $\hat{f}$  est inclus dans  $[-\frac{1}{2T}, \frac{1}{2T}]$  ( $f$  est à bande limitée) alors

AST30

$$f(t) \stackrel{L^2}{=} \sum_k f(kT) h_T(t - kT) \quad \text{avec} \quad h_T(t) = \frac{\sin(\pi t/T)}{\pi t/T}$$

Preuve: D'après le th précédent,

$$\hat{f}_T(\omega) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}\left(\omega + \frac{k}{T}\right) \in L^2_{loc}(\mathbb{C}) \text{ et est } \frac{1}{T} \text{ périodique}$$

Elle s'exprime donc comme une série de Fourier

$$\hat{f}_T(\omega) = \sum_k c_k e^{i2\pi k T \omega}$$

De plus  $f_T(\omega) = T \sum_k f(kT) \delta_{k/T} \rightarrow \hat{f}_T = T \sum_k f(kT) e^{-i2\pi k T \omega}$

soit  $c_k = f(-kT)$  par unicité des séries de Fourier.

on en déduit de plus

$$\frac{1}{T} \times T^2 \sum |f(kT)|^2 = \int_{-\frac{1}{2T}}^{\frac{1}{2T}} |\hat{f}_T(\omega)|^2 = \int_{-\frac{1}{2T}}^{\frac{1}{2T}} |f(t)|^2 = \|f\|_2^2$$

on utilise ici

$$\hat{f}_T(\omega) = \hat{f}(\omega) \times \mathbb{1}_{[-\frac{1}{2T}, \frac{1}{2T}]}$$

qui donne également

$$\hat{f}(\omega) = T \sum_k f(kT) e^{-i2\pi k T \omega} \mathbb{1}_{[-\frac{1}{2T}, \frac{1}{2T}]}$$

on vérifie alors

$$h_T = \mathcal{F}^{-1}\left(T \mathbb{1}_{[-\frac{1}{2T}, \frac{1}{2T}]}\right) = \frac{\sin \pi t/T}{\pi t/T}$$

Par continuité de la transformée de Fourier inverse dans  $L^2$

$$\left(\|f(kT) e^{-i2\pi k T \omega}\|_2^2 = T |f(kT)|^2\right) \quad f = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{-N}^N f(mT) h_T(t - mT)$$

Rq: • Si on suppose  $f$  continue, on obtient une convergence ponctuelle.

Si on suppose  $\hat{f} \in L^1$ , on a une convergence normale.

• Si  $f$  est un polynôme trigonométrique, on retrouve le résultat mais la preuve est différente (série de Fourier de  $e^{-i2\pi t/T} \mathbb{1}_{[-\frac{1}{T}, \frac{1}{T}]}$  au lieu de  $f$ )

□ Résultat plus général au sens faible...

AST 31

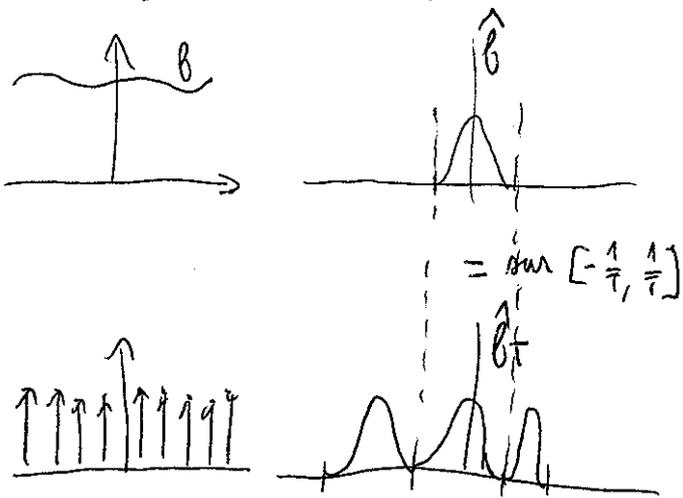
□ Si l'on suppose que  $f$  est à support dans  $[-\frac{1}{2T}, \frac{1}{2T}]$  avec  $\Omega > T$  (oversampling), on peut remplacer l'indicateur par ce fonction  $C^\infty$   $\hat{g}_T$   
 $\Rightarrow$  convergence normale de la série avec  $\hat{g}_T$  ou bien de  $h_T$ .

□ Repliement spectral (aliasing): que se passe-t-il lorsque les hypothèses de support de  $\hat{f}$  ne sont pas vérifiées?

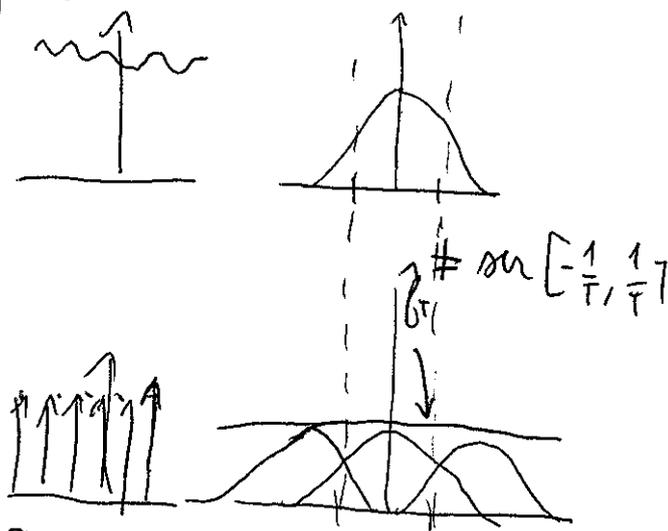
Idée si  $f$  est à bande limitée, on a toujours  $\hat{f}_T(\omega) = \sum \hat{f}(\omega + \frac{k}{T})$

mais on a plus  $\hat{f}(\omega) = \hat{f}_T(\omega) \mathbb{1}_{[-\frac{\pi}{T}, \frac{\pi}{T}]}$ .

Hypothèse Satisfaisante



Hypothèse non satisfaisante



Ex:  $f(t) = \cos(2\pi f_0 t)$  avec  $f_0 \in [0, \frac{1}{2T}]$

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{2}(\delta_{f_0} + \delta_{-f_0}) \rightarrow \hat{f}_T(\omega) = \frac{1}{2} \sum_k (\delta_{f_0 + \frac{k}{T}} + \delta_{-f_0 + \frac{k}{T}})$$

$$f_0 + \frac{k}{T} \in [-\frac{1}{2T}, \frac{1}{2T}] \Rightarrow k=0$$

$$-f_0 + \frac{k}{T} \in [-\frac{1}{2T}, \frac{1}{2T}] \Rightarrow k=0$$

$$\Rightarrow \hat{f}_T(\omega) \mathbb{1}_{[-\frac{1}{2T}, \frac{1}{2T}]} = \frac{1}{2}(\delta_{f_0} + \delta_{-f_0}) = \hat{f}(\omega)$$

$f(t) = \cos(2\pi f_1 t)$  avec  $f_1 \in [\frac{1}{2T}, \frac{3}{4T}]$

idem sauf  $f_0 + \frac{k}{T} \in [-\frac{1}{2T}, \frac{1}{2T}] \Rightarrow k=-1$  et  $-f_0 + \frac{k}{T} \in [-\frac{1}{2T}, \frac{1}{2T}] \Rightarrow k=1$

$$\hat{f}_T(\omega) \mathbb{1}_{[-\frac{1}{2T}, \frac{1}{2T}]} = \frac{1}{2}(\delta_{f_0 - \frac{1}{T}} + \delta_{-f_0 + \frac{1}{T}}) \neq \hat{f}$$

$$f_T(t) = \cos(2\pi(\frac{1}{T} - f_0)t) \neq f$$

Fréquence  
+ lente que  
la fréquence  
réelle!

Ex: dans les films, 24 images par seconde  
 $\Rightarrow$  pas assez pour les mouvements rapide  
 $\rightarrow$  roues de voiture qui tournent "à l'envers"

□ Comment échantillonner un signal à un pas  $T$  si celui-ci n'est pas à bande limitée? (le cas  $f \in L^2$ )

Idee: on cherche  $g \in L^2$  telle que  $\text{supp } \hat{g} \subset \left[-\frac{1}{2T}, \frac{1}{2T}\right]$

et  $\|f - g\|_2^2$  petit  $\Leftrightarrow \|\hat{f} - \hat{g}\|_2^2$  petit

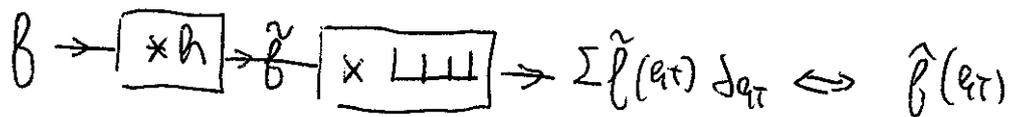
$\Rightarrow$  Projection sur  $V = \{g \in L^2, \text{supp } \hat{g} \subset \left[-\frac{1}{2T}, \frac{1}{2T}\right]\}$

$P_V \hat{f} = \hat{f} \mathbb{1}_{\left[-\frac{1}{2T}, \frac{1}{2T}\right]}$  (lissage)

$\Rightarrow$  un convertisseur Analogique-Digitale est ~~réalisé~~ composé de

1) un filtre passe bas  $\left[-\frac{1}{2T}, \frac{1}{2T}\right]$

2) un échantillonnage uniforme avec un pas  $T$ .



I Introduction

Signal discret :  $\beta_T = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \beta(kT) \delta_{kT}$  à T fixe!

$\rightarrow \{ \beta(kT) \}_{k \in \mathbb{Z}}$  suite

Pour simplifier les notations, on suppose  $T=1$ .

$$\beta_1 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \beta(k) \delta_k \Leftrightarrow \{ \beta[k] \}_{k \in \mathbb{Z}}$$

Filtrage stable pour cette classe de distributions / les suites.

Notation  $\delta_k[m] = \begin{cases} 1 & \text{si } m=k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

$$\Rightarrow \beta[m] = \sum_k \beta[k] \delta_k[m] \quad (\text{on retrouve l'écriture au sens des distributions})$$

II Filtrage discret homogène

filte L :  $\mathbb{C}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$  linéaire et homogène (stationnaire)

$$\Rightarrow L\beta[m] = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \beta[k] [L\delta(\cdot - k)] [m] = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \beta[k] L\delta[m-k]$$

On retrouve  $L\delta$  la réponse impulsionnelle et le fait qu'un filtre correspond à une convolution.  $= L\delta * \beta[m]$

Def: L est ~~stable~~ causal si  $L\delta[m] = 0 \quad \forall m < 0$ .

L est stable si  $\|\beta\|_{\infty} < +\infty \Rightarrow \|L\beta\|_{\infty} < +\infty$

$$\Leftrightarrow L\delta \in \mathcal{L}^1$$

Transformée de Fourier

$$R = L\delta \rightarrow \sum R[k] \delta_k \rightarrow \hat{R}(\varphi) = \sum R[k] e^{-i2\pi\varphi k}$$

$$R_k (L e^{i2\pi\varphi k}) [m] = \hat{R}(\varphi) e^{i2\pi\varphi m}$$

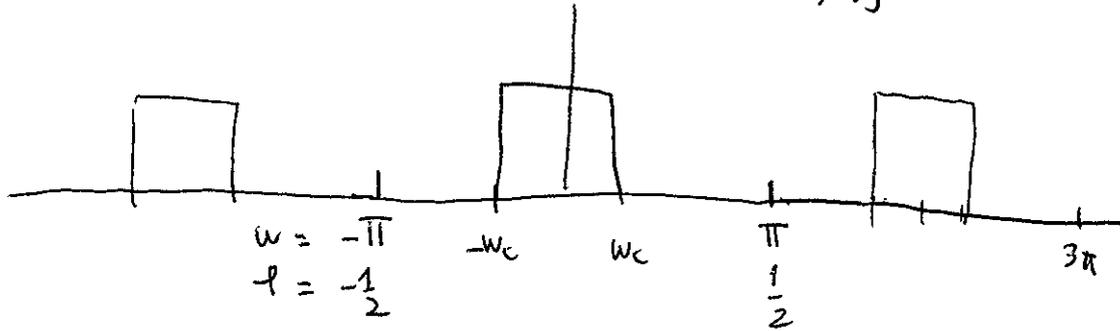
↑ fonction de transfert  
(les exponentielles complexes sont des vecteurs propres)

Propriété  $\hat{R}(\omega) = \sum R[k] e^{-i\omega k}$  (cf signal analogique)

Propriété :  $\widehat{L\beta}(\omega) = \hat{R}(\omega) \hat{\beta}(\omega)$

Ex. Filtrage passe bas idéal  $\hat{h}_0(\omega) = \mathbb{1}_{[-\omega_c, \omega_c]}$  + périodique.

AST34



Réponse impulsionnelle  $h_0[m] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \hat{h}_0(\omega) e^{i\omega m} d\omega$   
 $= \frac{\sin \omega_c m}{\pi m}$

→ échantillonnage uniforme de la fonction de transfert d'un filtre analogique passe bas.

### III Transformée en z et synthèse de filtres discrets

#### 1) Transformée en z

Examinons de la TF:

continu.  $\omega \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-i\omega t} dt$   $\xrightarrow{\text{Laplace}}$   $p \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-pt} dt$   
 $\leftarrow \begin{matrix} p = i\omega \\ p \in \mathbb{C} \end{matrix}$

discret  $\omega \mapsto \sum_{\mathbb{Z}} f[m] e^{-i\omega m}$   $\xrightarrow{\text{Transformée en z}}$   $z \mapsto \sum_m f[m] z^{-m}$   
 $\leftarrow \begin{matrix} z = e^{i\omega} \end{matrix}$

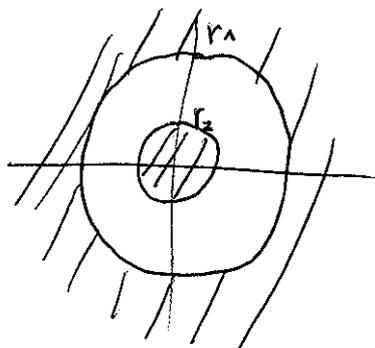
Notation:  $\tilde{h}(z) = \sum f[m] z^{-m}$  : série de Laurent  
 $\sum_{m \geq 0} f[m] z^m + \sum_{m < 0} f[-m] (z^{-1})^m$   
 ① ②

Domaine de convergence:

①  $\exists r_1 \in \mathbb{R} \text{ tq } |z| < r_1 \Rightarrow \left| \sum_{m \geq 0} f[m] z^m \right| < +\infty$   
 et  $|z| > r_1 \Rightarrow | \dots | = +\infty$  ou pas définie

②  $\exists r_2 \in \mathbb{R} \quad |z^{-1}| < r_2^{-1} \Rightarrow \left| \sum_{m > 0} f[-m] (z^{-1})^m \right| < +\infty$   
 $|z^{-1}| > r_2^{-1} \Rightarrow \left| \sum_{m > 0} f[-m] (z^{-1})^m \right| = +\infty$  ou pas définie

→ Anneau de convergence pour la série de Laurent



→ Filtré stable  $\Rightarrow r_2 \leq 1 \leq r_1$

Filtré causal  $\Rightarrow r_1 = +\infty$

→ Propriété:  $\widetilde{A * b}(z) = \hat{A}(z) \hat{b}(z)$  (cf Fourier)

Ex:  $A[n] = \delta[k-m] \Rightarrow \hat{A}(z) = z^{-k}$  (retard)

$A[n] = a^n \mathbb{1}_{n \geq 0} \Rightarrow \hat{A}(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}} \quad |z| > |a|$

$A[n] = na^n \mathbb{1}_{n \geq 0} \Rightarrow \hat{A}(z) = \frac{az^{-1}}{1 - az^{-1}} \quad |z| > |a|$

2/ Filtrés récursifs et fonctions rationnelles

Famille de filtrés implémentables:  $y = Lb$  défini par "récurrence"

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^M b_k b[n-k] \quad (\text{cf équations différentielles pour les filtres analoges})$$

$$\Leftrightarrow y[n] = a_0^{-1} \left( \sum_{k=0}^M b_k b[n-k] - \sum_{k=1}^N a_k y[n-k] \right)$$

→ Filtrés causaux par construction.

TR en  $z$ :  $\sum_{k=0}^N a_k z^{-k} \hat{y}(z) = \sum_{k=0}^M b_k z^{-k} \hat{b}(z)$

$\Rightarrow \hat{A}(z) = \frac{\hat{y}(z)}{\hat{b}(z)} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}} \rightarrow$  Fonction rationnelle en  $z^{-1}$

→ Décomposés en éléments simples

$$\hat{A}(z) = \sum_{k=0}^{M-N} c_k z^{-k} + \sum_{k=1}^M \sum_{d=1}^{d_r} \frac{c_{k,d}}{\left[1 - \left(\frac{z^{-1}}{\lambda_k}\right)^d\right]}$$

$d_r$  ← nb. de racines  
 $d$  ← degré de multiplicité

Filtré causal et stable  $\Leftrightarrow |\lambda_k| > 1$

↖ racines de  $\sum_{n=0}^N a_n z^{-n}$

### 3/ Transfert de filtres analogiques

$$\hat{h}(w) \xrightarrow{\text{continu}} \tilde{h}(z) \text{ discret}$$

$$\hat{h}(w) = \frac{N(iw)}{D(iw)} \rightarrow \tilde{h}(z) = \frac{N(F(z))}{D(F(z))} \text{ avec } F \text{ fraction rationnelle}$$

Souhait :  $F(e^{iw}) = iw$  mais c'est impossible!

→ Approximation. Par exemple  $F(z) = 1 - z$

$$F(z) = \frac{1-z}{1+z}$$

### IV Signaux finis

•  $\beta[n], n \in [0, N-1]$

→ Périodisation

$$\beta_{\text{per}}[n] = \sum_{\ell} \beta[n] \Pi_{[0, N-1]}[n - \ell N]$$

Δ Pds de périodisation / looks

• Signal discret et périodique ⇒ TF discrète et périodique  
 N échantillons N fréquences

$$\underbrace{e^{i2\pi \frac{\ell m}{N}}}_{\substack{\text{orthonormée} \\ \int_{\ell \in [0, N]} e^{i2\pi \frac{\ell m}{N}} e^{-i2\pi \frac{\ell' m}{N}} = \delta_{\ell \ell'}}}_{\substack{\text{base} \\ \text{de Fourier}}}$$

est une base orthonormée de  $\mathbb{C}^N$  !

⇒ on retrouve tout ce que l'on a vu avant.

Par exemple :  $\sum_{\ell=0}^{N-1} |\langle \beta, e_{\ell} \rangle|^2 = \sum_{\ell=0}^{N-1} \beta[\ell]^2$

•  $\beta[\ell] = \sum \langle \beta, e_{\ell} \rangle e_{\ell}[\ell]$   
 ↑ coef de Fourier  $\hat{\beta}[n]$

Convolution circulaire :  $\beta \circledast h = \sum_{p=0}^{N-1} \beta[p] h[n-p]$  (cf convolution pour les fonctions périodiques)  
 $\widehat{\beta \circledast h} = \hat{\beta} \hat{h}$

Intérêt? : C'est en fait le seul TF qui manipule les ordonnées !

Existera d'un algorithme rapide : FFT

I Introduction

Cadre discret  $\{x[n]\}_{n \in \mathbb{Z}}$  mais variables aléatoires au lieu de valeurs

Intérêt: Modélisation de classe de signaux au lieu d'une réalisation.

Ex: Poule: prise en compte de la variabilité inter/trajectoire.

$$x[n] \rightsquigarrow X[n](\omega) = x[n]$$

II Processus stationnaire au sens large (PSSL)

1/ Définition

Processus aléatoire:  $(X[n])_{n \in \mathbb{Z}}$  suite aléatoire  $X[n] \in \mathbb{R}$

Loi jointe

$P(X[m_1] \in A_1, \dots, X[m_k] \in A_k)$  caractérise le processus

Hyp:  $X[n] \in L^2(\mathbb{R}) \forall n$  (Existence d'une moyenne et d'une variance)

Moyenne:  $\mu[n] = E[X[n]]$

(Auto) Covariance:  $R_x(m, m) = Cov(X[n], X[m]) = E[(X[n] - \mu[n])(X[m] - \mu[m])]$

Def: un PSSL  $(X[n])_{n \in \mathbb{Z}}$  est une suite de v.a. aléatoires réelles de covs intégrables t.q.  $\mu[n]$  est constant et  $R_x(m, m) = R(m-m)$

$$\mu = E[X[n]] \quad R_x(m, m) = R_x(m-m)$$

$$= Cov(X[n], X[m])$$

$R_x$  est appelé parfois "fonction de covariance" Prop  $R_x(m-m) = R_x(m-m)$

Ex: Suite indep. iid est un PSSL:  $R(0) = \sigma^2, R(m) = 0 \text{ si } m \neq 0$

$$\mu = E(X[0])$$

Processus stationnaire au sens strict: même pour tout  $n$

• suite non corrélés de même moyenne et variance est un PSSL

• En traitement du signal, on a souvent 1 seule réalisation

→ hypothèse de stationnarité et réduit à 2 paramètres  $\mu$  et  $R_x(\cdot)$

2/ Estimation de la moyenne et de la covariance

Moyenne empirique:  $\hat{\mu}_N = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \rightarrow$  Estimateur sans biais  $E \hat{\mu}_N = \mu$

Def le processus est "ergodique pour la moyenne" si  $\lim_{N \rightarrow \infty} \hat{\mu}_N = \mu$  (au sens  $L^2$ )

Prop:  $E \left( \left[ \tilde{N}_N - N \right]^2 \right) = \frac{1}{N} \sum_{l=-N+1}^{N-1} \left( 1 - \frac{|l|}{N} \right) R_x(l)$  (AST 3)

$\Rightarrow (X_n)$  est ergodique pour la moyenne si  $\downarrow \rightarrow 0$  et donc  $R_x(l)$  tend vers 0 assez rapidement.

Preuve:

$$E \left( \left[ \tilde{N}_N - N \right]^2 \right) = \frac{1}{N^2} E \left[ \sum_{m, m'=0}^{N-1} (X[m] - N) (X[m'] - N) \right]$$

$$= \frac{1}{N^2} \sum_{m, m'=0}^{N-1} R_x[m-m'] = \frac{1}{N} \sum_{l=-N+1}^{N-1} \left( 1 - \frac{|l|}{N} \right) R_x(l)$$

Ex suite orthogonale  $E \left( \left[ \tilde{N}_N - N \right]^2 \right) = \frac{R_x(0)}{N}$  ( $N-|l|$ ) = nbr de couple à distance  $l$ .

□ L'auto-covariance s'estime comme moyenne empirique de produits avec délais...

$$\tilde{R}_x(l) = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1-l} [X[m] - \tilde{N}_N] [X[m-l] - \tilde{N}_N] \quad (l \geq 0)$$

$\uparrow$   $\frac{1}{N-l}$  au dénominateur!

### 3/ opérateurs de covariance et puissance spectrale

□ opérateur de covariance:  $\beta[m] \mapsto R\beta[m] = \sum_m R_x[m-m'] \beta[m']$

$\Rightarrow$  symétrique •  $\langle g, R\beta \rangle = \sum_m g[m] \sum_m R_x[m-m'] \beta[m'] = \sum_m R_x[m-m'] \beta[m'] g[m] = \langle Rg, \beta \rangle$

$\Rightarrow$  positif •  $\langle \beta, R\beta \rangle = \sum_{m, m'} R_x[m-m'] \beta[m] \beta[m'] = E \left( \left[ \sum_m \beta[m] (X[m] - N) \right]^2 \right) \geq 0$

△ Valable que pour  $\beta$  suite finie (ou si  $R_x[m] \in l_1$ )

□ Si  $R_x \in l_1$ , on pose  $\hat{R}_x(\omega) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} R_x[m] e^{-im\omega}$

on vérifie que comme  $R$  est un opérateur symétrique, positif  $\hat{R}_x(\omega) \geq 0$

Def:  $\hat{R}_x(\omega)$  est la puissance spectrale du processus.

[interprétation: énergie moyenne par unité de fréquence]

Ex: Bruit blanc:  $R_x[m] = \sigma^2 \delta[m] \rightarrow \hat{R}_x(\omega) = \sigma^2$

Rq  $R_x(m) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \hat{R}_x(\omega) e^{im\omega} d\omega$

□ Mesure spectrale: que faire si  $R_x \notin \ell_1$ ?  $\Rightarrow$  TF au sens des distributions  
TF au sens "des mesures"

,  $X$  PSSL centré (pour simplifier)  $\Rightarrow R_x[0] \geq 0$

$\bullet R_x[-m] = R_x[m]$

$\bullet |R_x[m]| \leq R_x[0]$   $\left[ E[(X[0] + \lambda X[m])^2] = (1+\lambda^2)R_x[0] + 2\lambda R_x[m] \geq 0 \right]$

• ex 1) BB  $R_x[m] = \sigma^2 \delta[m]$   $\Rightarrow$  suite white  $X[m] = X$   $R_x[m] = \sigma^2 \delta[m]$  ou Schwartz.

Prop et def:  $R_x$  est une suite de type positif.

i.e.  $\forall a \geq 1 \forall (m_1, \dots, m_a) [R_x(m_i - m_j)]_{i,j \in \{1, \dots, a\}}$  est hermitienne de type positif

$$\sum_{1 \leq i, j \leq a} \beta_{m_i} \overline{\beta_{m_j}} R_x(m_i - m_j) \geq 0 \quad \forall \beta_{m_1}, \dots, \beta_{m_a} \in \mathbb{C}$$

Th de Herglotz: si  $R[m]$  est une suite de type positif, alors  $\exists!$  mesure positive sur  $[-\pi, \pi]$  t.q.

$$R[m] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{im\omega} \nu(d\omega)$$

•  $\nu(d\omega) = \hat{R}_x(\omega) d\omega$  si  $R_x \in \ell_1$

$\bullet R_x[m] = \sigma^2 \iff \nu = 2\pi \sigma^2 \delta_0$

Esquisse de preuve:

$$\forall N \geq 0 \quad g_N(\omega) = \frac{1}{N} \sum_{m, m'=0}^{N-1} e^{-im\omega} e^{im'\omega} R_x(m-m') \geq 0 \text{ en l'yp}$$

$$= \sum_{-N+1}^{N-1} \left(1 - \frac{|k|}{N}\right) R_x[k] e^{-ik\omega}$$

$\Rightarrow \nu_N(d\omega) = g_N(\omega) d\omega$  mesure positive telle que  $\hat{\nu}_N(p) = \left(1 - \frac{|p|}{N}\right) R_x[p]$

$N \rightarrow \infty$ : on peut extraire 1 sous-suite qui converge étroitement vers 1 mesure  $\nu$

$(\nu_N([-\pi, \pi]) = R_x[0])$

$\ast \hat{\nu}(p) = R_x(p)$

Def  $N_x$  est la mesure spectrale du processus.

#### 4/ Filtrage linéaire homogène.

Soit  $h \in \ell^1$  un filtre (réponse impulsionnelle), on peut définir

$$Y = h * X \Leftrightarrow Y[k] = \sum h[l-m] X[m]$$

C'est un PSSL :

$$E Y[k] = \sum h[l-m] \mu = (\sum h[l-m]) \mu = cte = \mu_Y$$

$$E (Y[k]^2) = E ((Y[k] - \mu_Y)^2) + \mu_Y^2$$

$$Cov(Y[k], Y[l]) = Cov(h * X[k], h * X[l])$$

Lemme :  $Cov(h * X[k], g * X[l]) = h * \tilde{g} * R_X[k-l]$  avec  $\tilde{g}[m] = g[-m]$

Preuve :

$$\begin{aligned} Cov(h * X[k], g * X[l]) &= \sum_{m, n \in \mathbb{Z}} h[k-m] g[l-n] Cov(X[m], X[n]) \\ &= \sum_{m, n \in \mathbb{Z}} h[k-m] \tilde{g}[m-n] R_X[m-n] \\ &= \sum_{m, n \in \mathbb{Z}} h[(k-l) - (n-l)] \tilde{g}[m-l] R_X[m-l - (n-l)] \\ &= h * \tilde{g} * R_X[k-l] \end{aligned}$$

Th du filtrage :  $h \in \ell^1$ ,  $X$  un PSSL

alors  $Y = h * X$  est un PSSL de mesure spectrale  $\mu_Y = |\hat{h}(\omega)|^2 \mu_X$

Preuve : si  $R_X \in \ell^1$

$$\hat{R}_Y \in \ell^1 \text{ est } \hat{R}_Y = \hat{h} * \hat{R}_X * \hat{h} = |\hat{h}(\omega)|^2 \hat{R}_X(\omega)$$

→ Par dualité, cas général.

#### 5/ Interprétation de la puissance spectrale.

Soit le filtre passe bande de largeur de bande  $\Delta_\xi$   $\hat{R}_{\Delta_\xi}(\omega) = \begin{cases} \sqrt{\frac{\pi}{\Delta}} & \text{si } |\omega - \xi| \leq \frac{\Delta}{2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

$$\|R\|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\hat{R}(\omega)|^2 d\omega = 1$$

Le processus aléatoire  $X_{\Delta_\xi} = R_{\Delta_\xi} * X$  ne croise que les amplitudes fréquentielles au voisinage de  $\xi$

$$E(X_{\Delta_\xi}(m)) = R_{X_{\Delta_\xi}}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \hat{R}_{X_{\Delta_\xi}}(\omega) d\omega = \frac{1}{2} \int_{|\omega - \xi| \leq \frac{\Delta}{2}} \frac{\hat{R}_X(\omega)}{\Delta} d\omega$$

⇒ Puissance spectrale est proportionnelle à la densité du processus filtré autour de la fréquence  $\xi$ .

→  $\hat{R}_X(\xi)$  si  $\hat{R}_X$  est continue au point  $\xi$ .

### 6/ Classification, Innovation

on revient à  $X$  PSSL certé par soucis de simplification.

Dans  $L^2(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ ,  $H_m(x) =$  ser de Hilbert engendré par  $\{X_{[k]} \mid k \leq m\}$

$$= \left\{ \sum_{k=-N}^m \alpha_k X_{[k]}, \alpha \in \mathbb{R}, -\infty < N \leq m \right\}$$

Def:  $X$  est purement aléatoire si  $\bigcap_{m \in \mathbb{Z}} H_m(x) = \{0\}$

$X$  est purement déterministe si  $H_m(x) = H_0(x), \forall m \in \mathbb{Z}$

Ex. BB  $H_m(x) \perp X_{[m]}, m \geq m \Rightarrow \bigcap_{m \in \mathbb{Z}} H_m(x) \perp X_{[m]} \forall m$

$$\Rightarrow \bigcap_{m \in \mathbb{Z}} H_m(x) = \{0\}$$

$X_{[m]} = X \Rightarrow H_m(x) = \{\alpha X, \alpha \in \mathbb{R}\} = H_0(x)$

Proof: Soit  $X_{[m]}$  BSL alors  $\exists$  une décomposition  $X_{[m]} = X'_{[m]} + X''_{[m]}$  avec  $X'$  purement aléatoire et  $X''$  purement déterministe.

Preuve: Soit  $F = \bigcap_m H_m(x)$  pur définit  $E_m$

et  $E_m$  l'orthogonal de  $F$  dans  $H_m(x)$

on pose alors  $X'_m = \text{Proj}(X_m | E_m)$  et  $X''_m = \text{Proj}(X_m | F) (= E(X_m | F))$   
 $(= E(X_m | E_m))$

on a  $H_m(X'') = \text{Proj}(H_m(x) | F) = F \Rightarrow X''$  est purement déterministe

$$H_m(x) = \text{Proj}(H_m(x) | F) \oplus \text{Proj}(H_m(x) | E_m)$$

$$= F \oplus H_m(x')$$

$$\Rightarrow F = \bigcap_m H_m(x) = F \oplus \bigcap_m H_m(x') \Rightarrow \bigcap_m H_m(x') = \{0\}$$

et  $X'$  est purement aléatoire

Def: Processus d'innovation:  $U_m = X_m - \text{Proj}(X_m | H_{m-1}(x))$

ex BB:  $U_m = X_m \quad / \quad X_m = X \Rightarrow U_m = 0$

Prop: 1) Le processus d'innovation est un bruit blanc faible.

AST 42

2)  $H_m(u) \subset H_m(x)$  avec égalitéssi  $X$  est purement aléatoire.

Preuve: 1)  $U_m \perp H_{m-1}(x)$  donc  $U_m \perp U_{m-1}, \dots, U_{m-p}, \dots \quad \forall p \geq 1$

Reste à vérifier que  $E(U_m) = 0$  et  $V(U_m) = \sigma^2$ .

C'est une conséquence de la définition de  $U_m = X_m - \text{Proj}(X_m | H_{m-1}(x))$

et du fait que  $X_m \mapsto X_{m-1}$  se projette en une isométrie sur  $H(x)$ .

2) Par construction  $U_m \in H_m(x) \Rightarrow H_m(u) \subset H_m(x)$

Plus précisément  $H_m(x) = \text{Vect}(U_m) \oplus H_{m-1}(x)$

$$= \text{Vect}(U_m, \dots, U_{m-p}) \oplus H_{m-p-1}(x)$$

$$= H_m(u) \oplus \bigcap_{p \rightarrow \infty} H_m(x) = H_m(u) \oplus F$$

donc  $H_m(u) = H_m(x) \Leftrightarrow E \bigcap_m H_m(x) = 0 \Leftrightarrow X$  est purement aléatoire.

Th: Soit  $X_m$  un PSSC centré et  $U_m$  son processus d'innovation.

Si  $X_m$  est purement aléatoire alors  $\exists a \in \ell^2$  t.q.

$$X_m = \sum_{q=0}^{+\infty} a_q U_{m-q}$$

Pq: Cela signifie que tout PSSC purement aléatoire est l'image par un filtre causal d'un bruit blanc (la réciproque est évidemment vraie car  $H_m(x) \subset H_m(u) = \{0\}$ )

Preuve:  $H_m(x) = H_m(u) \Rightarrow X_m = \sum_{q=0}^{\infty} \frac{\langle X_m, U_{m-q} \rangle}{\|U_{m-q}\|^2} U_{m-q}$

$U_m$  est un bruit blanc faible donc  $\|U_{m-q}\|^2 = \sigma^2$  et par stationnarité

$$\langle X_m, U_{m-q} \rangle = a_q \quad (\text{ne dépend pas de } m)$$

### III Filtrage de Wiener

AST43

#### 1/ Pb du Filtrage

→ Observation d'un signal  $D$  qui est une version dégradée d'un signal d'intérêt  $X$

→ But: estimer au mieux  $X$  à partir de  $D$

□ Cadre "statistique": modélisation aléatoire.

Ex: •  $D = X + B$

avec  $X, B$  PSSL indep,  $R_X$  et  $R_B$  connus

R<sub>D</sub> en pratique  $R_B$  correspond au calibrage de l'instrument

et  $R_X$  est estimé à partir des données ( $R_D = R_X + R_B$ )

R<sub>D</sub>: on suppose tous les PSSL connus par commodité.

•  $D = g * X + B$  avec  $g$  connue

•  $D = f(X, B)$  avec  $X$  et  $D$  PSSL  $R_X, R_D, R_{X,D}$  connus

Estimateur: opérateur  $L: D \mapsto \hat{X} = L(D)$

Critère: on cherche ici à minimiser l'erreur quadratique moyenne

$$E(\|X[n] - \hat{X}[n]\|^2) = \|X[n] - \hat{X}[n]\|_2^2$$

#### 2/ Espérance conditionnelle et filtrage linéaire

□ Cas général:  $\hat{X}[n] = E(X[n] | H(D))$  (Espérance conditionnelle)

⇒ A priori, complexe à déterminer.

□ Cas gaussien:  $(X[n], D[n])$  gaussien  $\Leftrightarrow \forall n, (X[n], D[n])_{n \in \mathbb{Z}}$  est un vecteur gaussien

alors  $\hat{X}[n] = E(X[n] | H(D))$  est linéaire en  $D$

$$\hat{X}[n] = \sum a[m-l] H[l]$$

↑ stationnarité

cas linéaire: on impose à  $L$  d'être linéaire en  $D$

⇒ moins lin que l'espérance conditionnelle mais calculable.

AST 44

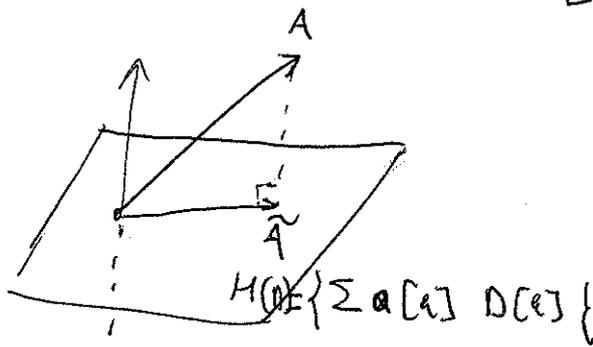
Th de la régression linéaire (Théorème de la projection sur  $H(D)$  qui est fermé)

• Le problème de la minimisation de  $\|A - \tilde{A}\|^2$  pour  $\tilde{A} \in H(D)$

admet une solution unique  $\hat{A} = \text{Proj}(A | H(D))$  (projection orthogonale)

•  $\hat{A}$  est déterminé par 
$$\begin{cases} \hat{A} \in H(D) \Leftrightarrow \hat{A} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a[k] D[k] \\ A - \hat{A} \perp D[k], \forall k \end{cases}$$

• Pour  $\hat{A}_0$  le minimiseur on a 
$$\begin{aligned} \epsilon &= \|A - \hat{A}_0\|_2^2 \\ &= \|A\|_2^2 - \langle A, \hat{A}_0 \rangle \\ &= E(A^2) - \sum_{k \in \mathbb{Z}} a[k] E(AD[k]) \end{aligned}$$



⇒ considération du Filtré de Wiener.

### 3/ Filtré de Wiener

Ici  $\hat{X}[n]$  est déterminé par 
$$\begin{cases} \hat{X}[n] = \sum R[n-k] D[k] \\ E[(X[n] - \hat{X}[n]) D[k]] = 0 \quad \forall k \end{cases}$$

~~$E[X[n] D[k]] = R[n-k]$~~   $E(X[n] D[k]) = \sum R[n-k] E(D[k] D[k])$

⇒  $R_{XD}[n-k] = R * R_D[n-k]$

si  $R_{XD}$  et  $R_D \in \ell^1$  (Existence d'une dérivée spectrale)

on obtient  $R_{XD} = \hat{R} \hat{R}_D \Rightarrow \hat{R} = \frac{\hat{R}_{XD}}{\hat{R}_D}$

Ex  $D = X + B \Rightarrow \hat{R} = \frac{\hat{R}_X}{\hat{R}_X + \hat{R}_B}$

$D = g * X + B \Rightarrow \hat{R} = \frac{\hat{g} \hat{R}_X}{|g|^2 \hat{R}_X + \hat{R}_B}$

Th de Wiener: Parmi les filtres linéaires  $\tilde{X}$  en  $D$ , celui qui minimise l'erreur quadratique moyenne  $E = \|\hat{X}[n] - X[n]\|_2^2$  est  $\hat{X} = \hat{h} * D$  avec  $\hat{h} = \frac{\widehat{R_{XD}}}{\widehat{R_D}}$

L'erreur minimale est  $E = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\widehat{R_X} \widehat{R_D} - \widehat{R_{XD}}^2}{\widehat{R_D}} d\omega$

Preuve: Seul le second point reste à prouver.

$$\begin{aligned}
 E &= E X[n]^2 - \sum_{l \in \mathbb{Z}} h[n-l] E X[n] D[l] \\
 &= E X[n]^2 - \sum h[n-l] R_{XD}[n-l] \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \widehat{R_X}(\omega) - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \hat{h}(\omega) \widehat{R_{XD}}(\omega) d\omega \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\widehat{R_X} \widehat{R_D} - \widehat{R_{XD}}^2}{\widehat{R_D}} d\omega
 \end{aligned}$$

Ex: si  $D = X + B$

$$\widehat{R_X} \widehat{R_D} - \widehat{R_{XD}}^2 = \widehat{R_X} (\widehat{R_X} + \widehat{R_B}) - \widehat{R_X}^2 = \widehat{R_X} \widehat{R_B}$$

$$\Rightarrow E = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\widehat{R_X} \widehat{R_B}}{\widehat{R_X} + \widehat{R_B}} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \hat{h}(\omega) \widehat{R_B} d\omega$$

Interprétation:  $\hat{h}(\omega) = \frac{\widehat{R_X}}{\widehat{R_X} + \widehat{R_B}} \sim 1$  si  $\widehat{R_X} \gg \widehat{R_B}$   
 $\sim 0$  si  $\widehat{R_B} \gg \widehat{R_X}$

$\Rightarrow$  on élimine les fréquences où le bruit domine  
 $\Leftrightarrow$  il reste les fréquences où le bruit domine des l'erreur.  
 $\Rightarrow$  Filtrage!

## 1/ Définition

Def: un PSSL ( $X[n]$ ) est Auto-Régressif (A.R.) si il existe un polynôme  $P$  non nul et un B.B. normalisé tels que

$$p * X = B \quad \text{ou} \quad p \text{ est la filtre associé à } P \quad (\hat{p}(z) = P(z^{-1}))$$

Rq: Quitte à décaler  $B$ , on peut toujours supposer  $P(0) \neq 0$  et dire que ceci définit une formule de récurrence de la forme

$$X[n] = \frac{1}{a_0} \left[ -\sum_{k=1}^N a_k X[n-k] + B[n] \right] \quad \text{avec} \quad P(x) = \sum_{k=0}^N a_k x^k$$

Prop:  $P$  n'a pas de racines de module 1.

preu: Par le théorème du filtrage,  $|\hat{p}(w)|^2 \hat{R}_X(w) = \hat{R}_B(w)$

soit  $|P(e^{-iw})|^2 \hat{R}_X(w) = 1$

Cor:  $\tilde{P}(z)$  admet un inverse  $\hat{P}(z) = \frac{1}{\tilde{P}(z)}$  sur un voisinage du cercle unité.

Pb: le filtre associé à  $\hat{P}$  est stable et causalssi toutes les racines de  $P$  sont de modules strictement supérieur à 1.

## 2/ Décomposition canonique

Prop: Soit  $P$  un polynôme sans racine de module 1 et tel que  $P(0) \neq 0$  alors il existe un unique polynôme  $P_0$  et un réel  $\sigma > 0$  tels que

- $\sigma |P(z^{-1})| = |P_0(z^{-1})|$  sur le cercle unité
- $P_0$  a toutes ses racines de module plus  $> 1$
- $P_0(0) = 1$  (couple canonique associé à  $P$ )

Preuve: Existence:  $|P(z^{-1})| = \left| \prod_{i=1}^N (z^{-1} - \xi_i) \right|$  où les  $\xi_i$  sont les racines de  $P$

$$= |c| \prod_{i=1}^N |z^{-1} - \xi_i|$$

Donc  $\forall z$  tel que  $|z|=1$   $|z^{-1} - \xi_i| = |z^{-1}| |z - \xi_i| = |1 - \xi_i z| = |\xi_i z^{-1} - 1| = |\xi_i| \left| z^{-1} - \frac{1}{\xi_i} \right|$   
 ( $\xi_i \neq 0$ )

Donc on peut remplacer  $|z^{-1} - \zeta_i|$  par  $|\bar{\zeta}_i| |z^{-1} - \frac{1}{\bar{\zeta}_i}|$  dus le produit précédent <sup>1st 4.2</sup>  
 dès que  $|\zeta_i| < 1$ . Supposons qu'il faille modifier les  $N'$  premières racines, on a:

$$\begin{aligned} |P(z^{-1})| &= |c| \prod_{i=1}^{N'} |\bar{\zeta}_i| |z^{-1} - \frac{1}{\bar{\zeta}_i}| \times \prod_{i=N'+1}^N |z^{-1} - \zeta_i| \\ &= |c| \prod_{i=1}^{N'} \bar{\zeta}_i (z^{-1} - \frac{1}{\bar{\zeta}_i}) \times \prod_{i=N'+1}^N (z^{-1} - \zeta_i) \\ &= \frac{1}{\sigma} |P_0(z^{-1})| \end{aligned}$$

unicité: on suppose que  $|A(z)| = |B(z)|$  sur le cercle unité,  $A(0) = B(0) = 1$ ,  
 et que les racines sont de module  $> 1$ . On ne peut avoir  $A=B$  et  $c=1$ ,  
 Soit  $\zeta_R$  les racines de  $A$  et  $\eta_r$  les racines de  $B$

$$\prod_{i=1}^m (z - \zeta_i)(\bar{z} - \bar{\zeta}_i) = c^2 \prod_{i=1}^m (z - \eta_i)(\bar{z} - \bar{\eta}_i)$$

on multiplie à gauche et à droite par  $z^{m+m}$  et on utilise  $z\bar{z} = 1$

$$z^m \prod_{i=1}^m (z - \zeta_i)(1 - \bar{\zeta}_i z) = c^2 z^m \prod_{i=1}^m (z - \eta_i)(1 - \bar{\eta}_i z)$$

$\Rightarrow$  Ces deux polynômes coïncident sur le cercle unité: ils ont égaux  
 les ensembles de racines et correspondent donc.  $\{\zeta_i, \frac{1}{\bar{\zeta}_i}\}_{i \in [1, m]} = \{\eta_i, \frac{1}{\bar{\eta}_i}\}_{i \in [1, m]}$

on en déduit  $m=m$  et la condition  $|\zeta_i| > 1$  et  $|\eta_i| > 1 \Rightarrow |\zeta_i| = |\eta_i|$   
 $A$  et  $B$  sont donc proportionnels  $\Rightarrow A(0) = B(0) \Rightarrow$  ils sont égaux.

Preuve: Soit  $X$  un PSSL A.R., il existe un unique couple  $(P_0, \sigma)$   
 tel que  $P_0 * X = \sigma B_0^*$  avec  $B_0^*$  un B.B. normalisé

(Ecriture unique)  $\cdot P_0(0) = 1$  et  $P_0$  a toutes ses racines de module  $> 1$

Preuve:  $X$  A.R.  $\Rightarrow \exists P \in \mathcal{P}$   $P * X = B$  avec  $B$  un B.B. normalisé

soit  $(P_0, \sigma)$  le couple unique associé à  $P$ .

$P_0 * X$  est un PSSL de puissance spectrale  $|\hat{P}_0(w)|^2 R_X(w)$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sigma} [P_0 * X] \text{ est un bruit blanc normalisé} = \sigma^2 |\hat{P}(w)|^2 R_X(w) = \sigma^2$$

L'unicité se déduit de  $\frac{1}{\sigma^2} |\hat{P}_0(w)|^2 R_X(w) = \frac{1}{\sigma^2} |\hat{P}_0'(w)|^2 R_X(w) \Rightarrow |\hat{P}_0(w)|^2 = \frac{\sigma^2}{\sigma'^2} |\hat{P}_0'(w)|^2$

par lequel la démonstration précédente s'applique.

Page manquante...

#### 4/ Estimation des coeff d'AR :

AST 99

Ph: supposons que X soit un A.R.

Comment déterminer les coeff de son écriture canonique:

$$X[n] - \sum_{q=1}^N \alpha_q X[n-q] = \sigma B_0[n]$$

Idée: on multiplie par  $X[n-l]$  et on prend l'espérance

$$R_x[l] - \sum_{q=1}^N \alpha_q R_x[l-q] = \sigma E[B_0[n]X[n-l]] = 0 \text{ si } l > 0$$

$$\Rightarrow \forall l > 0 \quad R_x[l] = \sum_{q=1}^N \alpha_q R_x[l-q]$$

Soit sous forme matricielle  $l=1, \dots, N$

$$\begin{bmatrix} R_x[0] & R_x[1] & \dots & R_x[N-1] \\ R_x[1] & R_x[0] & \dots & R_x[N-2] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_x[N-1] & R_x[N-2] & \dots & R_x[0] \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_x[1] \\ \vdots \\ R_x[N] \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$  Equation de Yule-Walker

Il reste à inverser le système... (ce n'est pas toujours possible)

$\Rightarrow$  En pratique 2 pb: on ne connaît pas  $N$  ou on n'a pas accès à  $R_x$  mais à des estimateurs

Existence d'un algo efficace pour résoudre ce problème: Durbin-Levinson

Ex d'utilisation: Codage LPC-10 pour les téléphones

